Parma, 23 aprile 2002

Studio di un modello di tipo Penrose–Fife per le transizioni di fase

---

Gianni Gilardi

Dipartimento di Matematica "F. Casorati"
Università degli Studi di Pavia
Via Ferrata 1, 27100 Pavia

Tel:	0382 50 56 42
Fax:	0382 50 56 02
E-mail:	*gilardi@dimat.unipv.it*
Home page:	*http://dimat.unipv.it/~gilardi/*

1 —— Antefatto (equazione del calore)

È l'equazione parabolica (prototipo)

$$\begin{aligned}
&\partial_t \vartheta - \Delta\vartheta = f \\
&\vartheta(x,t) = \text{temperatura relativa} \\
&f(x,t) = \text{sorgente nota} \\
&x \in \Omega \ (\text{aperto di } \mathbb{R}^3), \quad t \in (0,T)
\end{aligned}$$

Essa deriva dalle leggi

$$\begin{array}{ll}
\partial_t e + \operatorname{div} \mathbf{q} = f & \text{bilancio energetico} \\
 & (e = \text{energia interna}) \\
 & (\mathbf{q} = \text{flusso di calore}) \\
e = \vartheta & \text{legge costitutiva per } e \\
\mathbf{q} = -\nabla\vartheta & \text{legge costitutiva per } \mathbf{q} \\
 & (\textit{legge di Fourier})
\end{array}$$

il tutto a meno di costanti di proporzionalità.

Formulazione classica

$$\begin{aligned}
&\Omega = \Omega_{\text{liquido}} \cup \Omega_{\text{solido}} \cup \Gamma_{\text{libera}} \\
&\vartheta > 0 \;\; \text{e} \;\; \text{eq.ne calore in } \Omega_{\text{liquido}} \\
&\vartheta < 0 \;\; \text{e} \;\; \text{eq.ne calore in } \Omega_{\text{solido}} \\
&\vartheta = 0 \;\; \text{e} \;\; \text{condizione di Stefan su } \Gamma_{\text{libera}}
\end{aligned}$$

Gli aperti incogniti Ω_{liquido} e Ω_{solido} dipendono da t e Γ_{libera} (frontiera libera) è la superficie che li separa.

La condizione di Stefan è un legame fra il calore latente di fusione λ, la velocità di Γ_{libera} e il salto della componente normale $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$.

Uso del parametro di fase

$$\begin{aligned}
&\partial_t e + \operatorname{div} \mathbf{q} = f && \text{in tutto } \Omega \\
&e = \vartheta + \lambda \chi && \text{legge costitutiva} \\
&\mathbf{q} = -\nabla \vartheta && \text{legge di Fourier} \\
&\chi = 0 && \text{ove } \vartheta < 0 \\
&\chi = 1 && \text{ove } \vartheta > 0
\end{aligned}$$

Si ottiene un problema “equivalente”.

Formulazioni generalizzate

$$\begin{aligned} &\partial_t e + \operatorname{div} \mathbf{q} = f \\ &e = \vartheta + \lambda\chi \\ &\mathbf{q} = -\nabla\vartheta \\ &\chi \in \mathcal{H}(\vartheta) \end{aligned}$$

ove $\mathcal{H} : \mathrm{I\!R} \to 2^{\mathrm{I\!R}}$ (grafo di Heaviside) è

$$\mathcal{H}(\vartheta) = \begin{cases} 0 & \text{se } \vartheta < 0 \\ 1 & \text{se } \vartheta > 0 \\ [0,1] & \text{se } \vartheta = 0 \end{cases}$$

Osservato che $\mathcal{H}(\lambda\vartheta) = \mathcal{H}(\vartheta)$, riformuliamo:

$$\begin{aligned} &\partial_t e + \operatorname{div} \mathbf{q} = f \\ &e = \vartheta + \lambda\chi \\ &\mathbf{q} = -\nabla\vartheta \\ &\beta(\chi) \ni \lambda\vartheta \end{aligned}$$

ove $\beta = \mathcal{H}^{-1} : \mathrm{I\!R} \to 2^{\mathrm{I\!R}}$ è il grafo inverso, cioè

$$\beta(\chi) = \begin{cases} (-\infty, 0] & \text{se } \chi = 0 \\ [0, +\infty) & \text{se } \chi = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < \chi < 1 \\ \emptyset & \text{se } \chi \notin [0,1] \end{cases}$$

