Equazioni differenziali autonome del secondo ordine

Come è ben noto, ogni equazione regolare del secondo ordine nella sola incognita u equivale ad un sistema di due equazioni del primo ordine in base alla procedura standard dell'introduzione dell'incognita ausiliaria u'. Tuttavia, nel sistema cui si perviene, nessuna delle due equazioni è in generale disaccoppiata dall'altra. Nel caso autonomo, invece, vi è la possibilità di ottenere, per una via diversa, un sistema di due equazioni del prim'ordine, *una delle quali in una sola incognita*. Lo scopo di queste pagine è appunto quello di introdurre e discutere tale possibilità. L'equazione differenziale che intendiamo considerare è appunto regolare, cioè in forma normale e retta da una funzione regolare. Per semplicità, ci limitiamo al caso in cui non vengano posti vincoli sui valori della soluzione e della sua derivata. Dunque l'equazione è del tipo

$$u''(t) = f(u(t), u'(t)) \tag{1}$$

ove $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è di classe C^1. Questa ipotesi non viene più richiamata nel seguito. La strategia per ottenere il sistema desiderato si basa sulla procedura scorretta seguente:

$$u'' = f(u,u'), \quad \frac{du'}{dt} = f(u,u'), \quad \frac{du'}{du}\,\frac{du}{dt} = f(u,u'), \quad \frac{du'}{du}\,u' = f(u,u')$$
$$\frac{du'}{du} = \frac{f(u,u')}{u'}\,. \tag{2}$$

Se ora nella (2) rimpiazziamo u' con un altro simbolo, diciamo v, vediamo che essa assume la forma di *un'equazione differenziale in una sola incognita*, la funzione $u \mapsto v$. Tutto ciò, tuttavia, deve essere rivisto e giustificato, e a ciò provvede il teorema che dimostriamo tra breve. Quel teorema, inoltre, chiarisce un altro punto. Infatti, data la necessità, nella derivazione della (2), di dividere per u' per ridurre l'equazione in forma normale, occorre prestare attenzione agli eventuali zeri di u' e osservare che soluzioni massimali della (1) non forniscono soluzioni massimali dell'equazione in esame, proprio a causa di tali zeri. Dunque anche la massimalità delle soluzioni è un problema da discutere con cura. Un esame preliminare sull'insieme degli zeri di u' è l'oggetto del risultato dato di seguito.

Proposizione 1. *Siano I un intervallo aperto e $u : I \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 che risolve la* (1) *in I. Se l'insieme degli zeri di u' ha punti di accumulazione in I allora u è una funzione costante.* ■

Dimostrazione. Sia $\{t_n\}$ una successione iniettiva di punti di I convergente a un punto $t_0 \in I$ tale che $u'(t_n) = 0$ per ogni n. Allora $u'(t_0) = 0$. Controlliamo che abbiamo anche $u''(t_0) = 0$. In caso contrario, infatti, u' sarebbe strettamente monotona in un intorno I' di t_0 e, di conseguenza, non potrebbe avere altri zeri in I', in contraddizione con l'ipotesi. Dunque $u''(t_0) = 0$. Posto $u_0 = u(t_0)$, l'equazione fornisce $f(u_0, 0) = f(u(t_0), u'(t_0)) = 0$. Segue che la funzione costante $v : I \to \mathbb{R}$ definita da $v(t) = u_0$ per ogni $t \in I$ risolve l'equazione (1). D'altra parte abbiamo anche $v(t_0) = u_0$ e $v'(t_0) = 0$. Siccome anche u risolve lo stesso problema di Cauchy e la soluzione definita in I è unica, abbiamo $u = v$ e concludiamo che u è costante. ■

Per il risultato precedente le soluzioni non costanti hanno derivata il cui segno è sostanzialmente costante a tratti. Più precisamente, se u è una soluzione definita in un intervallo aperto I e non costante, per ogni intervallo compatto $[a,b] \subset I$, la derivata u' ha al massimo un numero finito di zeri in I, per cui esistono punti $t_0, \ldots, t_m$ in numero finito, con $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$, tali che u' sia non nulla e abbia segno costante in ciascuno degli intervalli (t_{k-1}, t_k), $k = 1, \ldots, m$. Allora il calcolo interessante riguarda la riduzione al primo ordine della ricerca delle soluzioni la cui derivata abbia segno costante.

Teorema 2. *Siano I, J due intervalli aperti e $u : I \to J$ una funzione di classe C^2. Allora sono equivalenti le due condizioni: i) la funzione u è suriettiva, risolve la* (1) *in I e ha derivata mai nulla; ii) esiste una funzione $v : J \to \mathbb{R}$ di classe C^1 verificante*

$$v(y) \neq 0 \quad \text{e} \quad v'(y) = \frac{f(y, v(y))}{v(y)} \quad \text{per ogni } y \in J \tag{3}$$

e tale che u sia una soluzione massimale, fra quelle a valori in J, dell'equazione

$$u'(t) = v(u(t)). \ \blacksquare \tag{4}$$

Dimostrazione. Supponiamo che u verifichi le condizioni i) e definiamo v ponendo semplicemente $v = u' \circ u^{-1}$. Osserviamo che $v : J \to \mathbb{R}$ è ben definita in quanto u è biiettiva da I su J. Inoltre essa è di classe C^1 in quanto u' e u^{-1} sono entrambe di classe C^1 grazie all'ipotesi fatta su u. Verifichiamo le (3). Chiaramente $v(y) \neq 0$ per ogni $y \in J$ dato che u' non si annulla. Inoltre, per $y \in J$, abbiamo

$$v'(y) = u''(u^{-1}(y))\,(u^{-1})'(y) = \frac{u''(u^{-1}(y))}{u'(u^{-1}(y))} = \frac{f(u(u^{-1}(y)), u'(u^{-1}(y)))}{u'(u^{-1}(y))} = \frac{f(y, v(y))}{v(y)}\,.$$

La (4) è poi immediata: abbiamo infatti

$$v(u(t)) = u'(u^{-1}(u(t))) = u'(t) \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Rimane da dimostrare che u è massimale fra le funzioni (a valori in J) che sono soluzioni della (4). Supponiamo infatti che w sia una soluzione (a valori in J) che prolunga u in senso stretto. Siccome u è biiettiva da I su J e w assume valori in J, w non può essere una funzione iniettiva. Per il Teorema di Rolle esiste allora $t_0 \in I$ tale che $w'(t_0) = 0$. Segue $v(w(t_0)) = w'(t_0) = 0$, mentre si era notato che $v(y) \neq 0$ per ogni $y \in J$.

