Cenni sul principio di massimo

Lemma 1. *Se* $M^t = M^{-1}$ *allora* $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(M^t A M)$. $\square$

Dimostrazione. Si ha subito

$$\operatorname{tr}(M^t A M) = \sum_{ijk} m^t_{ij} a_{jk} m_{ki} = \sum_{jk} a_{jk} \sum_i m_{ki} m^t_{ij} =$$
$$\sum_{jk} a_{jk} \delta_{kj} = \sum_j a_{jj} = \operatorname{tr} A. \ \square$$

Lemma 2. *Siano* A *e* B *semidefinite positive con* B *simmetrica. Allora* $\operatorname{tr}(AB) \ge 0$. $\square$

Dimostrazione. Siano M ortogonale e $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tali che $B = M^t D M$. Allora $\lambda_i \ge 0$ per ogni i e

$$AB = M^t M A M^t D M \qquad \text{da cui} \qquad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(M A M^t D).$$

Posto $C = MAM^t$, anche C è semidefinita positiva. In particolare $c_{ii} \ge 0$ $\forall i$. Dunque

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(CD) = \sum_{ij} c_{ij}(\lambda_i \delta_{ji}) = \sum_i \lambda_i c_{ii} \ge 0. \ \square$$

Principio di massimo classico. *Posto*

$$Lu = -\sum_{ij} a_{ij} D_{ij} u + \sum_i \beta_i D_i u + \gamma u \tag{1}$$

si supponga che (a_{ij}) *sia uniformemente ellittica con costante di ellitticità* α *e che tutti i coefficienti* a_{ij} , β_i *e* γ *siano continui. Sia* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *tale che*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega \\ \ \ u = g & \text{su } \Gamma \end{cases} \tag{2}$$

ove f *e* g *sono continue. Se*

$$f \ge 0 \ \text{ in } \Omega, \quad g \ge 0 \ \text{ su } \Gamma \quad \text{e} \quad \gamma \ge 0 \ \text{ in } \Omega, \tag{3}$$

allora $u \ge 0$ *in* Ω . $\square$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima $f > 0$ in Ω e sia $\mathbf{x}_0 \in \overline{\Omega}$ un punto di minimo di u : dobbiamo dimostrare che $u(\mathbf{x}_0) \ge 0$.

Se $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$, allora $u(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0) \ge 0$. Se invece $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, allora $\nabla u(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ e l'hessiano $Hu(\mathbf{x}_0)$ di u in $\mathbf{x}_0$ è semidefinito positivo. Per il Lemma 2 segue allora

$$\sum_{ij} a_{ij}(\mathbf{x}_0) D_{ij} u(\mathbf{x}_0) = \operatorname{tr}\Big(A(\mathbf{x}_0) Hu(\mathbf{x}_0)\Big) \ge 0,$$

da cui

$$0 < f(\mathbf{x}_0) = -\sum_{ij} a_{ij}(\mathbf{x}_0) D_{ij} u(\mathbf{x}_0) + \sum_i \beta_i(\mathbf{x}_0) D_i u(\mathbf{x}_0) + \gamma(\mathbf{x}_0) u(\mathbf{x}_0) \le \gamma(\mathbf{x}_0) u(\mathbf{x}_0).$$

Dunque $\gamma(\mathbf{x}_0)u(\mathbf{x}_0) > 0$. Segue $\gamma(\mathbf{x}_0) \neq 0$, cioè $\gamma(\mathbf{x}_0) > 0$, e quindi $u(\mathbf{x}_0) > 0$.

Supponiamo ora solo $f \ge 0$, come è nell'ipotesi. Per $\lambda > 0$, da scegliere opportunamente in seguito, poniamo

$$w(\mathbf{x}) = 1 - e^{-\lambda(x_1 - \tilde{x}_1)}$$

ove $\tilde{x}_1$ è scelto in modo che $x_1 > \tilde{x}_1$ in Ω , così che $w > 0$. Si ha:

$$Lw(\mathbf{x}) = e^{-\lambda(x_1 - \tilde{x}_1)} \big(a_{11}(\mathbf{x})\lambda^2 + \beta_1(\mathbf{x})\lambda \big) + \gamma(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) \ge$$
$$e^{-\lambda(x_1 - \tilde{x}_1)} \big(a_{11}(\mathbf{x})\lambda^2 + \beta_1(\mathbf{x})\lambda \big) \ge e^{-\lambda(x_1 - \tilde{x}_1)} \lambda(\alpha\lambda - \|\beta_1\|_{L^\infty})$$

