Misure di Hausdorff e applicazioni

Gianni Gilardi

Queste pagine sono dedicate principalmente all'approfondimento delle nozioni di lunghezza di una curva e di area di una superficie. Si parte dalla nozione di misura di Hausdorff di dimensione arbitraria per arrivare alla cosiddetta formula dell'area, che tuttavia non viene vista nella sua completa generalità. La misura di Hausdorff viene poi impiegata in una direzione diversa per dare qualche indicazione sui frattali autosimili.

La trattazione si appoggia largamente ai volumi *Corso introduttivo alla teoria geometrica della misura*, Scuola Normale Superiore di Pisa, 1997, di L. Ambrosio e *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1985, di K.J. Falconer.

1. Richiami di teoria della misura

In queste poche righe ci limtiamo a richiamare le nozioni fondamentali della teoria astratta della misura con l'obiettivo di fissare almeno la terminologia. Per tutto il paragrafo, fino ad avviso contrario, X è un insieme non vuoto.

Per semplificare, *conveniamo che l'aggettivo "numerabile" comprenda anche il caso finito*. La stessa convenzione è usata anche in tutti i paragrafi successivi.

Una σ-algebra di sottoinsiemi di X è una famiglia non vuota $\mathcal{S}$ di sottoinsiemi di X chiusa rispetto alla complementazione e all'unione numerabile, cioè

$$A \in \mathcal{S} \qquad \text{implica} \qquad X \setminus A \in \mathcal{S}$$

$$A_n \in \mathcal{S} \text{ per } n = 1, 2 \ldots \qquad \text{implica} \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{S}.$$

Ne consegue che $\emptyset, X \in \mathcal{S}$ e che $\mathcal{S}$ è chiusa anche rispetto all'intersezione numerabile.

Data una qualunque famiglia non vuota $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X, esiste ed è unica la minima σ-algebra che contiene $\mathcal{F}$. Essa è detta *σ-algebra generata da $\mathcal{F}$*. L'algebra di Borel di $\mathbb{R}^n$ è la σ-algebra generata dalla famiglia degli aperti (oppure dei chiusi, o dei compatti, o dei rettangoli, ...) di $\mathbb{R}^n$ ed è denotata con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. I suoi elementi si chiamano *boreliani* oppure *insiemi di Borel*.

Una *misura su* X è un'applicazione $\mu : \mathcal{S} \to [0, +\infty]$ avente una σ-algebra $\mathcal{S}$ come dominio, σ-additiva e tale che $\mu(\emptyset) = 0$. La σ-additività significa che

$$A_n \in \mathcal{S} \text{ per } n = 1, 2 \ldots \quad \text{e} \quad A_n \cap A_m = \emptyset \text{ per } n \neq m$$

$$\text{implicano} \quad \mu\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Valgono di conseguenza le proprietà seguenti, dette di *continuità*:

$$\mu\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad \text{se} \quad A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$$

$$\mu\Bigl(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \quad \text{se} \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots \quad \text{e} \quad \mu(A_1) < +\infty$$

restando inteso che $A_n \in \mathcal{S}$ per ogni n.

In tale quadro astratto "insieme misurabile" significa elemento di $\mathcal{S}$. Se $X = \mathbb{R}^n$, la misura è detta di Borel quando ogni insieme di Borel è misurabile, cioè quando $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{S}$.

Una *misura esterna su* X è un'applicazione $\mu : 2^X \to [0, +\infty]$ non decrescente, σ-subadditiva e tale che $\mu(\emptyset) = 0$. Le due proprietà menzionate significano

$$A \subseteq B \quad \text{implica} \quad \mu(A) \le \mu(B) \qquad \text{e} \qquad \mu\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Bigr) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

rispettivamente per ogni $A, B \subseteq X$ e ogni $A_n \subseteq X$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Si noti che, nonostante il nome, una misura esterna può non essere una misura dato che non è richiesta alcuna formula di additività nel caso di insiemi disgiunti.

Richiamiamo la *costruzione di Carathéodory*. Sia μ una misura esterna su X. Diciamo che un sottoinsieme A di X è misurabile (rispetto a μ) quando

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \setminus A) \quad \text{per ogni } E \in 2^X .$$

Allora la famiglia $\mathcal{M}$ degli insiemi misurabili è una σ-algebra e la restrizione di μ a $\mathcal{M}$ è una misura su X. Tale misura è inoltre completa, cioè verifica la condizione: $A \subseteq B$ e $\mu(B) = 0$ implicano $A \in \mathcal{M}$ (e $\mu(A) = 0$).

Nel caso $X = \mathbb{R}^n$, possiamo definire inizialmente la misura $\mathcal{L}^n(R)$ di un rettangolo $R \subseteq \mathbb{R}^n$ mediante la formula

$$\mathcal{L}^n(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

se R è il prodotto cartesiano degli intervalli (aperti o chiusi o semiaperti) di estremi a_i e b_i e poi estendere la definizione di $\mathcal{L}^n$ a tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ mediante la formula

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \Bigl\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}^n(R_j) : \ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j, \ R_j \text{ rettangoli} \Bigr\}$$

Si ottiene una misura esterna. La costruzione di Carathéodory porta a una σ-algebra e a una misura, denotate con $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ e (ancora) con $\mathcal{L}^n$, che sono la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue e la *misura di Lebesgue*. La misura di Lebesgue è una misura di Borel e gode inoltre della proprietà seguente: per ogni $E \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ risulta

$$\mathcal{L}^n(E) = \inf \{ \mathcal{L}^n(A) : \ A \supseteq E, \ \ A \ \text{aperto} \} = \sup \{ \mathcal{L}^n(K) : \ K \subseteq E, \ \ K \ \text{compatto} \} .$$

Se μ è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, una condizione sufficiente perché la misura indotta sulla classe degli insiemi misurabili rispetto a μ sia di Borel, cioè ogni insieme di Borel sia misurabile, è che μ sia additiva sugli insiemi distanti, cioè

$$\operatorname{dist}(A, B) > 0 \qquad \text{implica} \qquad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

ove $\operatorname{dist}(A, B) = \inf \{ |x - y| : \ x \in A, \ y \in B \}$ è la distanza fra A e B (si noti però che, nonostante il nome, dist non gode delle proprietà delle distanze). ■

A partire da una misura astratta μ definita su una σ-algebra $\mathcal{S}$, si può costruire, come è ben noto, la teoria dell'integrazione, almeno nel caso σ-finito, cioè nel caso in cui l'ambiente X si possa scrivere come unione numerabile di insiemi di μ-misura finita. Lasciando ai testi specializzati questo argomento, ci limitiamo a ricordare che, pur di accettare $+\infty$ come valore dell'integrale, risulta ben definito l'integrale di ogni funzione $\mathcal{S}$-misurabile non negativa, ove resta inteso che $f : X \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{S}$-misurabile se $f^{-1}(B) \in \mathcal{S}$ per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Nel caso in cui $X = \mathbb{R}^n$ e μ è una misura di Borel, sono senz'altro misurabili tutte le funzioni di Borel, cioè le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tali che $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Richiami di algebra lineare

Riportiamo brevemente nozioni e fatti ben noti e fissiamo le notazioni e la terminologia. Nel seguito V e W denotano gli spazi euclidei $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ oppure loro sottospazi. I simboli $\mathrm{Hom}(V;W)$ e $\mathbb{1}_V$ denotano l'insieme delle applicazioni $L : V \to W$ lineari e l'operatore identità di V in sé.