Viceversa, supponiamo che esista v verificante le (3) e tale che u sia soluzione massimale della (4) e dimostriamo che u verifica le i). Si ha subito che u' non si annulla dato che vale la (4) e v non si annulla. Inoltre, per ogni $t \in I$, abbiamo

$$u''(t) = v'(u(t))\,u'(t) = \frac{f(u(t), v(u(t)))}{v(u(t))}\,v(u(t)) = f(u(t), u'(t)).$$

Rimane da dimostrare che u è suriettiva. Supponiamo per fissare le idee che v sia positiva: dobbiamo dimostrare che $\sup_{t \in I} u(t) = \sup J$ e $\inf_{t \in I} u(t) = \inf J$. Siccome i due controlli sono analoghi, facciamo solo il primo. Ragionando per assurdo supponiamo che $\sup_{t \in I} u(t) < \sup J$. Poniamo $I = (a,b)$, con a e b finiti o meno. Osservato che u cresce in quanto v è positiva, il limite $\lambda = \lim_{t \to b} u(t)$ esiste e verifica $\lambda = \sup_{t \in I} u(t)$. Segue che $\lambda < \sup J$. In particolare λ è finito. Se b è finito, possiamo considerare il problema di Cauchy $w(b) = \lambda$ per la stessa equazione $w'(t) = v(w(t))$ e prolungare u oltre b restando con valori in J. Ciò contraddice che u fosse una soluzione massimale della (4) a valori in J. Se $b = +\infty$, dall'equazione deduciamo che il limite $\lim_{t \to +\infty} u'(t)$ esiste e vale $v(\lambda)$. In particolare esso è finito e positivo, contro il teorema dell'asintoto. ■

Osservazione 3. Notiamo che, esclusi casi particolarissimi, l'equazione (3) è non lineare (anche quando l'equazione di partenza è lineare), da cui la sostanziale impossibilità della sua risoluzione per via elementare nella maggior parte dei casi. Tuttavia il teorema indica comunque una strategia per la risoluzione della (1): preliminarmente si risolve la (3) e si trovano funzioni $v : J = J_v \to \mathbb{R}$ mai nulle e di classe C^1 in un certo intervallo $J = J_v$ dipendente da v; fatto ciò, per ognuna delle v trovate, si risolve la (4) rispetto a u cercandone soluzioni a valore nell'intervallo J corrispondente che siano massimali fra quelle che hanno tale proprietà. Se poi la soluzione v di partenza è pure massimale, ogni funzione u trovata in corrispondenza resta massimale fra le soluzioni che hanno derivata mai nulla. Conviene tuttavia chiarire considerando il problema di Cauchy

$$u(0) = u_0 \quad \text{e} \quad u'(0) = u_1 \tag{5}$$

per l'equazione (1), da intendersi in un intervallo aperto I contenente 0 e da determinare. Osserviamo una volta per tutte che da (1) e (5) segue che

$$u''(0) = f(u_0, u_1). \tag{6}$$

Supponiamo dapprima $u_1 \neq 0$, ad esempio $u_1 > 0$. In tal caso cerchiamo le soluzioni u che hanno derivata positiva. Ciò corrisponde a cercare le soluzioni v positive dell'equazione (3). Per quanto riguarda la condizione di Cauchy da imporre, dovendo poi valere la (4), vediamo che dobbiamo richiedere $J \ni u_0$ e

$$v(u_0) = u_1\,. \tag{7}$$

Sia dunque $v : J \to \mathbb{R}$ la soluzione positiva massimale dell'equazione (3) che verifica la condizione (7): questa esiste ed è unica dato che f è di classe C^1. La candidata a essere la soluzione u del problema posto si ottiene allora prendendo la soluzione massimale del problema di Cauchy $u(0) = u_0$ per l'equazione (4), soluzione che pure esiste ed è unica dato che v è di classe C^1. Si ottiene *la massimale fra le soluzioni con derivata positiva*.

Notiamo però che essa può non essere la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato. Infatti, se u non è ovunque definita e non è singolare in un estremo finito del suo dominio, diciamo nel secondo estremo $b < +\infty$, allora essa converge a un certo valore u_* e la sua derivata è infinitesima per t tendente a b. In tal caso u può essere prolungata oltre b risolvendo il problema di tipo Cauchy $u(b^+) = u_*$ e $u'(b^+) = 0$, del quale si cerca la soluzione massimale fra quelle che hanno derivata non nulla. Fatto ciò, se si ripresentasse una situazione analoga, occorrerebbe iterare la procedura di prolungamento.

Sia invece $u_1 = 0$. Ricordata la (6), che ora diventa $u''(0) = f(u_0, 0)$, distinguiamo due casi. Nel primo supponiamo $f(u_0, 0) \neq 0$. Allora $u''(0) \neq 0$ e ogni soluzione locale ha derivata non nulla vicino a $t = 0$. La soluzione con derivata non nulla in un intorno destro di 0 si trova con la strategia indicata dal teorema e deve risolvere il problema di tipo Cauchy $u(0^+) = u_0$ e $u'(0^+) = 0$. Analogamente si procede per la soluzione con derivata non nulla in un intorno sinistro di 0 e la soluzione cercata si ottiene incollando quelle trovate. Se poi questa non è massimale, occorre prolungare come è stato detto sopra.

Infine, se $u_1 = 0$ e $f(u_0, 0) = 0$, la situazione è banale: infatti la funzione $u : t \mapsto u_0$, $t \in \mathbb{R}$, risolve il problema ed è l'unica soluzione massimale cercata.