in quanto $a_{11} = \mathbf{e}_1^t A \mathbf{e}_1 \ge \alpha |\mathbf{e}_1|^2 = \alpha$. Scegliamo allora $\lambda > 0$ in modo che l'ultimo membro sia > 0 , ad esempio $\lambda = 2\|\beta_1\|_{L^\infty}/\alpha$. Per $\varepsilon > 0$ si ha allora

$$L(u + \varepsilon w) > 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{e} \quad u + \varepsilon w > 0 \quad \text{su } \Gamma$$

e la prima parte implica $u + \varepsilon w \ge 0$ in Ω . Prendendo il limite per $\varepsilon \to 0^+$, deduciamo allora $u \ge 0$ in Ω . $\square$

Osservazioni. Sempre nell'ipotesi $\gamma \ge 0$, supponiamo che, con una certa costante M' , siano soddisfatte le disuguaglianze $g \ge M'$ e $g \ge M'\gamma$. Allora, applicando il Principio di massimo a $u - M'$, deduciamo che $u - M' \ge 0$. Ragionando analogamente su $M'' - u$, otteniamo una disuguaglianza analoga, che riuniamo alla precedente nell'implicazione:

$$\text{(4)} \qquad \text{se} \quad M' \le g \le M'' \quad \text{e} \quad M'\gamma \le f \le M''\gamma, \qquad \text{allora} \qquad M' \le u \le M''.$$

In particolare, se $\gamma = 0$, possiamo prendere $M' = \min g$ e, rispettivamente, $M'' = \max g$ separatamente nel discorso precedente. Otteniamo le due proprietà seguenti:

$$\text{(5)} \qquad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\Gamma} u \quad \text{se } f \ge 0 \qquad \text{e} \qquad \max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\Gamma} u \quad \text{se } f \le 0.$$

Sono queste le formulazioni che più spesso vengono dette "Principio di massimo" e, più precisamente, "Principio di massimo debole", dato che si riserva il nome di "Principio di massimo forte" a enunciati che escludono punti di massimo stretto interni a Ω . $\square$

Veniamo al Principio di massimo variazionale, che si riferisce al caso in cui l'operatore L è scritto in forma di divergenza, cioè come $Lu = -\operatorname{div}(\ldots) + \ldots$, senza che le derivate seconde compaiano esplicitamente. Poniamo come d'abitudine

$$\text{(6)} \qquad a(u,v) = \int_\Omega \Big((A\nabla u) \cdot \nabla v + (\mathbf{b} \cdot \nabla u) v + \mathbf{c} u \cdot \nabla v + duv \Big), \qquad u, v \in H^1(\Omega),$$

supponendo i coefficienti in L^∞ e A uniformemente ellittica. L'equazione che consideriamo è ancora l'equazione $Lu = f$, ma scritta nel modo seguente

$$a(u,v) = \int_\Omega fv \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{7}$$

Nel caso in cui i coefficienti siano regolari, tale equazione si scrive ancora nella forma precedente (cioè non in forma di divergenza) con la stessa matrice A, certi coefficienti β_i e con $\gamma = d - \operatorname{div} \mathbf{c}$ e l'ipotesi del Principio di massimo classico diventa

$$d - \operatorname{div} \mathbf{c} \geq 0. \tag{8}$$

Allora è plausibile per l'equazione variazionale (7) un enunciato nel quale l'ipotesi sul segno dei coefficienti sia la (8). Occorre però dare senso alla (8) anche quando $\mathbf{c}$ non è regolare.

Definizione. *Siano $d \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $\mathbf{c} \in (L^1_{\text{loc}}(\Omega))^n$. Diciamo che vale la (8) quando*

$$\int_\Omega (dv + \mathbf{c} \cdot \nabla v)\, dx \geq 0$$

per tutte le $v \in C_0^\infty(\Omega)$ non negative. $\square$

Si riconosce facilmente che, se $\operatorname{div} \mathbf{c} \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, la condizione data dalla definizione precedente equivale alla (8) intesa q.o. in Ω.

Vale allora il seguente

Principio di massimo variazionale. *Sia Ω un aperto limitato e lipschitziano. Con la notazione (6), supponiamo che i coefficienti siano in L^∞, che A sia uniformemente ellittica e che valga la (8). Se $u \in H^1(\Omega)$ verifica*

$$a(u,v) \geq 0 \qquad \text{per ogni } v \in H_0^1(\Omega) \text{ non negativa} \tag{9}$$

e se u è non negativa su Γ, allora $u \geq 0$ in Ω. $\square$

Non dimostriamo questo risultato nella sua generalità e vediamo una generalizzazione di una situazione in qualche modo vicina a quella dell'enunciato.