Sostituzione

frontiera libera netta

$$\downarrow$$

zona sottile di transizione

che separa le zone corpose $\{\chi \approx 0\}$ e $\{\chi \approx 1\}$

Panoramica nel libro

A. Visintin: *Models of phase transitions*, 1996

Caginalp ARMA 1986

Problemi del tipo

$$
\begin{aligned}
&\partial_t e + \operatorname{div} \mathbf{q} = f \\
&e = \vartheta + \lambda \chi \\
&\mathbf{q} = -\nabla \vartheta \\
&\mu \partial_t \chi - \nu \Delta \chi + \mathcal{W}'(\chi) = \lambda \vartheta \\
&\qquad \text{(dinamica di fase)}
\end{aligned}
$$

ove $\mathcal{W}$ è un *doppio pozzo*, ad esempio

$$\mathcal{W}(\chi) = \chi^2 (1 - \chi)^2.$$

La dinamica di fase è legata al funzionale

$$\mathcal{F}_\vartheta(\chi) = \frac{\nu}{2} \int_\Omega |\nabla \chi|^2 + \int_\Omega \Big(\mathcal{W}(\chi) - \lambda \vartheta \chi \Big)$$

(equazione di Eulero = dinamica stazionaria)

L'ultimo integrando è ancora un doppio pozzo, ma con valori minimi locali che dipendono da ϑ.

Il minimo privilegiato dipende dal segno di ϑ.

Sostituiamo il problema di Stefan

$$\begin{aligned} &\partial_t e + \operatorname{div} \mathbf{q} = f \\ &e = \vartheta + \lambda \chi \\ &\mathbf{q} = -\nabla \vartheta \\ &\beta(\chi) \ni \lambda \vartheta \end{aligned}$$

con quest'altro (Stefan rilassato)

$$\begin{aligned} &\partial_t e + \operatorname{div} \mathbf{q} = f \\ &e = \vartheta + \lambda \chi \\ &\mathbf{q} = -\nabla \vartheta \\ &\mu \partial_t \chi - \nu \Delta \chi + \beta(\chi) \ni \lambda \vartheta \end{aligned}$$

ove $\mu, \nu > 0$ sono parametri piccoli e $\beta = \mathcal{H}^{-1}$.

Torniamo a Caginalp:

$$\mathcal{W}'(\chi) = \beta(\chi) + \sigma'(\chi)$$

ove β non decrescente con $\beta(0) = 0$ e σ' lipschitziana.

La dinamica di fase si riscrive

$$\mu \partial_t \chi - \nu \Delta \chi + \beta(\chi) + \sigma'(\chi) = \lambda \vartheta$$

Unifichiamo Caginalp e Stefan rilassato in

$$\begin{aligned}
&\partial_t e + \operatorname{div} \mathbf{q} = f \\
&e = \vartheta + \lambda \chi \\
&\mathbf{q} = -\nabla \vartheta \\
&\mu \partial_t \chi - \nu \Delta \chi + \beta(\chi) + \sigma'(\chi) \ni \lambda \vartheta
\end{aligned}$$

condizioni iniziali e al contorno

- $\beta : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ è un “oggetto monotono” (v. dopo) con $\beta(0) \ni 0$
- $\sigma' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è lipschitziana

---

bibliografia vasta (v. libro di Visintin)

sviluppi in varie direzioni
- modelli con memoria
- dinamica di fase del quarto ordine
- analisi asintotiche

con vari contributi pavesi

Operatori monotoni

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona (non decr.) se e solo se per ogni $u, v \in \mathbb{R}$ risulta

$$(\xi - \eta)(u - v) \geq 0 \quad \text{ove } \ \xi = f(u), \quad \eta = f(v)$$

Se f è multivoca, cioè $f : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$, si modifica la definizione scrivendo

$$(\xi - \eta)(u - v) \geq 0 \quad \forall \xi \in f(u) \ \ \forall \eta \in f(v)$$