Non è inutile osservare che la soluzione v del problema di Cauchy dato dalle (3) e (7) deve verificare

$$v^2(y) = u_1^2 + 2 \int_{u_0}^{y} f(z, v(z))\, dz \quad \text{per ogni } y \in J$$

e la scelta di J deve rendere positivo il secondo membro. Nel caso in cui f dipenda solo dalla prima variabile, cioè sia del tipo $f(y, z) = g(y)$ con $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, allora la positività del secondo membro può essere imposta esplicitamente. Ciò comporta la possibilità di scegliere J effettivamente. ∎

Ora presentiamo vari esempi. Nei primi di questi faremo un ragionamento che appare inutilmente complesso: infatti, con lo scopo di illustrare più compiutamente l'applicazione della strategia, evitiamo talora di dimostrare a priori che la soluzione u cercata verifica alcune proprietà l'osservazione delle quali abbrevierebbe la casistica da esaminare. Avvertiamo che, nei calcoli che faremo, incapperemo talora in integrali del tipo

$$\int_a^b \phi(x)\, dx \quad \text{con } \phi : (a, b] \to \mathbb{R} \text{ continua ma divergente nel primo estremo.}$$

In tutti i casi che incontreremo l'integrale precedente, che non si inquadra nella teoria ordinaria di Riemann, può inteso nel senso seguente

$$\int_a^b \phi(x)\, dx = \lim_{c \to a^+} \int_c^b \phi(x)\, dx$$

ed ogni volta avverrà che effettivamente il limite esiste finito. Le tecniche di integrazione per sostituzione che verranno usate come nel caso ordinario si giustificano applicandole all'integrale su $[c, b]$ e poi passando al limite.

Esempio 4. Consideriamo un caso concreto, particolarmente semplice, del quale conosciamo già la soluzione. Risolviamo il problema di Cauchy

$$u'' = u, \quad u(0) = 1 \quad \text{e} \quad u'(0) = 1. \tag{8}$$

La soluzione massimale è data dalla formula $u(t) = e^t$ per $t \in \mathbb{R}$ e la sua derivata è positiva. Tuttavia, se immaginiamo di non conoscere questa informazione e seguiamo la via indicata nell'Osservazione 3, dobbiamo cercare restrizioni della soluzione, precisamente gli archi di soluzione con derivata positiva e negativa separatamente. Siccome il valore imposto a $u'(0)$ è positivo, partiamo dai primi. Le (3) diventano

$$v(y) > 0 \quad \text{e} \quad v'(y) = \frac{y}{v(y)} \quad \text{per ogni } y \in J$$

ove J è un intervallo aperto e dobbiamo cercare la soluzione massimale che verifica la condizione (7), che ora diventa $v(1) = 1$. Questa, come ora mostriamo, è data da

$$v(y) = y \quad \text{per ogni } y \in J = (0, +\infty).$$

Riscritta l'equazione nella forma $2v(y)\, v'(y) = 2y$, vediamo che essa equivale a

$$v^2(y) = y^2 + \text{costante} \quad \text{per ogni } y \in J$$

ove J è un intervallo aperto contenente 1 da determinare. Tenendo conto della condizione di Cauchy $v(1) = 1$, vediamo che la costante vale 0, da cui

$$v(y) = \pm y \quad \text{per ogni } y \in J.$$

Siccome v deve essere di classe C^1 abbiamo $v(y) = y$ per ogni $y \in J$ oppure $v(y) = -y$ per ogni $y \in J$. Tenendo conto della positività e della massimalità di v, deduciamo che deve valere una delle due condizioni

$$\begin{aligned} &i) \quad J = (0, +\infty) \quad \text{e} \quad v(y) = y \quad \text{per ogni } y \in J \\ &ii) \quad J = (-\infty, 0) \quad \text{e} \quad v(y) = -y \quad \text{per ogni } y \in J \end{aligned}$$

e il caso *ii)* va escluso dato che J deve contenere 1. Ciò prova che J e v sono come avevamo detto e la (4) diventa

$$u'(t) = u(t) \quad \text{per ogni } t \in I$$

ove I è pure un intervallo aperto da determinare, questa volta contenente 0. Ma u deve assumere valore in J, per cui u è soggetta al vincolo di positività. D'altra parte la soluzione massimale u che verifica la condizione di Cauchy $u(0) = 1$ è data da $u(t) = e^t$ per $t \in \mathbb{R}$ ed è già positiva. Questa, dunque, è la soluzione del problema (8) di partenza.

In particolare, siccome u ha $\mathbb{R}$ come dominio, non vi sono altri casi da considerare ed è inutile cercare archi con derivata negativa. Tuttavia ciò non era ovvio all'inizio e, se non avessimo badato al segno di $u'(0)$, avremmo potuto cercare prima gli archi con derivata negativa. Supponiamo dunque di non aver ancora fatto nulla e di iniziare il calcolo cercando gli archi di questo tipo. La procedura è analoga e le varianti rispetto alla situazione precedente sono le seguenti:

$$\begin{aligned} &v(y) < 0 \quad \text{e} \quad v'(y) = \frac{y}{v(y)} \quad \text{per ogni } y \in J \\ &i) \quad J = (0, +\infty) \quad \text{e} \quad v(y) = -y \quad \text{per ogni } y \in J \\ &ii) \quad J = (-\infty, 0) \quad \text{e} \quad v(y) = y \quad \text{per ogni } y \in J. \end{aligned}$$

Nei due casi avremmo trovato

$$\begin{aligned} &i) \quad u'(t) = -u(t) \quad \text{e} \quad u(t) > 0 \quad \text{per ogni } t \in I \\ &ii) \quad u'(t) = u(t) \quad \text{e} \quad u(t) < 0 \quad \text{per ogni } t \in I \end{aligned}$$

ove I è da determinare. Dunque $u(t) = ce^{-t}$ per $t \in \mathbb{R}$ con $c > 0$ e $u(t) = ce^{t}$ per $t \in \mathbb{R}$ con $c < 0$, rispettivamente nei due casi *i)* e *ii)*. Ma ciascuna delle due formule fornisce una famiglia di funzioni definite ovunque e incompatibili con le condizioni di Cauchy. Concludiamo che non vi sono archi con derivata negativa.