Supponiamo per un momento che valga anche la condizione

$$\operatorname{div}(\mathbf{b} - \mathbf{c}) \leq 0 \tag{10}$$

nel senso della definizione precedente. Allora la forma (6) è H_0^1- ellittica. Per $v \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha infatti:

$$a(v,v) = \int_\Omega (A\nabla v) \cdot \nabla v + \int_\Omega (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot v \nabla v + \int_\Omega 2\mathbf{c} v \cdot \nabla v + \int_\Omega dv^2 =$$
$$\int_\Omega (A\nabla v) \cdot \nabla v + \frac{1}{2} \int_\Omega (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot \nabla(v^2) + \int_\Omega \bigl(\mathbf{c} \cdot \nabla(v^2) + dv^2\bigr).$$

Se dunque valgono le (8) e (10) e se α è la costante di ellitticità di A, risulta

$$a(v,v) \geq \alpha \int_\Omega |\nabla v|^2 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Ricordando la densità di C_0^∞ in H_0^1 e la disuguaglianza di Poincaré, segue la tesi.

Una dimostrazione facile (formale). Se a è H_0^1- ellittica, dalle ipotesi del Principio di massimo variazionale abbiamo formalmente $u^- \in H_0^1$ dato che $u \geq 0$ su Γ. Allora

$$0 \leq a(u, u^-) = a(u^+, u^-) - a(u^-, u^-) = -a(u^-, u^-) \leq -\alpha \int_\Omega |\nabla u^-|^2.$$

Siccome l'ultimo integrale è il quadrato di una norma in H_0^1, deduciamo $u^- = 0$ e dunque $u \geq 0$. $\square$

Generalizziamo allora questo risultato nel seguente

Teorema. *Siano* V *un sottospazio chiuso di* $H^1(\Omega)$, $V^+ = \{v \in V : \ v \geq 0\}$ *e* a *una forma bilineare e continua su* $H^1(\Omega)$, $V-$ *ellittica e tale che* $a(v^+, v^-) = 0$ *per ogni* $v \in H^1(\Omega)$. *Se*

$$u \in H^1(\Omega), \qquad u^- \in V \qquad e \qquad a(u, v) \geq 0 \quad \forall v \in V^+, \tag{11}$$

allora $u \geq 0$ *in* Ω. $\square$

La dimostrazione è immediata e identica alla precedente:

$$0 \leq a(u, u^-) = a(u^+, u^-) - a(u^-, u^-) = -a(u^-, u^-) \leq -\alpha \, \|u^-\|^2$$

da cui $u^- = 0$ e $u \geq 0$. $\square$

Ma l'enunciato stesso del teorema e la "dimostrazione facile" precedente necessitano di alcune precisazioni: dobbiamo dimostrare che, se $u \in H^1$, allora $u^\pm \in H^1$ e che $a(u^+, u^-) = 0$ se a è data dalla (6); dobbiamo inoltre studiare i legami fra le affermazioni "$u \geq 0$ su Γ" e "$u^- \in H_0^1$". Questi controlli sono l'oggetto dei risultati che seguono.

Proposizione 1. *Se* $u \in H^1$ *allora* $u^\pm \in H^1$ *e risulta*

$$\nabla u^+ = \chi_{\{u>0\}} \nabla u \quad e \quad \nabla u^- = -\chi_{\{u<0\}} \nabla u. \ \square$$

Dimostrazione. Sia $\Phi_\varepsilon \in C^1(\mathbf{R})$ una approssimazione di $(\ )^+$ nelle condizioni seguenti:

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(t) = 0 \quad \forall t \leq 0, \qquad & 0 \leq \Phi'_\varepsilon(t) \leq 1 \quad \forall t, \\ |\Phi_\varepsilon(t) - t| \leq \varepsilon \quad \forall t > 0, \qquad & \lim_{\varepsilon \to 0} \Phi'_\varepsilon(t) = 1 \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Considerando solo la prima tesi, per ogni $\mathbf{v} \in (C_0^\infty(\Omega))^n$ si ha

$$\begin{gathered} -\int_\Omega u^+ \operatorname{div} \mathbf{v} = \\ -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \Phi_\varepsilon(u) \operatorname{div} \mathbf{v} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \nabla(\Phi_\varepsilon(u)) \cdot \mathbf{v} = \\ \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \Phi'_\varepsilon(u) \nabla u \cdot \mathbf{v} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{u>0\}} \Phi'_\varepsilon(u) \nabla u \cdot \mathbf{v} = \\ \int_{\{u>0\}} \nabla u \cdot \mathbf{v} = \int_\Omega \chi_{\{u>0\}} \nabla u \cdot \mathbf{v}. \ \square \end{gathered}$$