Se H è uno spazio di Hilbert e $f : H \to 2^H$ si usa il prodotto scalare anziché il prodotto di numeri reali

$$(\xi - \eta, u - v) \geq 0 \quad \forall \xi \in f(u) \ \ \forall \eta \in f(v)$$

Definizione. *Un operatore $\beta : H \to 2^H$ è massimale monotono (OMM) quando esso è massimale nella classe degli operatori monotoni da H in 2^H rispetto alla relazione d'ordine*

$$\beta_1 \preceq \beta_2 \quad \textit{se e solo se} \quad \operatorname{graf} \beta_1 \subseteq \operatorname{graf} \beta_2 .$$

Inconvenienti dei modelli precedenti:

- funzionano bene solo per $|\vartheta|$ non troppo grande causa linearizzazioni intorno a $\vartheta = 0$ (t.c.f.)
- non termodinamicamente consistenti

Penrose–Fife, Physica D, 1990:

- modello senza linearizzazioni (nuovo $\mathcal{F}$)
- consistenza termodinamica (zuppa $\not\to$ acquario)
- $\vartheta =$ **temperatura assoluta**: $\vartheta > 0$
- $\vartheta_{\text{crit}} =$ temperatura critica

Modello generalizzato

$$\partial_t e + \operatorname{div} \mathbf{q} = f$$

$$e = \vartheta + \lambda\chi$$

legge costitutiva per $\mathbf{q}$

$$\mu\partial_t\chi - \nu\Delta\chi + \beta(\chi) + \sigma'(\chi) \ni \frac{\lambda}{\vartheta_{\text{crit}}} - \frac{\lambda}{\vartheta}$$

condizioni iniziali e al contorno

ove β è un OMM con $\beta(0) \ni 0$ e σ' è lipschitziana.

Diversi lavori sull'argomento
diverse leggi costitutive per $\mathbf{q}$:

Colli, Kenmochi, Laurençot, Niezgódka, Sprekels, Zheng, ... (singoli e combinazioni varie, anni '90)

Anche qui sviluppi in varie direzioni

- memoria, quart'ordine, analisi asintotiche

con vari contributi pavesi

Colli–Laurençot 1998 (CL)
Colli–Laurençot–Sprekels 1999 (CLS)

$$\mathbf{q} = k_1(\vartheta)\nabla(1/\vartheta)$$
$$\mathbf{q} = -k_2(\vartheta)\nabla\vartheta$$
$$\mathbf{q} = -\nabla\alpha(\vartheta)$$
$k_1, k_2, \alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ regolari q.b.
$$\alpha'(\vartheta) = k_2(\vartheta) = \frac{k_1(\vartheta)}{\vartheta^2}$$
$k_i > 0$ e α strettamente crescente

$$
\begin{aligned}
&\partial_t(\vartheta + \chi) - \Delta u = f \\
&u = \alpha(\vartheta) \\
&\partial_t \chi - \Delta \chi + \xi + \sigma'(\chi) = -\frac{1}{\vartheta} \\
&\xi \in \beta(\chi)
\end{aligned}
$$

Condizioni al bordo (usuali):

$$
\begin{array}{ll}
\partial_n u + cu = \text{dato} & \text{(terzo tipo, } c > 0\text{)} \\
\partial_n \chi = 0 & \text{(Neumann)}
\end{array}
$$

Condizioni iniziali per ϑ e χ.