Esempio 5. Consideriamo un problema di Cauchy la cui soluzione non è ovvia:

$$u''(t) = 2u^3(t) \quad \text{per } t \in I\,, \quad u(1) = 1 \quad \text{e} \quad u'(1) = -1$$

ove I è un intervallo aperto da determinare contenente 1. Dato che il valore imposto a $u'(1)$ è negativo cerchiamo dapprima un arco di soluzione con derivata negativa. Le (3) e (7) diventano

$$v(y) < 0 \quad \text{e} \quad v'(y) = \frac{2y^3}{v(y)} \quad \text{per ogni } y \in J \quad \text{e} \quad v(1) = -1$$

ove J è da determinare contenente 1. L'equazione differenziale equivale a

$$v^2(y) = y^4 + \text{costante} \quad \text{per ogni } y \in J$$

e la condizione di Cauchy implica che il valore della costante è 0. Pertanto la soluzione negativa massimale è data dalla formula

$$v(y) = -y^2 \quad \text{per } y \in J = (0, +\infty)$$

e la (4) diventa

$$u'(t) = -u^2(t) \quad \text{per } t \in I$$

ove I è un intervallo aperto contenente 1 da determinare. La soluzione massimale del problema di Cauchy $u(1) = 1$ è data dalla formula

$$u(t) = \frac{1}{t} \quad \text{per } t \in I = (0, +\infty)\,.$$

Siccome u è singolare nell'origine, essa è la soluzione massimale del problema di Cauchy posto all'inizio e non occorre cercare archi di soluzione con derivata positiva.

Esempio 6. Consideriamo un caso meno semplice che effettivamente ci porta a costruire due restrizioni della soluzione, che pure conosciamo già. Risolviamo il problema di Cauchy

$$u'' = u, \quad u(0) = 1 \quad \text{e} \quad u'(0) = 0. \tag{9}$$

La soluzione è data dalla formula $u(t) = \cosh t$ per $t \in \mathbb{R}$, ma in questa sede fingiamo di ignorare la teoria delle equazioni lineari. Conviene fare un piccolo studio a priori (caso particolare di quanto è stato detto nell'Osservazione 3). Siccome le (9) implicano che $u''(0) = u(0) = 1 > 0$, segue che u è positiva, dunque convessa, in un intorno di 0, per cui la sua derivata u' cresce. Siccome poi $u'(0) = 0$, deduciamo che in un intorno di 0 si ha $u'(t) > 0$ se $t > 0$ e $u'(t) < 0$ se $t < 0$. La via indicata dall'Osservazione 3 permette allora di costruire la restrizione di u ai positivi piccoli e la restrizione di u ai negativi di modulo piccolo separatamente. Supponiamo dunque $t > 0$: dobbiamo cercare una soluzione massimale del problema di tipo Cauchy $u(0^+) = 1$ e $u'(0^+) = 0$ definita in un intervallo del tipo $I = (0, b)$ con $b \in (0, +\infty]$ con derivata positiva. Le (3) diventano

$$v(y) > 0 \quad \text{e} \quad v'(y) = \frac{y}{v(y)} \quad \text{per ogni } y \in J$$

ove J è un intervallo aperto da determinare e dobbiamo cercare la soluzione massimale che verifica la condizione (7), che ora diventa $v(1) = 0$. Procedendo come nell'Esempio 4, vediamo che l'equazione equivale a

$$v^2(y) = y^2 + \text{costante} \quad \text{per ogni } y \in J.$$

Tenendo conto della condizione di Cauchy, vediamo che la costante vale -1. Usando la positività di v otteniamo

$$v(y) = \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{per ogni } y \in J$$

ove, per la massimalità, J è uno dei due intervalli $(1, +\infty)$ e $(-\infty, -1)$. La (4) diventa

$$u'(t) = \sqrt{u^2(t) - 1} \quad \text{per ogni } t \in I$$

ove I è pure un intervallo aperto da determinare. Ma $u(0^+) = 1$ e u deve assumere valore in J. Deduciamo che $J = (1, +\infty)$, cioè che stiamo cercando le soluzioni positive massimali. Separando le variabili e usando la condizione di Cauchy $u(0^+) = 1$, otteniamo

$$t = \int_0^t \frac{u'(s)}{\sqrt{u^2(s) - 1}}\, ds = \int_1^{u(t)} \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}}\,.$$

Con la sostituzione $y = \cosh z$ e posto $\operatorname{sett\,cosh} = \bigl(\cosh|_{[0,+\infty)}\bigr)^{-1}$, abbiamo

$$t = \int_{\operatorname{sett\,cosh} 1}^{\operatorname{sett\,cosh} u(t)} \frac{\sinh z}{\sqrt{\cosh^2 z - 1}}\, dz = \int_0^{\operatorname{sett\,cosh} u(t)} dz = \operatorname{sett\,cosh} u(t).$$

Dunque, siccome l'immagine della funzione $\operatorname{sett\,cosh}$ è $[0, +\infty)$, abbiamo $I = (0, +\infty)$ e la soluzione massimale cercata è data dalla formula $u(t) = \operatorname{sett\,cosh}^{-1}(t) = \cosh t$ per $t > 0$. Riprendendo il discorso iniziale, l'altra restrizione di u da cercare è quella con derivata negativa e il discorso è perfettamente analogo. Le varianti rispetto a quello appena fatto sono le seguenti:

$$v(y) = -\sqrt{y^2 - 1} \quad \text{per ogni } y \in J \quad \text{da cui} \quad u'(t) = -\sqrt{u^2(t) - 1} \quad \text{per ogni } t \in I$$

e ancora deve essere $J = (0, +\infty)$. Proseguendo si ottiene

$$t = -\int_0^t \frac{u'(s)}{\sqrt{u^2(s) - 1}}\, ds = \ldots\ldots = -\operatorname{sett\,cosh} u(t).$$

Dunque, siccome l'immagine della funzione $-\operatorname{sett}\cosh$ è $(-\infty, 0]$, abbiamo $I = (-\infty, 0)$ e u è ora data dalla formula $u(t) = \operatorname{sett}\cosh^{-1}(-t) = \cosh(-t) = \cosh t$ per $t < 0$. Incollando le due restrizioni e ricordando che $u(0) = 1$, troviamo la soluzione massimale del problema (9) posto all'inizio: $u(t) = \cosh t$ per $t \in \mathbb{R}$.