Sia $L \in \mathrm{Hom}(V;W)$. L'aggiunto di L è l'operatore $L^* \in \mathrm{Hom}(W;V)$ definito dalla condizione
$$(L^*x) \cdot y = x \cdot (Ly) \quad \text{per ogni } x \in W \text{ e } y \in V .$$
Fissate le basi in V e W, se L si rappresenta con la matrice A, allora L^* si rappresenta con la matrice trasposta A^t. Si ha $L^{**} = L$. Se $V = W$ risulta anche $\det L^* = \det L$.

Se $\dim V \le \dim W$, un operatore $O \in \mathrm{Hom}(V;W)$ è detto ortogonale quando $O^*O = \mathbb{1}_V$. L'ortogonalità equivale alla condizione
$$(Ox) \cdot (Oy) = x \cdot y \quad \text{per ogni } x, y \in V$$
per cui, in particolare, O conserva le distanze ed è di conseguenza iniettivo. Si verifica immediatamente che
$$(O^*x') \cdot (O^*y') = x' \cdot y' \quad \text{per ogni } x', y' \in O(V) .$$
In particolare, se $\dim V = \dim W$, allora O è suriettivo e anche O^* è ortogonale e coincide con O^{-1}.

Diciamo che un'applicazione $I : V \to W$ è un'isometria quando I può essere rappresentata nella forma $I(x) = Ox + y$ per ogni $x \in V$ e per opportuni $O \in \mathrm{Hom}(V;W)$ ortogonale e $y \in W$ (necessariamente unici). Le isometrie conservano le distanze e sono di conseguenza iniettive. Un'isometria è suriettiva se e solo se $\dim V = \dim W$.

Diciamo che un'applicazione $S : V \to W$ è una similitudine di rapporto $\lambda > 0$ quando esiste un'isometria $I : V \to W$ tale che $S(x) = I(\lambda x)$ per ogni $x \in V$. Risulta $|S(x) - S(y)| = \lambda |x - y|$ per ogni $x, y \in V$.

Se $S : V \to W$ è una similitudine, allora l'immagine $S(V)$ è il traslato di un sottospazio di W, cioè ha la forma $y + W_0$ per opportuni $y \in W$ e W_0 sottospazio di W. In particolare è ben definito l'operatore di proiezione ortogonale $\pi : W \to S(V)$.

Casi particolari di similitudini di $\mathbb{R}^n$ in sé sono le omotetie. Se $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$, chiamiamo omotetia di centro x_0 e rapporto λ l'applicazione $x \mapsto x_0 + \lambda(x - x_0)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Un operatore $D \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ è diagonale se esistono $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ tali che $De_i = \lambda_i e_i$ per $i = 1, \ldots, n$, ove e_i è l' i-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$. In tal caso denotiamo con $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ l'operatore D.

Un operatore $S \in \mathrm{Hom}(V; V)$ è detto simmetrico quando $S^* = S$. Se $V = \mathbb{R}^n$ e S è simmetrico, allora esso è diagonalizzabile, cioè esistono $O, D \in \mathrm{Hom}(V; V)$, con O ortogonale e D diagonale, tali che $S = O^* D O$.

Un operatore $L \in \mathrm{Hom}(V; V)$ è detto semidefinito positivo quando $Lx \cdot x \geq 0$ per ogni $x \in V$, definito positivo quando $Lx \cdot x > 0$ per ogni $x \in V$ non nullo. Nei due casi abbiamo $\det L \geq 0$ e $\det L > 0$.

Sia $L \in \mathrm{Hom}(V; W)$ con $\dim V \leq \dim W$. Allora esistono $O \in \mathrm{Hom}(V; W)$ ortogonale e $S \in \mathrm{Hom}(V; V)$ simmetrico tali che $L = OS$. Tale decomposizione si chiama decomposizione polare di L.

3. Misure di Hausdorff

Sia $s \in [0, +\infty)$. La misura di Hausdorff di dimensione s è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Introdotta questa, si può procedere con la costruzione di Carathéodory e definire gli insiemi misurabili. Risulteranno misurabili almeno tutti gli insiemi di Borel. Iniziamo con la sua δ-approssimazione, ricordando che il diametro di un sottoinsieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto è definito da $\mathrm{diam}\, E = \sup\{|x - y| : \ x, y \in E\}$.

Definizione 3.1. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e $\delta > 0$. Un δ-ricoprimento di E è una famiglia $\{E_i\}$ numerabile di sottoinsiemi non vuoti E_i di $\mathbb{R}^n$ tali che*

$$E \subseteq \bigcup_i E_i \quad \text{e} \quad 0 < \mathrm{diam}\, E_i \leq \delta \quad \text{per ogni } i. \ \blacksquare$$

Definizione 3.2. *Siano $s \geq 0$, $\delta > 0$ e $E \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto. Definiamo*

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \inf\Big\{\sum_i (\mathrm{diam}\, E_i)^s : \ \{E_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } E\Big\} \tag{3.1}$$

e poniamo $\mathcal{H}^s_\delta(\emptyset) = 0$. $\blacksquare$

La condizione $\mathrm{diam}\, E_i > 0$ nella Definizione 3.1 è stata imposta per evitare il caso 0^0 nella (3.1), ma se $s > 0$ si ottiene lo stesso valore $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ conservando o ignorando tale condizione. Di questa osservazione si farà tacito uso nel seguito. Inoltre si potrebbe imporre agli E_i di essere tutti aperti, o chiusi, o convessi, senza che $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ cambi. Notiamo infine che, fissati s e E, la funzione $\delta \mapsto \mathcal{H}^s_\delta(E)$, che può eventualmente assumere il valore $+\infty$, è non crescente: infatti, se $\delta < \eta$, ogni δ-ricoprimento di E è anche un η-ricoprimento di E per cui $\mathcal{H}^s_\delta(E) \geq \mathcal{H}^s_\eta(E)$. Ha allora senso la seguente

Definizione 3.3. *Sia $s \ge 0$. Definiamo la misura di Hausdorff s-dimensionale di un sottoinseme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mediante la formula*

$$\mathcal{H}^s(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(E). \ \blacksquare \tag{3.2}$$

Osservazione 3.4. In particolare $\mathcal{H}^s(E) \ge \mathcal{H}^s_\delta(E)$ per ogni $\delta > 0$. Notiamo fin d'ora che $\mathcal{H}^s$ è non decrescente: se $A \subseteq B$, allora ogni δ-ricoprimento di B è un δ-ricoprimento di A, per cui $\mathcal{H}^s_\delta(A) \le \mathcal{H}^s_\delta(B)$ per ogni $\delta > 0$ e quindi $\mathcal{H}^s(A) \le \mathcal{H}^s(B)$.

Osservazione 3.5. Notiamo che $\mathcal{H}^0$ è la cosiddetta *misura che conta*. Infatti, se $k > 0$ è intero, E è un insieme finito di k elementi e δ_0 è la minima delle reciproche distanze degli elementi di E, allora, per $\delta < \delta_0$, ogni δ-ricoprimento di E consiste di almeno k insiemi; d'altra parte esiste un δ-ricoprimento costituito esattamente da k insiemi. Segue $\mathcal{H}^0_\delta(E) = k$ se $\delta < \delta_0$, da cui $\mathcal{H}^0(E) = k$. Se invece E è infinito, la monotonia evidenziata nell'Osservazione 3.4 e quanto appena visto mostrano che $\mathcal{H}^0(E) \ge k$ per ogni k, per cui $\mathcal{H}^0(E) = +\infty$. Infine $\mathcal{H}^0(\emptyset) = 0$ per definizione.

