Domande di Analisi A del 12 febbraio 2009*

1. Costruire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile in ogni intero e discontinua altrove.

2. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitata in $[0,1]$ e integrabile in $[\delta, 1]$ per ogni $\delta \in (0,1)$. Dimostrare che f è integrabile in $[0,1]$.

3. Costruire $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ non negativa, integrabile con integrale nullo e discontinua in ogni $x \in [0,1]$ razionale.

4. Sia $a_n \geq 0$ per $n \in \mathbb{N}$ e si supponga convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Si denoti con S la somma. Si dimostri che anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge e che la sua somma è $\leq S^2$.

5. Siano $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e $f = \nabla g$. Si dimostri che in ogni punto di $\mathbb{R}^3$ il rotore di f esiste ed è nullo.

6. Calcolare $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^{2009} e^{-t}\, dt$.

7. Dimostrare che le due serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

sono, rispettivamente, divergente e convergente.

8. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ infinitesima all'infinito e monotona. Si considerino l'integrale e il limite

$$\int_0^x f(t) \sin t\, dt \quad \text{per } x > 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t) \sin t\, dt.$$

Si dimostri che l'integrale esiste per ogni $x > 0$ e che il limite esiste finito.

9. Sia $\{x_n\}_{n \geq 1}$ una successione iniettiva avente come immagine l'insieme dei punti razionali di $[0,1]$ e si definisca $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante le formule

$$f(x) = 0 \quad \text{se } x \text{ è irrazionale} \qquad \text{e} \qquad f(x_n) = \frac{1}{n} \quad \text{per } n = 1, 2, \ldots.$$

Si dimostri che, per ogni $x \in [0,1]$, la funzione f è continua in x se x è irrazionale e ha in x una discontinuità eliminabile se x è razionale.

---

* per sedicenti Gauss cagionevoli di salute: nessuno era Gauss.