Anche in questo caso abbiamo voluto illustrare la procedura. In alternativa avremmo potuto dimostrare a priori che la soluzione cercata è pari con il vantaggio di eliminare la seconda parte del discorso.

Esempio 7. Vediamo una situazione complicata, che ha come soluzione la funzione $u(t) = \sin t$ per $t \in \mathbb{R}$ e che comporta infiniti prolungamenti. Infatti la derivata di u cambia segno infinite volte. Naturalmente immaginiamo di procedere solo secondo le indicazioni dell'Osservazione 3. Il problema di Cauchy da risolvere è il seguente:

$$u'' = -u, \quad u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u'(0) = 1.$$

Ignorando in un primo momento le condizioni di Cauchy, cerchiamo tutte le soluzioni massimali con derivata positiva della sola equazione e tutte le soluzioni massimali con derivata negativa. Consideriamo le prime. La (3) diventa

$$v(y) > 0 \quad \text{e} \quad v'(y) = -\frac{y}{v(y)} \quad \text{per ogni } y \in J$$

ove J è un intervallo aperto che va scelto fra quelli che garantiscono la massimalità. L'equazione equivale a $v^2(y) = \text{costante} - y^2$ per ogni $y \in J$. Siccome J non è ridotto all'origine la costante deve essere strettamente positiva. La denotiamo con γ^2, con $\gamma > 0$. Allora le soluzioni positive massimali sono le seguenti

$$v(y) = \sqrt{\gamma^2 - y^2} \quad \text{per } y \in J = (-\gamma, \gamma) \tag{10}$$

e la (4) diventa

$$u'(t) = \sqrt{\gamma^2 - u^2(t)} \quad \text{per ogni } t \in I$$

ove I è un intervallo aperto che garantisca la massimalità della soluzione a valori in J. Introduciamo un punto arbitrario $t_0 \in I$ e il corrispondente valore $u_0 = u(t_0)$, che necessariamente verifica la disuguaglianza $|u_0| \le \gamma$. Separando le variabili otteniamo

$$t - t_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{u'(s)}{\sqrt{\gamma^2 - u^2(s)}}\, ds = \arcsin(u(t)/\gamma) - \arcsin(u_0/\gamma) \quad \text{per ogni } t \in I$$

e, posto $\alpha = \arcsin(u_0/\gamma)$, la condizione di massimalità diventa

$$I = \{t \in \mathbb{R} : t - t_0 + \alpha \in (-\pi/2, \pi/2)\} = \bigl(-\pi/2 + t_0 - \alpha, \pi/2 + t_0 - \alpha\bigr).$$

Abbiamo pertanto

$$u(t) = \gamma \sin\bigl(t - t_0 + \alpha\bigr) \quad \text{per ogni } t \in \bigl(-\pi/2 + t_0 - \alpha, \pi/2 + t_0 - \alpha\bigr). \tag{11}$$

Analogamente le soluzioni massimali con derivata negativa sono date da

$$u(t) = \gamma \sin\bigl(-t + t_0 + \alpha\bigr) \quad \text{per ogni } t \in \bigl(-\pi/2 + t_0 + \alpha, \pi/2 + t_0 + \alpha\bigr) \tag{12}$$

e provengono dalla analoga della (10), che ora è

$$v(y) = -\sqrt{\gamma^2 - y^2} \quad \text{per } y \in J = (-\gamma, \gamma). \tag{13}$$

Preparato tutto ciò, riprendiamo il problema di Cauchy che ci siamo proposti di risolvere. Prendiamo $t_0 = 0$ e, dato che il valore imposto a $u'(0)$ è positivo, cerchiamo la soluzione locale con derivata positiva. Il valore di γ da prendere nella (10) è individuato dalla (7), che ora diventa $v(0) = 1$. Pertanto $\gamma = 1$. Dobbiamo prendere inoltre $u(t_0) = u(0) = 1$, per cui $\alpha = 0$ e la (11) diventa

$$u(t) = \sin t \quad \text{per } t \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Chiaramente u è prolungabile sia per $t < -\pi/2$ sia per $t > \pi/2$. Cerchiamo, ad esempio, il prolungamento per $t > \pi/2$. In tal caso dobbiamo prendere le condizioni del tipo di Cauchy $u((\pi/2)^+) = 1$ e $u'((\pi/2)^+) = 0$.

La ricerca della soluzione con derivata ancora positiva fallisce. Infatti dobbiamo ricorrere ancora alle (10) e (11) e imporre il raccordo in $\pi/2$ con la funzione già trovata. Vale a dire dobbiamo imporre che l'intervallo I abbia primo estremo in $\pi/2$ e che i limiti destri della funzione (11) e della sua derivata per t tendente a $\pi/2$ valgano 1 e 0 rispettivamente. Innanzi tutto determiniamo γ tramite la (10). Siccome $u((\pi/2)^+) = 1$, abbiamo $\sup u' \geq 1$ e dunque $\gamma \geq 1$. Inoltre $v(y)$ deve tendere a 0 per y tendente a 1. Concludiamo che $\gamma = 1$. D'altra parte l'intervallo I deve avere ora la forma $(\pi/2, b)$ per un certo $b > \pi/2$, per cui possiamo inizialmente prendere t_0 in I e poi far tendere t_0 a $\pi/2$. I valori corrispondenti di u_0 e di α tendono a 1 e a $\pi/2$ rispettivamente. Pertanto l'intervallo della (11) ha primo estremo in $-\pi/2$, mentre il primo estremo di I doveva essere $\pi/2$.