Esempio 3.6. Sia $E = [0,1]^2$. La Definizione 3.3 attribuisce ad E una misura per ogni $s > 0$, in particolare una lunghezza, un'area e un volume, rispettivamente nei casi $s = 1, 2, 3$. Vediamo che accade, senza tuttavia arrivare a calcoli esatti. Partiamo dal caso $s = 2$ ricordando che $\mathcal{L}^2$ è la misura di Lebesgue. Fissiamo un numero $\delta > 0$ qualunque. Sia ora $\{E_i\}$ un δ-ricoprimento di E. Siccome gli E_i potrebbero non essere misurabili secondo Lebesgue, consideriamo le loro chiusure, la cui unione include E a maggior ragione. Osserviamo che $\overline{E}_i$ ed E_i hanno lo stesso diametro e che $\overline{E}_i$ è incluso in un disco di raggio $\operatorname{diam} E_i$ (si scelga un punto qualunque di $\overline{E}_i$ come centro). Pertanto

$$1 = \mathcal{L}^2(E) \le \sum_i \mathcal{L}^2(\overline{E}_i) \le \sum_i \pi(\operatorname{diam} E_i)^2 \quad \text{da cui} \quad \sum_i (\operatorname{diam} E_i)^2 \ge \frac{1}{\pi}. \tag{3.3}$$

Ciò implica che $\mathcal{H}^2(E) \ge \mathcal{H}^2_\delta(E) \ge 1/\pi > 0$. Per dare una stima nella direzione opposta, fissiamo $\delta > 0$. Per ogni intero $n > \sqrt{2}/\delta$ ricopriamo E con n^2 quadratini E_i di lato $1/n$ (costruiamo la griglia di passo $1/n$ e prendiamo i quadratini chiusi): essendo $\operatorname{diam} E_i = \sqrt{2}/n$, otteniamo un δ-ricoprimento di E. Abbiamo pertanto

$$\mathcal{H}^2_\delta(E) \le \sum_i (\operatorname{diam} E_i)^2 = n^2 \cdot (\sqrt{2}/n)^2 = 2.$$

Per l'arbitrarietà di δ otteniamo $\mathcal{H}^2(E) \le 2 < +\infty$. Dunque $\mathcal{H}^2(E)$ è positiva e finita e questa misura deve essere "di tipo area". Sia ora $s < 2$. Per ogni $\delta > 0$, come nella prima parte del caso $s = 2$, dato un qualunque δ-ricoprimento di E, vale la conclusione della (3.3). Osservato che $(\operatorname{diam} E_i)^{s-2} \ge \delta^{s-2}$ in quanto $s - 2 < 0$, abbiamo allora

$$\sum_i (\operatorname{diam} E_i)^s = \sum_i (\operatorname{diam} E_i)^{s-2} (\operatorname{diam} E_i)^2 \ge \frac{\delta^{s-2}}{\pi}.$$

Per l'arbitrarietà del δ-ricoprimento deduciamo $\mathcal{H}^s_\delta(E) \geq \delta^{s-2}/\pi$ e prendendo $\delta \to 0$ vediamo che $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$. In particolare E ha lunghezza infinita. Sia infine $s > 2$: mostriamo che $\mathcal{H}^s(E) = 0$, per cui, in particolare, E ha volume nullo. Fissato $\delta > 0$, procediamo come nella seconda parte del discorso fatto per il caso $s = 2$. Abbiamo ora

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \sum_i (\operatorname{diam} E_i)^s = n^2 \cdot (\sqrt{2}/n)^s = 2^{s/2}\, n^{2-s} \quad \text{da cui}$$
$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \lim_{n\to+\infty} 2^{s/2}\, n^{2-s} = 0 \quad \text{per ogni } \delta > 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(E) = 0.$$

Osservazione 3.7. Può essere conveniente considerare anche le misure di Hausdorff *normalizzate*. Esse si ottengono mediante la Definizione 3.3 a partire da una diversa definizione di $\mathcal{H}^s_\delta$, precisamente

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \frac{\omega_s}{2^s} \inf\Big\{ \sum_i (\operatorname{diam} E_i)^s : \ \{E_i\} \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } E \Big\} \tag{3.4}$$

ove si è posto

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1+s/2)} \quad \text{e} \quad \Gamma(r) = \int_0^\infty t^{r-1} e^{-t}\, dt \quad \text{per } r > 0\,. \tag{3.5}$$

La funzione Γ, detta *funzione Gamma di Eulero*, è strettamente positiva, strettamente convessa, di classe C^∞, divergente in 0 e all'infinito e verifica le due formule

$$\Gamma(r+1) = r\Gamma(r) \quad \text{per } r > 0 \qquad \text{e} \qquad \Gamma(n+1) = n! \quad \text{per } n = 0, 1, \ldots.$$

Ragionando per induzione su n, si vede che, per $n = 1, 2, \ldots$, vale la formula

$$\mathcal{L}^n(B_r(x)) = \omega_n r^n \tag{3.6}$$

ove $B_r(x)$ è la palla di $\mathbb{R}^n$ di centro x e raggio r.

Si noti che, nei casi $s = 0$ e $s = 1$, le due misure di Hausdorff (normalizzate e non) coincidono, fatto che invece non accade per altri valori di s. L'uso di misure normalizzate sarà utile solo in seguito, nel confronto con la misura di Lebesgue.

Proposizione 3.8. *$\mathcal{H}^s_\delta$ e $\mathcal{H}^s$ sono misure esterne su $\mathbb{R}^n$.* ■

Dimostrazione. Grazie alle Osservazioni 3.4 e 3.5, basta provare la σ-subadditività nel caso in cui $s > 0$ e tutti gli insiemi in questione sono non vuoti. Iniziamo dalla $\mathcal{H}^s_\delta$.

Siano $E_j \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoti per $j = 1, 2, \ldots$ e sia E la loro unione. Possiamo senz'altro supporre $\mathcal{H}^s_\delta(E_j) < +\infty$ per ogni j, altrimenti la situazione è banale. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Per ogni j troviamo un δ-ricoprimento $\Big\{E^j_i : \ i = 1, 2 \ldots\Big\}$ di E_j tale che

$$\sum_i (\operatorname{diam} E^j_i)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(E_j) + 2^{-j}\varepsilon.$$

Osservato che la famiglia $\left\{E_i^j:\ i,j=1,2\ldots\right\}$ è un δ-ricoprimento di E, abbiamo

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \le \sum_{i,j} (\operatorname{diam} E_i^j)^s \le \sum_j \bigl(\mathcal{H}^s_\delta(E_j) + 2^{-j}\varepsilon\bigr) = \sum_j \mathcal{H}^s_\delta(E_j) + \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε scende la disuguaglianza voluta, cioè

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \le \sum_j \mathcal{H}^s_\delta(E_j).$$

Passiamo ora ad $\mathcal{H}^s$. La disuguaglianza appena scritta implica

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \le \sum_j \mathcal{H}^s(E_j)$$

per ogni $\delta > 0$, da cui quanto richiesto prendendo il limite del primo membro. ■

Ci poniamo ora il problema di quanto vasta sia la classe degli insiemi misurabili (nella costruzione di Carathéodory) rispetto alle misure di Hausdorff. Grazie all'Osservazione 3.5, tutti gli insiemi sono misurabili rispetto a $\mathcal{H}^0$. In generale abbiamo il seguente