Corollario. *Se* $u \in H^1(\Omega)$ *allora le funzioni*

$$\nabla u^+ \cdot \nabla u^-, \quad u^- \nabla u^+, \quad u^+ \nabla u^- \quad e \quad u^+ u^-$$

sono nulle quasi ovunque. In particolare $a(u^+, u^-) = 0$ *se* a *è data dalla* (6). $\square$

Lemma 3. *Sia* Ω *limitato e lipschitziano. Se* $u \in H^1(\Omega)$ *allora* $u^\pm|_\Gamma = \bigl(u|_\Gamma\bigr)^\pm$. $\square$

Dimostrazione. Siano $u_k \in C^1(\overline{\Omega})$ tali che $u_k \to u$ in H^1 . Siccome $\|u_k^\pm\|_{H^1} \le \|u_k\|_{H^1}$ per la Proposizione 1, segue che le successioni $\{u_k^\pm\}$ sono limitate in H^1 . Siccome esse convergono fortemente il L^2 a $u^\pm$, deduciamo facilmente che esse convergono agli stessi limiti debolmente in H^1 . Valgono allora i fatti seguenti:

$$\begin{aligned} u_k^\pm|_\Gamma &\rightharpoonup u^\pm|_\Gamma \quad \text{in} \quad L^2(\Gamma) \\ \bigl(u_k|_\Gamma\bigr)^\pm &\rightharpoonup \bigl(u^\pm|_\Gamma\bigr)^\pm \quad \text{in} \quad L^2(\Gamma) \quad (\text{in quanto} \;\; u_k|_\Gamma \to u|_\Gamma \;\; \text{in} \;\; L^2(\Gamma)). \end{aligned}$$

Essendo $u_k^\pm|_\Gamma = \bigl(u_k|_\Gamma\bigr)^\pm \;\; \forall k$, la tesi segue. $\square$

Proposizione 2. *Sia* Ω *limitato e lipschitziano e sia* $u \in H^1(\Omega)$. *Allora* $u^- \in H^1_0(\Omega)$ *se e solo se* $u|_\Gamma \ge 0$. $\square$

Dimostrazione. Si ha $u^- \in H^1_0$ se e solo se $u^-|_\Gamma = 0$, cioè se e solo se $\bigl(u|_\Gamma\bigr)^- = 0$, cioè se e solo se $u|_\Gamma \ge 0$. $\square$

Osservazioni. Il Principio di massimo ha conseguenze importanti. Considerando ad esempio il Principio di massimo classico e supponendo $\gamma \ge 0$, abbiamo visto in particolare che valgono le (4). Prendendo $M' = M'' = 0$ otteniamo immediatamente *l'unicità* della soluzione classica del problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione omogenea, dunque l'unicità anche per i corrispondenti problemi non omogenei. Le stesse conclusioni si hanno nel caso del Principio di massimo variazionale: nell'ipotesi (8) si ha l'unicità della soluzione in H^1 per il problema di Dirichlet, anche se la forma a non è necessariamente H^1_0-ellittica.

Ragionando analogamente sulla differenza di due soluzioni con lo stesso dato f e dati g diversi, si conclude un risultato di *dipendenza continua*: se i dati al bordo variano di poco nella norma del massimo, la stessa conclusione si ha per le soluzioni.

Allo stesso modo, considerando due coppie dati f_1, g_1 e f_2, g_2 tali che $f_1 \le f_2$ e $g_1 \le g_2$ e ragionando sulla differenza delle soluzioni corrispondenti u_1 e u_2 , si deduce $u_1 \le u_2$. Vale dunque un risultato di *dipendenza monotona* della soluzioni dai dati.

Ritornando all'unicità, occorre osservare che questa ha riflessi anche sul problema dell'esistenza. Infatti, se Ω limitato e lipschitziano, se la matrice A della forma bilineare (6) è uniformemente ellittica e se i coefficienti sono in L^∞ , allora vale l'alternativa di Fredholm, per cui un risultato di unicità ne implica uno di esistenza e di dipendenza continua della soluzione dai dati.