Cerchiamo allora la soluzione con derivata negativa. Il discorso è perfettamente analogo, ma ora conduce a buon fine. Dobbiamo usare le (13) e (12) per determinare v e u rispettivamente. Come sopra deve essere $\gamma = 1$ e ancora abbiamo $(\pi/2, 1, \pi/2)$ come valore limite della terna (t_0, u_0, α). Ma ora l'intervallo I è quello della (12), che viene ad essere $(\pi/2, 3\pi/2)$. Inoltre, sempre dalla (12), otteniamo l'espressione di $u(t)$, precisamente $u(t) = \sin(-t + \pi/2 + \pi/2) = \sin t$ per $t \in (\pi/2, 3\pi/2)$.

Naturalmente anche questo tratto di soluzione è prolungabile oltre $3\pi/2$ e la stessa procedura di ricerca di soluzioni con derivata positiva condurrebbe a $u(t) = \sin t$ per $t \in (3\pi/2, 5\pi/2)$ mentre l'analoga relativa alla derivata negativa fallirebbe.

Esempio 8. Al contrario di quanto avveniva negli esempi precedenti, in questo compare esplicitamente la derivata prima dell'incognita. Consideriamo il problema di Cauchy

$$u''(t) = \frac{2 + 8u(t)}{1 + \bigl(u'(t)\bigr)^2} \quad \text{e} \quad u(0) = u'(0) = 0 \tag{14}$$

che è risolto dalla funzione data dalla formula $u(t) = t^2$. Ora, fingendo di non essercene accorti, ricostruiamo tale soluzione applicando il Teorema 2. L'applicazione bruta del teorema ci costringerebbe a considerare i due casi in base al segno delle soluzioni v da considerare. Siccome riteniamo che gli esempi precedenti abbiano già compiutamente illustrato la procedura, cerchiamo informazioni a priori sulla soluzione che ci consentano di abbreviare la casistica da esaminare. Studiamo dunque un poco il problema (14). La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ da considerare è data dalla formula $f(y,z) = (2+8y)/(1+z^2)$. Anche se f non è globalmente lipschitziana (la derivata rispetto a z non è limitata), il problema (14) ha una e una sola soluzione globale, che risulta di classe C^∞. Infatti f è di classe C^∞ (ovviamente) e a crescita lineare in quanto

$$|f(y,z)| \le 2 + 8|y| \le 2 + 8|(y,z)| \quad \text{per ogni } (y,z) \in \mathbb{R}^2$$

e queste due condizioni sono sufficienti per esistenza e unicità globale. Inoltre la soluzione è pari in quanto la funzione $u^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $u^*(t) = u(-t)$ risolve lo stesso problema di Cauchy. Dunque possiamo risolvere il solo problema di Cauchy in avanti.

Abbiamo $u'(0) = 0$ e $u''(0) = 2$, per cui $u'(t) > 0$ per $t > 0$ abbastanza piccolo. Per gli stessi t abbiamo allora anche $u(t) > 0$, da cui $u''(t) > 0$. Dunque si intuisce che u e, soprattutto, la sua derivata u' rimangono strettamente positive sull'intera semiretta $t > 0$. Diamo per completezza una dimostrazione rigorosa di questo fatto. Dimostriamo che $u'(t) > 0$ per ogni $t > 0$, ragionando per assurdo. Supponendo che esista un istante $t > 0$ tale che $u'(t) \le 0$, possiamo definire $t^* = \inf\{t > 0 : u'(t) \le 0\}$. Per quanto appena detto si ha $t^* > 0$. Risulta inoltre $u'(t^*) = 0$, dato che $u'(t) > 0$ per ogni $t \in (0, t^*)$ e u' è continua. Per questo stesso motivo e per il fatto che $u(0) = 0$ si ha anche $u(t) > 0$ per ogni $t \in (0, t^*)$. Allora l'equazione implica $u''(t) > 0$ per ogni $t \in (0, t^*)$, in contraddizione con il Teorema di Rolle applicato a u', il quale assicura che u'' deve avere uno zero in $(0, t^*)$.

Dunque $u'(t) > 0$ per ogni $t > 0$, da cui anche $u(t) > 0$ per ogni $t > 0$, e questo segno di u verrà sfruttato successivamente. Ora usiamo l'informazione su u' e applichiamo il Teorema 2. Dobbiamo dunque cercare le soluzioni positive dell'equazione (3), o meglio, date le condizioni di Cauchy per u, la soluzione massimale, fra le positive, che verifica la condizione di tipo Cauchy appropriata, data dal confronto fra (5) e (7). Riassumendo

$$v(y) > 0 \quad \text{e} \quad v'(y) = \frac{2+8y}{v(y)\bigl(1+v^2(y)\bigr)} \quad \text{per } 0 < y < y^*, \qquad v(0^+) = 0 \tag{15}$$

ove $y^* > 0$ è da determinare in base alla condizione di massimalità. Eliminando il denominatore nell'equazione differenziale e poi integrando, si ottiene subito che la soluzione v va cercata fra quelle verificanti (sempre per $0 < y < y^*$)

$$\frac{1}{2}\, v^2(y) + \frac{1}{4} v^4(y) = 2y + 4y^2 + \text{costante.}$$

Usando la condizione $v(0^+) = 0$ si deduce che la costante è nulla, per cui il valore $v^2(y)$ deve essere una delle soluzioni x dell'equazione

$$x^2 + 2x - (8y + 16y^2) = 0.$$

Il discriminante vale $(1+4y)^2$, per cui l'equazione di secondo grado ha due soluzioni reali, ma una sola di esse è positiva dato che $8y+16y^2>0$ in quanto $y>0$. Riutilizzando l'informazione $y>0$, abbiamo $1+4y>0$. Ricordando che $v(y)>0$ abbiamo allora

$$v^2(y) = -1 + \sqrt{(1+4y)^2} = 4y \quad \text{e} \quad v(y) = 2\sqrt{y}.$$

La condizione di massimalità implica $y^* = +\infty$ e la (4) diventa semplicemente

$$u'(t) = 2\sqrt{u(t)}, \quad \text{cioè} \quad \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = 1, \quad \text{cioè} \quad \frac{d}{dt}\sqrt{u(t)} = 1 \tag{16}$$

in quanto siamo interessati alle soluzioni strettamente positive. Otteniamo allora

$$\sqrt{u(t)} = t + \text{costante}$$

e la costante è nulla dato che deve essere $u(0^+)=0$. In definitiva $u(t)=t^2$.