Teorema 3.9. *Ogni insieme di Borel è misurabile rispetto a* $\mathcal{H}^s$. ■

Dimostrazione. Basta verifiare l'additività sugli insiemi distanti. Siano dunque A e B due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^n$ tali che $d = \operatorname{dist}(A,B) > 0$. Dobbiamo verificare solo che $\mathcal{H}^s(A\cup B) \ge \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ dato che la disuguaglianza opposta segue dal fatto che $\mathcal{H}^s$ è una misura esterna. Inoltre possiamo supporre tutte le misure finite altrimenti la situazione è banale. Sia $\delta \in (0,d)$ e sia $\{E_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ un qualunque δ-ricoprimento di $A\cup B$. Definiamo i tre sottoinsiemi $\mathcal{I}_{A\cup B}$, $\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$ di $\mathcal{I}$ costituiti dagli indici i tali che

$$E_i\cap(A\cup B) \ne \emptyset, \quad E_i\cap A \ne \emptyset \quad \text{e} \quad E_i \cap B \ne \emptyset$$

rispettivamente e osserviamo che $\mathcal{I}_{A\cup B} = \mathcal{I}_A \cup \mathcal{I}_B$. Osserviamo inoltre che, se $i \in \mathcal{I}_A \cap \mathcal{I}_B$, allora esistono $x \in E_i\cap A$ e $y \in E_i \cap B$. Segue $d \le |x-y| \le \operatorname{diam} E_i \le \delta$, mentre si stava supponendo $\delta < d$. Dunque $\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$ sono anche disgiunti. Tutto ciò mostra inoltre che le famiglie $\{E_i\}_{i\in\mathcal{I}_A}$ e $\{E_i\}_{i\in\mathcal{I}_B}$ sono δ-ricoprimenti di A e di B rispettivamente. Segue allora

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} (\operatorname{diam} E_i)^s \ge \sum_{i\in\mathcal{I}_{A\cup B}} (\operatorname{diam} E_i)^s = \sum_{i\in\mathcal{I}_A} (\operatorname{diam} E_i)^s + \sum_{i\in\mathcal{I}_B} (\operatorname{diam} E_i)^s \ge \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).$$

Dall'arbitrarietà di $\{E_i\}$ deduciamo

$$\mathcal{H}^s_\delta(A\cup B) \ge \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) \quad \text{per ogni } \delta \in (0,d)$$

e quanto voluto segue passando al limite per $\delta \to 0^+$. ■

Ricordiamo che una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lipschitziana quando esiste una costante c tale che $|f(x) - f(y)| \le c|x - y|$ per ogni $x, y \in A$. Chiamiamo *costante di Lipschitz di* f l'estremo inferiore dell'insieme costituito dalle costanti c di cui sopra. Esso è anche il minimo di tale insieme e coincide con

$$\operatorname{Lip} f = \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \, .$$

Si noti che $\operatorname{diam} f(E) \le (\operatorname{Lip} f) \operatorname{diam} E$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Proposizione 3.10. *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \mathbb{R}^m$ *una funzione lipschitziana. Allora*

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \le \lambda^s \mathcal{H}^s(E) \quad \textit{per ogni } s \ge 0 \quad \textit{ove } \lambda = \operatorname{Lip} f \, . \ \blacksquare$$

Dimostrazione. Esclusi i casi banali, supponiamo $s > 0$, $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ e $\lambda > 0$. Fissiamo $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$. Allora si ha anche $\mathcal{H}^s_\delta(E) < +\infty$ ed esiste un δ-ricoprimento $\{E_i\}$ di E verificante

$$\sum_i (\operatorname{diam} E_i)^s \le \mathcal{H}^s_\delta(E) + \varepsilon.$$

Osservato che $\{f(E_i)\}$ è un $\lambda\delta$-ricoprimento di $f(E)$, abbiamo

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(f(E)) \le \sum_i (\operatorname{diam} f(E_i))^s \le \lambda^s \sum_i (\operatorname{diam} E_i)^s \le \lambda^s \left(\mathcal{H}^s_\delta(E) + \varepsilon \right)$$

e la tesi segue passando al limite per $\varepsilon, \delta \to 0^+$. $\blacksquare$

Corollario 3.11. *Sia* $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *una similitudine di rapporto* $\lambda > 0$. *Allora*

$$\mathcal{H}^s(S(E)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E) \quad \textit{per ogni } E \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ e } s \ge 0 \, .$$

In particolare le isometrie conservano le misure di Hausdorff. $\blacksquare$

Dimostrazione. Per avere la disuguaglianza "$\le$" basta applicare il risultato precedente, osservato che $\operatorname{Lip} S = \lambda$. Per dimostrare la disuguaglianza opposta consideriamo l'operatore di proiezione ortogonale $\pi : \mathbb{R}^m \to S(\mathbb{R}^n)$ e osserviamo che l'applicazione $g = S^{-1} \circ \pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è ben definita e verifica $\operatorname{Lip} g = 1/\lambda$. Essendo $E = g(S(E))$, dalla Proposizione 3.10 deduciamo $\mathcal{H}^s(E) \le (1/\lambda)^s \mathcal{H}^s(S(E))$ e concludiamo. $\blacksquare$

Le misure di Hausdorff si possono usare per dare una definizione generale di dimensione. Premettiamo due lemmi, il primo dei quali sarà utile anche in seguito.

Lemma 3.12. *Si ha* $\mathcal{H}^n(E) < +\infty$ *per ogni* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *limitato.* $\blacksquare$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso del cubo $C = [0,1]^n$ e procediamo come nell'Esempio 3.6, ma in modo più formale dato che ora la dimensione n è generica.

Fissiamo $\delta > 0$ e un intero positivo $k \geq \sqrt{n}/\delta$ e definiamo gli insiemi $C_z = (z + C)/k$ per $z \in \mathbb{N}^n$, osservando che ciascuno di essi ha diametro $\sqrt{n}/k \leq \delta$. Detta $\mathcal{F}$ la famiglia costituita dai cubi C_z che sono inclusi in C, vediamo che $\mathcal{F}$ è un δ-ricoprimento di C costituito da k^n insiemi. Deduciamo

$$\mathcal{H}^n_\delta(C) \leq k^n \left(n^{1/2}/k\right)^n = n^{n/2}.$$

Passando al limite per $\delta \to 0$ otteniamo $\mathcal{H}^n(C) \leq n^{n/2}$.

Sia ora $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato. Allora esiste una similitudine S tale che valga l'inclusione $E \subseteq S(C)$. Detto λ il rapporto della similitudine abbiamo allora

$$\mathcal{H}^n(E) \leq \mathcal{H}^n(S(C)) = \lambda^n \mathcal{H}^n(C) < +\infty$$

grazie al Corollario 3.11 e a quanto abbiamo dimostrato per C. ∎

Lemma 3.13. *Se $0 \leq s < t$ allora*

$$\mathcal{H}^t_\delta(E) \leq \delta^{t-s} \mathcal{H}^s_\delta(E) \quad \textit{per ogni } E \subseteq \mathbb{R}^n \textit{ e } \delta > 0 . \ \blacksquare$$

Dimostrazione. Se $\{E_i\}$ è un δ-ricoprimento di E abbiamo immediatamente

$$\mathcal{H}^t_\delta(E) \leq \sum_i (\operatorname{diam} E_i)^t \leq \delta^{t-s} \sum_i (\operatorname{diam} E_i)^s$$

e la tesi segue prendendo l'estremo inferiore dell'ultimo membro. ∎

Corollario 3.14. *Se $0 \leq s < t$ e $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$, allora $\mathcal{H}^t(E) = 0$.* ∎

Dimostrazione. Basta prendere il limite per $\delta \to 0^+$ nella formula precedente. ∎

Combinando i risultati appena visti deduciamo che $\mathcal{H}^s(E) = 0$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato e $s > n$. Dato che $\mathbb{R}^n$ è unione numerabile di insiemi limitati, la σ-subadditività di $\mathcal{H}^s$ implica che, per $s > n$, risulta $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^n) = 0$, quindi che $\mathcal{H}^s(E) = 0$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Ha allora senso la definizione data di seguito.