CL:	esistenza
	con α molto generale
CLS:	regolarità e unicità della soluzione regolare
	con α più particolare

Ipotesi di CL:

α strettamente crescente e concava
$\alpha'(\vartheta) \approx \vartheta^{-2p}$ per ϑ piccolo, $1/2 \leq p < +\infty$
$\alpha'(\vartheta) \approx \vartheta^{-2q}$ per ϑ grande, $0 \leq q \leq 1/2$

“vale a dire”

$\alpha(\vartheta) \approx \ln \vartheta$ oppure $\alpha(\vartheta) \approx -1/\vartheta^a$ $(a > 0)$
$\alpha(\vartheta)$ “compreso fra” $\ln \vartheta$ e ϑ (estremi inclusi)

per ϑ piccolo e ϑ grande rispettivamente.

Ipotesi di CLS: $p = 1$ e $q = 0$
“vale a dire”

$\alpha(\vartheta) \approx -1/\vartheta$ per ϑ piccolo
$\alpha(\vartheta) \approx \vartheta$ per ϑ grande

Lavoro in collaborazione con

Andrea Marson (Brescia)

- Condizioni di **Dirichlet** (non usuali) per u
- limite di problemi di terzo tipo
- ipotesi generali per quanto possibile

Ipotesi intermedie: $p = 1$ e $0 \leq q \leq 1/2$
"vale a dire"

$\alpha(\vartheta) \approx -1/\vartheta$
$\alpha(\vartheta)$ "compreso fra" $\ln\vartheta$ e ϑ (estremi inclusi)

per ϑ piccolo e ϑ grande rispettivamente.

- Esistenza, come limite di problemi di terzo tipo
- Regolarità e unicità della soluzione regolare
- Estensione di CLS nelle ipotesi intermedie

Problema approssimato $\mathcal{P}_\varepsilon$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t(\vartheta_\varepsilon + \chi_\varepsilon) - \Delta u_\varepsilon = f \\
&u_\varepsilon = \alpha(\vartheta_\varepsilon) \\
&\partial_t \chi_\varepsilon - \Delta \chi_\varepsilon + \xi_\varepsilon + \sigma'(\chi_\varepsilon) = -\frac{1}{\vartheta_\varepsilon} \\
&\xi_\varepsilon \in \beta(\chi_\varepsilon) \\
&\partial_n u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - u_\Gamma) = 0 && \text{su } \Gamma \\
&\partial_n \chi_\varepsilon = 0 && \text{su } \Gamma \\
&\text{condizioni iniziali}
\end{aligned}
$$

Problema (congetturato) limite $\mathcal{P}$

$$
\begin{aligned}
&\partial_t(\vartheta + \chi) - \Delta u = f \\
&u = \alpha(\vartheta) \\
&\partial_t \chi - \Delta \chi + \xi + \sigma'(\chi) = -\frac{1}{\vartheta} \\
&\xi \in \beta(\chi) \\
&u = u_\Gamma && \text{su } \Gamma \\
&\partial_n \chi = 0 && \text{su } \Gamma \\
&\text{condizioni iniziali}
\end{aligned}
$$

Formulazioni "precise"

$$\frac{d}{dt}(\vartheta_\varepsilon + \chi_\varepsilon, v) + (\nabla u_\varepsilon, \nabla v) + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Gamma (u_\varepsilon - u_\Gamma)v$$

$$= (f, v)$$

$\forall\, v$ regolare, per q.o. $t \in (0, T)$

$u_\varepsilon = \alpha(\vartheta_\varepsilon)$

$$(\partial_t \chi_\varepsilon, w) + (\nabla \chi_\varepsilon, \nabla w) + (\xi_\varepsilon, w) + (\sigma'(\chi_\varepsilon), w)$$

$$= -((1/\vartheta_\varepsilon), w)$$

$\forall\, w$ regolare, per q.o. $t \in (0, T)$

$\xi_\varepsilon \in \beta(\chi_\varepsilon)$

condizioni iniziali

$$\frac{d}{dt}(\vartheta + \chi, v) + (\nabla u, \nabla v) = (f, v)$$

$\forall\, v$ regolare nulla su Γ, per q.o. $t \in (0, T)$

$u = \alpha(\vartheta)$

$$(\partial_t \chi, w) + (\nabla \chi, \nabla w) + (\xi, w) + (\sigma'(\chi), w)$$

$$= -((1/\vartheta), w)$$

$\forall\, w$ regolare, per q.o. $t \in (0, T)$

$\xi \in \beta(\chi)$

$u - u_\Gamma = 0$ su Γ

condizioni iniziali

Strumenti del tutto classici:

- compattezza debole per successioni
- tecniche di monotonia (OMM) dato che

la convergenza debole e il nonlineare
non vanno d'accordo!!!