Va notato che abbiamo sfruttato pesantemente l'informazione a priori $u(t)>0$ per ogni $t>0$. Infatti l'equazione differenziale che compare come prima delle (16) ha infinite soluzioni (non negative, altrimenti l'equazione è insensata, una sola strettamente positiva, come si è visto) che verificano anche la condizione iniziale $u(0^+)=0$. Tutte le soluzioni sono contenute nella formula $u(t)=((t-a)^+)^2$ al variare di $a \geq 0$, formula che mostra il verificarsi del fenomeno di Peano. Questo è dovuto al fatto che il valore iniziale di u è proprio 0 e la radice non è una funzione lipschitziana in alcun intorno (destro) di 0.

Esempio 9. Concludiamo con il problema di Cauchy in avanti

$$u''(t) = u(t)\,u'(t), \qquad u(0) = u_0 \quad \text{e} \quad u'(0) = u_1. \tag{17}$$

Questo è facile se lo si studia un attimo a priori. Se $u_1 = 0$ allora la funzione costante $t \mapsto u_0$ risolve il problema ed è l'unica soluzione. Più in generale, se u è una soluzione la cui derivata si annulla in un certo punto t_0, allora la funzione costante $t \mapsto u(t_0)$ risolve l'equazione. Inoltre in t_0 le due funzioni u e v assumono lo stesso valore ed hanno entrambe derivata nulla. Dunque $u=v$ nel dominio di u e u è costante. Pertanto, se $u_1 \neq 0$, la soluzione u di (17) ha derivata mai nulla e l'applicazione del Teorema 2 diventa particolarmente agevole. Essendo nel caso in esame $f(y,z)=yz$, l'equazione (3) si riduce a $v'(y)=y$ e le sue soluzioni sono contenute nella formula $v(y)=(1/2)y^2+\text{costante}$. Da $v(u_0)=u_1$ (vedi (7)) deduciamo poi il valore della costante e vediamo che la (4) diventa

$$u'(t) = \frac{1}{2}\,u^2(t) - \frac{1}{2}\,u_0^2 + u_1\,. \tag{18}$$

Dobbiamo trovare la soluzione massimale del problema di Cauchy $u(0)=u_0$ per la (18), che possiamo scrivere in ogni caso nella forma

$$\frac{u'(t)}{\frac{1}{2}\,u^2(t) - \frac{1}{2}\,u_0^2 + u_1} = 1 \tag{19}$$

per ogni t del dominio di u, dato che, per tali t, il denominatore della (19), cioè il secondo membro della (18), dovendo essere uguale a $u'(t)$, non si annulla. Abbiamo pertanto

$$t = \int_0^t \frac{u'(s)}{\frac{1}{2}\,u^2(s) - \frac{1}{2}\,u_0^2 + u_1}\,ds = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dy}{\frac{1}{2}\,y^2 - \frac{1}{2}\,u_0^2 + u_1} \quad \text{per ogni } t \in \operatorname{dom} u \tag{20}$$

ed è chiaro che, nello sviluppo dei calcoli, occorre distinguere i casi seguenti: la quantità $-(1/2)u_0^2 + u_1$ è nulla, positiva, negativa.

Caso $-(1/2)u_0^2 + u_1 = 0$. Allora $u_0 \neq 0$ in quanto stiamo supponendo $u_1 \neq 0$ e $u(t)$ ha il segno di u_0 per $t \in \operatorname{dom} u$ in quanto il denominatore della (19), di conseguenza $u(t)$ in questo caso, non è mai nullo. Abbiamo pertanto

$$t = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{2dy}{y^2} = \frac{2}{u_0} - \frac{2}{u(t)} \quad \text{da cui} \quad u(t) = \frac{2u_0}{2 - tu_0} \tag{21}$$

e occorre distinguere due casi. Se $u_0 < 0$, la formula trovata prende senso per ogni $t \geq 0$ e fornisce la soluzione globale del problema. Se invece $u_0 > 0$, la formula ha sicuramente senso per $0 \leq t < 2/u_0$ e in tale intervallo la funzione u così definita risolve l'equazione mentre $u(t)$ diverge in $2/u_0$. Dunque la soluzione massimale cercata non è globale ed è data appunto dalla (21).

Caso $-(1/2)u_0^2 + u_1 > 0$. Allora possiamo porre per comodità $\alpha = (2u_1 - u_0^2)^{1/2}$ e la (20), con la successiva sostituzione $y = \alpha x$, diventa

$$t = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{2dy}{y^2 + \alpha^2} = \frac{2}{\alpha} \int_{u_0/\alpha}^{u(t)/\alpha} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{2}{\alpha}\Big(\arctan\frac{u(t)}{\alpha} - \arctan\frac{u_0}{\alpha}\Big).$$

Pertanto

$$\arctan\frac{u(t)}{\alpha} = \frac{\alpha t}{2} + \arctan\frac{u_0}{\alpha} \quad \text{per } t \in \operatorname{dom} u$$

per cui il dominio di u, dato che u è la soluzione massimale, è l'intervallo costituito dai $t \geq 0$ tali che il secondo membro della formula trovata appartenga all'immagine dell'arcotangente, cioè a $(-\pi/2, \pi/2)$. Osservando che $|\arctan(u_0/\alpha)| < \pi/2$ e risolvendo poi rispetto a $u(t)$, troviamo

$$u(t) = \alpha\tan\Big(\frac{\alpha t}{2} + \arctan\frac{u_0}{\alpha}\Big) \quad \text{per} \quad 0 \leq t < \frac{2}{\alpha}\Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{u_0}{\alpha}\Big)$$

ove, lo ricordiamo, $\alpha = (2u_1 - u_0^2)^{1/2}$, e la soluzione non è globale.