Definizione 3.15. *Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definiamo la sua dimensione di Hausdorff mediante*

$$\dim_{\mathcal{H}} E = \inf \{ s \geq 0 : \ \mathcal{H}^s(E) = 0 \} . \ \blacksquare$$

Proposizione 3.16. *Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $s_0 = \dim_{\mathcal{H}} E$. Allora $s_0 \leq n$. Inoltre $\mathcal{H}^s(E) = 0$ per ogni $s > s_0$ e $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$ per ogni $s < s_0$.* ∎

Dimostrazione. La disuguaglianza $s_0 \leq n$ segue dalle considerazioni fatte prima della Definizione 3.15. Sia ora $s > s_0$. Allora esiste $s_1 < s$ tale che $\mathcal{H}^{s_1}(E) = 0$ e il Corollario 3.14 implica $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Sia infine $s < s_0$. Se fosse $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ otterremmo, sempre per il Corollario 3.14, che $H^t(E) = 0$ anche per ogni $t \in (s, s_0)$ contro la definizione stessa di $s_0 = \dim_{\mathcal{H}} E$. ■

Osservazione 3.17. Naturalmente l'ultima tesi del risultato precedente non dice nulla se $\dim_{\mathcal{H}} E = 0$. In tal caso si può solo dire che $\mathcal{H}^s(E) = 0$ per ogni $s > 0$ e può accadere che $\mathcal{H}^0(E) = +\infty$, come avviene per ogni insieme infinito numerabile. Inoltre, chiaramente, $\dim_{\mathcal{H}} E = s$ non appena $0 < \mathcal{H}^s(E) < +\infty$. Tuttavia, se $s = \dim_{\mathcal{H}} E$, non è detto che $\mathcal{H}^s(E)$ sia positiva e finita. Abbiamo ad esempio $\dim_{\mathcal{H}} \mathbb{R}^n = n$ e $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^n) = +\infty$, come sarà chiaro dal confronto con la misura di Lebesgue che trattiamo nel paragrafo successivo.

Proposizione 3.18. *Valgono le implicazioni*

$$E' \subseteq E'' \quad \textit{implica} \quad \dim_{\mathcal{H}} E' \leq \dim_{\mathcal{H}} E''$$
$$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \quad \textit{e} \quad \dim_{\mathcal{H}} E_i = s_0 \ \textit{per ogni } i \quad \textit{implicano} \quad \dim_{\mathcal{H}} E = s_0. \ ■$$

Dimostrazione. La prima implicazione è immediata: se $s > \dim_{\mathcal{H}} E''$ allora abbiamo $\mathcal{H}^s(E') \leq \mathcal{H}^s(E'') = 0$ per cui $\dim_{\mathcal{H}} E' \leq s$ e per l'arbitrarietà di s si conclude. Passiamo alla seconda. Per la prima già dimostrata si ha $\dim_{\mathcal{H}} E \geq s_0$. D'altra parte, se $s > s_0$, risulta $\mathcal{H}^s(E_i) = 0$ per ogni i da cui $\mathcal{H}^s(E) = 0$. Dunque si ha anche $\dim_{\mathcal{H}} E \leq s_0$. ■

4. Confronto con la misura di Lebesgue

In questo paragrafo confrontiamo le misure $\mathcal{H}^n$ e $\mathcal{L}^n$ sui boreliani di $\mathbb{R}^n$ e mostriamo che esse sono proporzionali. Ci servono due lemmi, che tuttavia non dimostriamo. Il primo di essi è una versione del Lemma di ricoprimento di Vitali.

Lemma 4.1. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, μ una misura di Borel in $\mathbb{R}^n$ tale che $\mu(K) < +\infty$ per ogni compatto K e $\mathcal{F}$ una famiglia di palle chiuse con la proprietà seguente: per ogni $x \in A$ e $\varepsilon > 0$, la famiglia $\mathcal{F}$ contiene una palla di centro x e raggio $\leq \varepsilon$. Allora è possibile estrarre da $\mathcal{F}$ una sottofamiglia numerabile $\{B_i\}$ tale che*

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \textit{se } i \neq j \qquad \textit{e} \qquad \mu\Big(A \setminus \bigcup_i B_i\Big) = 0. \ ■ \tag{4.1}$$

Lemma 4.2. *Sia $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ limitato. Allora vale la disuguaglianza*

$$\mathcal{L}^n(B) \leq \omega_n 2^{-n} (\operatorname{diam} B)^n \tag{4.2}$$

detta disuguaglianza isodiametrica. ■

Ricordiamo che $\omega_n = \mathcal{L}^n(B_1(0))$, per cui il secondo membro della (4.2) è la misura della palla che ha lo stesso diametro di B .

Teorema 4.3. *Risulta*

$$\mathcal{H}^n(B) = \mathcal{H}^n_\delta(B) = \frac{2^n}{\omega_n}\,\mathcal{L}^n(B) \tag{4.3}$$

per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *e* $\delta > 0$. ■

Dimostrazione. Supponiamo dapprima B limitato e dimostriamo che

$$\mathcal{H}^n(B) \le \frac{2^n}{\omega_n}\mathcal{L}^n(A). \tag{4.4}$$

Siano $\delta > 0$ e $A \supseteq B$ un aperto limitato. Sia infine $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le palle chiuse che hanno centri in punti di A e raggi $\le \delta$ e sono incluse in A . Grazie al Teorema 3.9 e al Lemma 3.12, possiamo applicare il Lemma 4.1 con $\mu = \mathcal{H}^n$. Possiamo dunque estrarre da $\mathcal{F}$ una famiglia numerabile $\{B_i\}$ verificante le (4.1). Posto per comodità $B' = \cup_i B_i$, osserviamo che

$$\mathcal{H}^n_\delta(B \setminus B') \le \mathcal{H}^n_\delta(A \setminus B') \le \mathcal{H}^n(A \setminus B') = 0.$$

Essendo $B = (B \setminus B') \cup (\cup_i B_i)$, abbiamo allora dalla Proposizione 3.8

$$\mathcal{H}^n_\delta(B) \le \mathcal{H}^n_\delta(B \setminus B') + \sum_i \mathcal{H}^n_\delta(B_i) = \sum_i \mathcal{H}^n_\delta(B_i) \le \sum_i (\operatorname{diam} B_i)^n$$

l'ultima disuguaglianza essendo dovuta al fatto che la famiglia costituita dal singolo B_i è un δ-ricoprimento di B_i . Ricordando il significato di ω_n e che $\mathcal{L}^n$ è σ-additiva deduciamo

$$\mathcal{H}^n_\delta(B) \le \sum_i (\operatorname{diam} B_i)^n = \frac{2^n}{\omega_n}\sum_i \mathcal{L}^n(B_i) = \frac{2^n}{\omega_n}\mathcal{L}^n(B') \le \frac{2^n}{\omega_n}\mathcal{L}^n(A)$$

e sfruttando l'arbitrarietà di δ otteniamo la (4.4).