OMM coinvolti:

- $\beta : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$
- $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
- $\rho := \alpha^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $\vartheta \mapsto -1/\vartheta, \quad \vartheta > 0$

Si tratta effettivamente di OMM:

- β per ipotesi
- ρ perché monotona e continua in tutto $\mathbb{R}$
- per gli altri due si prolunga ponendo

$$\vartheta \mapsto \emptyset \quad \text{per } \vartheta \le 0$$

Esempio importante di OMM

$A : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ OMM
S spazio di misura (misura finita)
$H = L^2(S)$.

Allora è un OMM l'operatore $\widetilde{A} : H \to 2^H$

$$\begin{aligned} &\text{se } u, v \in H \text{ allora } v \in \widetilde{A}(u) \text{ se e solo se} \\ &v(s) \in A(u(s)) \;\; \text{per q.o. } s \in S \end{aligned}$$

Si userà $S = \Omega \times (0, T)$ con la misura di Lebesgue e si scriverà A anziché $\widetilde{A}$.

Risultato importante

H Hilbert e $A : H \to 2^H$ OMM
$u_n \rightharpoonup u, \quad v_n \rightharpoonup v, \quad v_n \in A(u_n) \; \forall n.$

Se una delle convergenze è forte, allora $v \in A(u)$.

Convergenza debole. Strumento:

Teoremi classici di compattezza debole,
cioè **stime a priori**.

Ma serve qualche **convergenza forte**. Strumento:

Immersioni compatte, cioè
varianti del Teorema di Ascoli.
Esempio: Teorema di Rellich,
cioè stime a priori per le derivate.

Dunque: **tante stime a priori**.

Grazie alle stime si ottiene $\{\varepsilon_n \searrow 0\}$ tale che

$$(\vartheta_\varepsilon, u_\varepsilon, \chi_\varepsilon, \xi_\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_n} \rightharpoonup (\vartheta, u, \chi, \xi).$$

Grazie a certe convergenze forti, il limite risolve $\mathcal{P}$.
Grazie all'unicità, tutta la famiglia converge.

Prossimo e ultimo lucido: esempio di stima.

Esempio di stima (prima stima)

$$\int_0^t (1_\varepsilon(\tau))\Big|_{v \approx (u_\varepsilon - u_\Gamma + \vartheta_\varepsilon - \vartheta_\Gamma)(\tau)} d\tau$$
$$+ \int_0^t (2_\varepsilon(\tau))\Big|_{w = \partial_t \chi_\varepsilon(\tau)} d\tau$$

ove $u_\Gamma : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ e $\vartheta_\Gamma := \rho(u_\Gamma)$.
Con tre pagine di calcoli si ottiene

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{\alpha}(\vartheta_\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} + \|\widetilde{\beta}(\chi_\varepsilon)\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \\
&+ \|\vartheta_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \\
&+ \|\chi_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))} + \|\partial_t \chi_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&+ \varepsilon^{-1/2} \|u_\varepsilon - u_\Gamma\|_{L^2(\Gamma \times (0,T))} \\
&+ \left\|\nabla \vartheta_\varepsilon^{1-q}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leq \text{costante}
\end{aligned}$$

ove $\widetilde{\alpha}$ e $\widetilde{\beta}$ sono “primitive” ≥ 0 di α e β.

L’Analisi I implica

$$1/r^2 \leq c\big(\alpha^2(r) + 1\big) \quad \forall\, r > 0$$

e si deduce

$$\|1/\vartheta_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \text{costante}$$