Caso $-(1/2)u_0^2 + u_1 < 0$. Allora $u_0^2 - 2u_1 > 0$ e possiamo porre $\alpha = (u_0^2 - 2u_1)^{1/2}$. La procedura di risoluzione effettiva è analoga a quella del caso precedente, ma ora occorre fare più attenzione. Essendo $u_1 \neq 0$ abbiamo $\alpha \neq |u_0|$ e si presentano vari casi, che vanno distinti nel calcolo. Se $u_1 < 0$ allora $|u_0| < \alpha$ e deve allora essere $|u(t)| < \alpha$ per ogni $t \in \operatorname{dom} u$ perché il denominatore della funzione integranda effettivamente non si annulli in alcun punto dell'intervallo di integrazione che occorre considerare. Osservato che sia u_0/α sia $u(t)/\alpha$ appartengono a $(-1,1)$ per quanto detto sopra e che vale la formula

$$\frac{d}{dx}\,\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{per } x \in (-1,1)$$

vediamo allora, con calcoli del tutto simili ai precedenti, che la (20) ora fornisce

$$t = \frac{2}{\alpha} \int_{u_0/\alpha}^{u(t)/\alpha} \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{2}{\alpha} \int_{u_0/\alpha}^{u(t)/\alpha} \frac{d}{dx} \tanh^{-1}(x)\, dx = \frac{2}{\alpha}\Bigl(\tanh^{-1} \frac{u_0}{\alpha} - \tanh^{-1} \frac{u(t)}{\alpha}\Bigr).$$

Pertanto

$$\tanh^{-1} \frac{u(t)}{\alpha} = \tanh^{-1} \frac{u_0}{\alpha} - \frac{\alpha t}{2} \quad \text{per } t \in \operatorname{dom} u\,.$$

Siccome il dominio di $\tanh$ è tutto $\mathbb{R}$, possiamo comunque invertire e ottenere

$$u(t) = \alpha \tanh\Bigl(\tanh^{-1} \frac{u_0}{\alpha} - \frac{\alpha t}{2}\Bigr) \quad \text{per } t \geq 0$$

ove, lo ricordiamo, $\alpha = (u_0^2 - 2u_1)^{1/2}$ e $u_1 < 0$. In tal caso, dunque, la soluzione è globale. Se invece $u_1 > 0$, allora $|u_0| > \alpha$ e la condizione di non annullamento del denominatore da imporre comporta che $|u(t)| > \alpha$ e che $u(t)$ abbia lo stesso segno di u_0 per ogni $t \in \operatorname{dom} u$. Dunque $u(t) > \alpha$ se $u_0 > 0$ e $u(t) < -\alpha$ se $u_0 < 0$. Fatta questa precisazione, non vi sono, almeno in un primo momento, altri motivi per distinguere i due casi nel calcolo, nel quale dobbiamo comunque usare la formula (per $x > 1$ e $x < -1$ nei due casi)

$$\frac{d}{dx} \coth^{-1}(x) = \frac{1}{1-x^2} \quad \text{per } |x| > 1$$

ove coth è la funzione, effettivamente invertibile, data da $\coth z = \cosh z / \sinh z$ per $z \neq 0$. Procedendo come prima, con questa sola variante, abbiamo

$$t = \frac{2}{\alpha} \int_{u_0/\alpha}^{u(t)/\alpha} \frac{dx}{x^2-1} = -\frac{2}{\alpha} \int_{u_0/\alpha}^{u(t)/\alpha} \frac{d}{dx} \coth^{-1}(x)\, dx = \frac{2}{\alpha}\Bigl(\coth^{-1} \frac{u_0}{\alpha} - \coth^{-1} \frac{u(t)}{\alpha}\Bigr).$$

Pertanto

$$\coth^{-1} \frac{u(t)}{\alpha} = \coth^{-1} \frac{u_0}{\alpha} - \frac{\alpha t}{2} \quad \text{per } t \in \operatorname{dom} u\,.$$

Per l'inversione, invece, occorre distinguere i due casi $u_0 > 0$ e $u_0 < 0$ in quanto il dominio di coth è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ anziché tutto $\mathbb{R}$. Precisamente, $\operatorname{dom} u$ è l'intervallo $[0, t_*)$ ove t_* è l'estremo superiore dell'insieme costituito dai $t' > 0$ tali che ogni $t \in (0, t')$ renda non nullo il secondo membro della formula trovata. Abbiamo pertanto $\operatorname{dom} u = [0, t_*)$ con

$$t_* = +\infty \quad \text{se } u_0 < 0 \quad \text{e} \quad t_* = \frac{2}{\alpha} \coth^{-1} \frac{u_0}{\alpha} \quad \text{se } u_0 > 0\,.$$

Solo nel primo caso, dunque, la soluzione è globale. Poi il valore $u(t)$ è dato comunque da

$$u(t) = \alpha \coth\Bigl(\coth^{-1} \frac{u_0}{\alpha} - \frac{\alpha t}{2}\Bigr) \quad \text{per } t \in [0, t_*)\,.$$

Anche in questo caso ricordiamo notazione e ipotesi: $\alpha = (u_0^2 - 2u_1)^{1/2}$, $u_0 > 0$ e $u_1 > 0$.

Notiamo che, nel caso $-(1/2)u_0^2 + u_1 < 0$, i calcoli sarebbero stati guidati meglio da uno studio a priori delle soluzioni dell'equazione (18) che, con la notazione introdotta, assume la forma $u'(t) = (1/2)\bigl(u^2(t) - \alpha^2\bigr)$. Questa ha $u(t) = \pm\alpha$ come soluzioni particolari, che corrispondono ai dati $u_0 = \pm\alpha$ rispettivamente. Nel problema di Cauchy che eravamo interessati a risolvere, invece, si ha $u_0 \neq \pm\alpha$ e lo studio delle soluzioni in funzione del segno della derivata è piuttosto agevole. Questo studio, inoltre, permette di prevedere la soluzione globale quando questa c'è (e anche il suo comportamento asintotico) e di subodorare la non esistenza della soluzione globale quando questa effettivamente non c'è.