Ora, sempre supponendo B limitato, dimostriamo che, per ogni $\delta > 0$, vale la disuguaglianza

$$\mathcal{L}^n(B) \le \frac{\omega_n}{2^n}\,\mathcal{H}^n_\delta(B). \tag{4.5}$$

Sia infatti $\{B_i\}$ un δ-ricoprimento di B . Siccome gli insiemi B_i possono non essere di Borel facciamo intervenire le loro chiusure, osservando che $\operatorname{diam}\overline{B}_i = \operatorname{diam} B_i$. Grazie alla disuguaglianza isodiametrica (4.2), otteniamo

$$\mathcal{L}^n(B) \le \sum_i \mathcal{L}^n(\overline{B}_i) \le \frac{\omega_n}{2^n}\sum_i (\operatorname{diam}\overline{B}_i)^n = \frac{\omega_n}{2^n}\sum_i (\operatorname{diam} B_i)^n$$

e la (4.5) segue dall'arbitrarietà del δ-ricoprimento.

Ancora supponendo B limitato, dimostriamo che valgono le (4.3). Prendendo il limite per $\delta \to 0^+$ nella (4.4) deduciamo

$$\mathcal{H}^n(B) \le \frac{2^n}{\omega_n}\,\mathcal{L}^n(B).$$

D'altra parte $\mathcal{H}^n_\delta(B) \le \mathcal{H}^n(B)$. Combinando con la (4.5) concludiamo che vale la (4.3).

Consideriamo infine il caso generale. Sia $\{B_k\}$ una successione crescente di insiemi di Borel limitati la cui unione sia B . Grazie alla (4.3) applicata a ogni B_k , tenendo conto che $\mathcal{H}^n$ e $\mathcal{L}^n$ sono misure su $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e non solo misure esterne e usando la continuità delle misure deduciamo

$$\mathcal{H}^n(B) = \frac{2^n}{\omega_n}\,\mathcal{L}^n(B).$$

D'altra parte $\mathcal{H}^n_\delta(B) \ge \mathcal{H}^n_\delta(B_k) = \mathcal{H}^n(B_k)$ per ogni k , da cui

$$\mathcal{H}^n_\delta(B) \ge \lim_{k\to\infty} \mathcal{H}^n(B_k) = \mathcal{H}^n(B).$$

Ma $\mathcal{H}^n(B) \ge \mathcal{H}^n_\delta(B)$. Combinando deduciamo la (4.3). ■

Osservazione 4.4. Risulta ora chiara la motivazione per l'uso delle misure normalizzate di cui si è parlato nell'Osservazione 3.7. La (4.3) diventa infatti

$$\mathcal{H}^n(B) = \mathcal{H}^n_\delta(B) = \mathcal{L}^n(B) \tag{4.6}$$

se $\mathcal{H}^n$ e $\mathcal{H}^n_\delta$ denotano le misure normalizzate.

Osservazione 4.5. Il Teorema 4.3 assicura in particolare che ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ di Borel la cui misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n(E)$ è positiva e finita ha dimensione di Hausdorff n . Segue che $\dim_{\mathcal{H}} \mathbb{R}^n = n$ e quanto abbiamo affermato nell'Osservazione 3.17 è convalidato.

5. Jacobiani

Ora ci occupiamo di funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenziabili nel caso $n \le m$. Se $n = m$ il termine jacobiano denota il modulo del determinante della matrice jacobiana e il caso generale costituisce un'estensione di questo significato. Osservato che, se $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, allora L^*L è simmetrico e semidefinito positivo, possiamo dare la seguente

Definizione 5.1. *Sia $x \in \mathbb{R}^n$ e sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenziabile in x con $n \le m$. Definiamo lo jacobiano di f in x mediante*

$$Jf(x) = \sqrt{\det(df_x^* \circ df_x)} \tag{5.1}$$

ove df_x^* sta per $(df_x)^*$, l'aggiunto del differenziale df_x di f in x . ■

Se, fissate le basi negli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, rappresentiamo df_x mediante la matrice A allora l'operatore $df_x^* \circ df_x$ si rappresenta con la matrice prodotto A^tA per cui abbiamo $Jf(x) = (\det A^tA)^{1/2}$. Notiamo che $A = (\partial f_i(x)/\partial x_j)$, la jacobiana di f in x , nel caso delle basi canoniche. Nel caso particolare $n = m$, tutte le applicazioni lineari in gioco operano da $\mathbb{R}^n$ in sé e possiamo decomporre il determinante nel prodotto di due determinanti. Ricordando che $\det df_x^* = \det df_x$, deduciamo che $Jf(x) = |\det df_x|$.

Osservazione 5.2. La formula $JL = \sqrt{\det(L^*L)}$ ha senso più in generale quando $L \in \mathrm{Hom}(V;W)$ ove V e W sono sottospazi di due spazi euclidei. In questo caso supponiamo $\dim V \le \dim W$ e possiamo considerare la decomposizione polare $L = OS$ di L. Vediamo allora che

$$L^*L = S^*O^*OS = S^*S$$

da cui $JL = \sqrt{\det(S^*S)} = |\det S|$. In particolare JL dipende solo dalla parte simmetrica della decomposizione polare e da questo fatto deduciamo che JL non dipende dal codominio W scelto per L. Posto infatti $W_0 = L(V)$, possiamo definire $L_0 \in \mathrm{Hom}(V;W_0)$ mediante $L_0x = Lx$ per ogni $x \in V$ e scrivere $L = IL_0$, ove $I \in \mathrm{Hom}(W_0;W)$ è l'inezione canonica. Allora, se $L_0 = OS$ è la decomposizione polare di L_0, quella di L è $L = (IO)S$, dato che anche IO è ortogonale, e deduciamo $JL = JL_0$.

Osservazione 5.3. Per il calcolo effettivo dello jacobiano possiamo usare la *formula di Binet–Cauchy*. Rappresentato il differenziale df_x con la matrice jacobiana $(\partial f_i(x)/\partial x_j)$, che denotiamo con $f'(x)$ per semplicità, vale la formula

$$(Jf(x))^2 = \sum_M (\det M)^2$$

la somma essendo estesa a tutte le sottomatrici $n \times n$ di $f'(x)$.

La formula precedente mostra anche che df_x ha rango n, cioè è iniettivo, se e solo se $Jf(x) > 0$. Alla stessa conclusione si arriva ricordando quanto detto sopra, cioè che la composizione $df_x^* \circ df_x$ si rappresenta con la matrice $f'(x)^t f'(x)$, il cui elemento generico di posto ij è il prodotto scalare delle colonne i-esima e j-esima della matrice $f'(x)$.

Notiamo che, specialmente in un contesto di varietà differenziabili, si usa spesso denotare con g_{ij} tale prodotto scalare e con g il determinante della matrice (g_{ij}). Con queste notazioni abbiamo allora $Jf = g^{1/2}$. In riferimento al linguaggio che useremo nel paragrafo successivo, osserviamo che nello stesso contesto di varietà differenziabili si usa più spesso parlare di volume anziché di area.

6. La formula dell'area

In tutto il paragrafo supponiamo $n \le m$. Il nome della formula si ispira al caso $n = 2$ e $m = 3$, nel quale la funzione f che inteviene può essere interpretata come rappresentazione parametrica di una superficie di $\mathbb{R}^3$. Noi non dimostreremo la formula dell'area nella sua generalità, ma ci limiteremo a un caso particolare comunque significativo. In tutto il paragrafo resterà inteso che le misure di Hausdorff si intendono normalizzate in modo che valga la (4.6) per ogni $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ecco le condizioni in cui ci mettiamo:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{lipschitziana e differenziabile con } n \le m \tag{6.1}$$

$$E \subseteq \mathbb{R}^n \quad \text{è di Borel} \tag{6.2}$$

$$f|_E \text{ è iniettiva} \quad \text{e} \quad Jf(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in E. \tag{6.3}$$

La versione della formula dell'area che vogliamo considerare è la seguente:

$$\mathcal{H}^n(f(E)) = \int_E Jf \, d\mathcal{H}^n. \tag{6.4}$$

Notiamo che l'integrale al secondo membro può essere inteso rispetto alla misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$, grazie alla (4.6) appena richiamata. ■

Il primo controllo doveroso riguarda la regolarità dell'insieme immagine $f(E)$ e della funzione integranda Jf: questi sono un insieme di Borel e una funzione di Borel rispettivamente, come si vede immediatamente applicando i lemmi che dimostriamo fra un attimo e tenendo conto delle ipotesi e dei due fatti seguenti: il calcolo di Jf corrisponde a operazioni sulle derivate parziali $\partial f_i / \partial x_j$ riconducibili all'applicazione di funzioni continue; la composizione $\psi \circ \phi$ di una funzione continua ψ con una funzione di Borel ϕ è ancora una funzione di Borel.

Lemma 6.1. *Le derivate parziali di una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenziabile sono funzioni di Borel.* ■

Dimostrazione. Detto e_j il j-esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$ e presa una successione $\{\varepsilon_k\}$ positiva infinitesima, abbiamo

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{f_i(x+\varepsilon_k e_j) - f_i(x)}{\varepsilon_k} \quad \text{per ogni } x$$

e vediamo la derivata come limite puntuale dei rapporti incrementali. Siccome f è continua, anche i rapporti incrementali sono funzioni continue e il limite puntuale è almeno di Borel per la teoria generale. ■

Lemma 6.2. *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua e iniettiva. Allora f manda insiemi di Borel in insiemi di Borel.* ■

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S} = \{B \subseteq \mathbb{R}^n : \ f(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)\}$. Osserviamo che le ipotesi fatte su f implicano che f manda compatti in compatti e che, qualunque siano i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ che intevengono, valgono le formule

$$f(\cup_i B_i) = \bigcup_i f(B_i) \quad \text{e} \quad f(\mathbb{R}^n \setminus B) = f(\mathbb{R}^n) \setminus f(B).$$

Deduciamo facilmente che $f(\mathbb{R}^n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ e che $\mathcal{S}$ è una σ-algebra contenente tutti i compatti di $\mathbb{R}^n$. Dunque $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, cioè la tesi. ■

Prima di entrare nel vivo dell'argomento premettiamo un'osservazione che riguarda l'insieme $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, che momentaneamente denotiamo con V per comodità. V è uno spazio vettoriale reale di dimensione nm rispetto alle operazioni naturali. Come avviene per ogni spazio di dimensione finita, tutte le norme in V sono equivalenti, cioè, se $|\cdot|_1$ e $|\cdot|_2$ sono due di esse, esistono due costanti c' e c'' tali che

$$|L|_1 \le c'|L|_2 \quad \text{e} \quad |L|_2 \le c''|L|_1 \quad \text{per ogni } L \in V\,.$$

Ciò comporta che le due norme inducono su V gli stessi concetti di convergenza, chiusura, densità, eccetera, per cui non è nemmeno necessario specificare la norma rispetto alla quale questi concetti vengono intesi. Notiamo che una norma in V è data dalla formula $|L| = \operatorname{Lip} L$, osservato che tutte le applicazioni lineari sono lipschitziane. In particolare, se $L_0 \in V$ e $r > 0$, la condizione $\operatorname{Lip}(L - L_0) \le r$ individua un intorno (chiuso) di L_0 e lo stesso discorso vale se al posto dell'intero V consideriamo un suo sottoinsieme.

Ricordiamo inoltre che, qualunque sia p, ogni sottoinsieme infinito A di $\mathbb{R}^p$ contiene un sottoinsieme D numerabile denso, cioè tale che $\overline{D} \supseteq A$. La stessa cosa si ripete per spazi isomorfi a spazi euclidei; in particolare essa vale per lo spazio $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ e per il suo sottoinsieme costituito dagli operatori iniettivi. ■

Nel corso delle dimostrazioni che seguono useremo la formula di trasformazione della misura di Lebesgue

$$\mathcal{L}^n(L(E)) = |\det L|\mathcal{L}^n(E) \tag{6.5}$$

ma solo in situazioni particolari, precisamente, per $L \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ iniettivo e E insieme di Borel. Per completezza diamo una possibile dimostrazione della (6.5).

Osserviamo che se la (6.5) vale per $L = L_1$ e $L = L_2$ allora essa vale anche per $L = L_1 L_2$. D'altra parte, grazie alla decomposizione polare e alla possibilità di diagonalizzare gli operatori simmetrici, vediamo che ogni $L \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ iniettivo si può presentare come composizione di un numero finito di operatori dei tipi seguenti: simmetria rispetto a un iperpiano coordinato, operatore diagonale definito positivo, operatore ortogonale. Basta allora verificare la validità della (6.5) in ciascuno di questi casi.

Siccome il primo è banale, supponiamo $L = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ con $\lambda_i > 0$. Sia dapprima E il rettangolo prodotto di n intervalli di estremi a_i e b_i. Allora $L(E)$ è il prodotto di n intervalli di estremi $\lambda_i a_i$ e $\lambda_i b_i$ e la (6.5) è vera ancora banalmente. Per σ-additività la (6.5) vale per tutti gli aperti. Se infine E è di Borel (più in generale misurabile secondo Lebesgue) basta scrivere la (6.5) per un generico aperto che include E e passare poi all'estremo inferiore.

Supponiamo ora $L \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ ortogonale. La dimostrazione diretta della (6.5) è laboriosa già nel caso di un rettangolo. Se presupponiamo invece la (4.6), allora la (6.5) segue banalmente dalle proprietà generali della misura di Hausdorff.

Se però seguiamo questa via, dobbiamo rivedere ciò che abbiamo utilizzato per dimostrare la (4.6). Questa formula si basa sulla (3.6), della quale diamo la dimostrazione naturale. Per comodità denotiamo con B_r^n la palla $B_r(0)$ di $\mathbb{R}^n$.

La formula $\mathcal{L}^n(B_r^n) = r^n \mathcal{L}^n(B_1^n)$ segue da quanto abbiamo detto per gli operatori diagonali e la chiave di volta sta nel mostrare che i due membri della prima delle (3.5), scritti per $s = n$, verificano la stessa formula ricorrente. Date le proprietà della funzione Gamma, basta scrivere una formula che lega ω_{n+2} a ω_n. Siccome B_1^{n+2} si presenta come l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times B_1^2$ tali che $|x|^2 < 1 - |y|^2$, abbiamo

$$\omega_{n+2} = \int_{B_1^2} (1 - |y|^2)^{n/2} \omega_n \, dy = 2\pi\omega_n \int_0^1 (1-\rho^2)^{n/2} \rho \, d\rho = \frac{2\pi\omega_n}{n+2}\,.$$

Occorre allora aver già dimostrato la formula di passaggio a coordinate polari nel piano in una situazione semplice, e ciò può essere fatto per via elementare.

Lemma 6.3. *Siano* $L_0 \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ *iniettivo e* $c > 1$. *Allora esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$\mathrm{Lip}(LL_0^{-1}) \le c \quad e \quad \mathrm{Lip}(L_0 L^{-1}) \le c$$

per ogni operatore $L \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ *iniettivo tale che* $\mathrm{Lip}(L - L_0) \le \delta$. ∎

Dimostrazione. Le disuguaglianze da ottenere equivalgono alle seguenti

$$|LL_0^{-1}y| \le c|y| \quad \text{e} \quad |L_0 L^{-1}z| \le c|z|$$

per ogni $y \in L_0(\mathbb{R}^n)$ e $z \in L(\mathbb{R}^n)$, dunque anche a

$$|Lx| \le c|L_0 x| \quad \text{e} \quad |L_0 x| \le c|Lx| \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n . \tag{6.6}$$

Mostriamo che basta prendere $\delta > 0$ verificante

$$1 + \lambda_0 \delta \le c \quad \text{e} \quad \lambda_0 \delta \le \frac{c-1}{c} \quad \text{ove} \quad \lambda_0 = \mathrm{Lip}\, L_0^{-1}.$$

Fissiamo dunque un tale δ e supponiamo $\mathrm{Lip}(L - L_0) \le \delta$. Per $x \in \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$|Lx| \le |L_0 x| + |Lx - L_0 x| \le |L_0 x| + \delta |x|$$

e analogamente

$$|L_0 x| \le |Lx| + \delta |x|.$$

D'altra parte $|x| = |L_0^{-1} L_0 x| \le \lambda_0 |L_0 x|$. Dalle due disuguaglianze precedenti deduciamo allora le (6.6). Abbiamo infatti

$$|Lx| \le (1 + \lambda_0 \delta)|L_0 x| \le c|L_0 x|,$$

cioè la prima, e anche

$$|L_0 x| \le |Lx| + \lambda_0 \delta |L_0 x| \le |Lx| + \frac{c-1}{c}|L_0 x| = |Lx| + |L_0 x| - \frac{1}{c}\,|L_0 x|$$

da cui immediatamente la seconda. ∎

Lemma 6.4. *Valgano le* (6.1)–(6.3). *Allora, per ogni* $t > 1$, *esistono una famiglia numerabile* $\{E_j\}$ *di insiemi di Borel e una famiglia numerabile* $\{L_j\}$ *di operatori lineari* $L_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *iniettivi tali che valgano le condizioni seguenti:*

$$\mathrm{Lip}\left(L_j \circ (f|_{E_j})^{-1}\right) \le t \quad e \quad \mathrm{Lip}\left(f \circ (L_j|_{E_j})^{-1}\right) \le t \quad \textit{per ogni } j \tag{6.7}$$

$$t^{-n} JL_j \le Jf(y) \le t^n JL_j \quad \textit{per ogni } j \textit{ e } y \in E_j \tag{6.8}$$

$$\{E_j\} \textit{ è una partizione di } E. \ ∎ \tag{6.9}$$

Dimostrazione. Precisiamo il significato delle funzioni inverse che compaiono nella (6.7): $(f|_{E_j})^{-1}$ denota l'inversa della funzione $f|_{E_j} : E_j \to f(E_j)$, che è biiettiva, e $(L_j|_{E_j})^{-1}$ ha significato analogo.

Fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che $(1/t) + \varepsilon < 1 < t - \varepsilon$ e due insiemi numerabili D e $\mathcal{D}$ densi rispettivamente in E e nel sottoinsieme di $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ costituito dalle applicazioni lineari iniettive. Consideriamo la famiglia numerabile

$$\mathcal{E} = \{E(x, L, i) : \ x \in D, \ L \in \mathcal{D}, \ i = 1, 2, \dots\}$$

ove l'insieme $E(x, L, i)$ è definito dalla condizione: $y \in E(x, L, i)$ se e solo se

$$y \in E \cap B_{1/i}(x) \tag{6.10}$$

$$\left(\frac{1}{t} + \varepsilon\right) |Lv| \le |df_y v| \le (t - \varepsilon)|Lv| \quad \text{per ogni } v \in \mathbb{R}^n \tag{6.11}$$

$$|f(z) - f(y) - df_y(z - y)| \le \varepsilon |L(z - y)| \quad \text{per ogni } z \in B_{2/i}(y). \tag{6.12}$$

Osserviamo subito che ciascuno degli insiemi $E(x, L, i)$ è di Borel. Chiaramente, la (6.11) è soddisfatta non appena essa valga per ogni $v \in \mathbb{Q}^n$. Dunque la (6.11) equivale a un'infinità numerabile di disuguaglianze sulle derivate parziali di f, che sono funzioni di Borel. D'altra parte, essendo f è continua, la (6.12) è soddisfatta non appena valga quest'altra infinità numerabile di disuguaglianze sulle derivate parziali

$$|f(y + v) - f(y) - df_y v| \le \varepsilon |Lv| \quad \text{per ogni } v \in B_{2/i}(0) \cap \mathbb{Q}^n .$$

Dunque $E(x, L, i)$ è intersezione numerabile di insiemi di Borel.

Dimostriamo ora che la famiglia $\mathcal{E}$ soddisfa parte di quanto è richiesto, precisamente che, per ogni $x \in D$, $L \in \mathcal{D}$ e $i = 1, 2, \dots$ risulta

$$\mathrm{Lip}\left(L \circ (f|_{E(x,L,i)})^{-1}\right) \le t \quad \text{e} \quad \mathrm{Lip}\left(f \circ (L|_{E(x,L,i)})^{-1}\right) \le t \tag{6.13}$$

$$t^{-n} JL \le Jf(y) \le t^n JL \quad \text{per ogni } y \in E(x, L, i). \tag{6.14}$$

Osserviamo subito che

$$y, z \in E(x, L, i) \qquad \text{implica} \qquad z \in B_{2/i}(y) \tag{6.15}$$

(come banalmente si vede dalla (6.10) applicata a y e a z) e procediamo nelle verifiche. Se $y \in E(x, L, i)$ e $z \in B_{2/i}(y)$, combinando la (6.12) con la (6.11) applicata a $v = z - y$ otteniamo le due catene di uguaglianze e disuguaglianze

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}|L(z - y)| \le |df_y(z - y)| - \varepsilon |L(z - y)| \\
&\quad \le |f(z) - f(y) - df_y(z - y)| + |f(z) - f(y)| - \varepsilon |L(z - y)| \le |f(z) - f(y)|, \\
&|f(z) - f(y)| \le |f(z) - f(y) - df_y(z - y)| + |df_y(z - y)| \\
&\quad \le \varepsilon |L(z - y)| + (t - \varepsilon)|L(z - y)| = t|L(z - y)|.
\end{aligned}$$

Riassumendo

$$\frac{1}{t}|L(z-y)| \le |f(z)-f(y)| \le t|L(z-y)| \quad \text{se } \; y \in E(x,L,i) \; \text{ e } \; z \in B_{2/i}(y)\,. \tag{6.16}$$

Siano $y', z' \in f(E(x,L,i))$. Posto $y = f^{-1}(y')$ e $z = f^{-1}(z')$, abbiamo $y, z \in E(x,L,i)$, da cui anche $z \in B_{2/i}(y)$ per la (6.15), per cui possiamo applicare la prima delle (6.16). Otteniamo

$$\frac{1}{t}|(L\circ f^{-1})(z') - (L\circ f^{-1})(y')| \le |z'-y'|$$

da cui la prima delle (6.13). Analogamente, siano $y', z' \in L(E(x,L,i))$. Posto $y = L^{-1}(y')$ e $z = L^{-1}(z')$, abbiamo $y, z \in E(x,L,i)$, da cui anche $z \in B_{2/i}(y)$ per la (6.15), per cui possiamo applicare la seconda delle (6.16). Otteniamo

$$|(f\circ L^{-1})(z') - (f\circ L^{-1})(y')| \le t|z'-y'|$$

e ciò dimostra la seconda delle (6.13).

Passiamo al secondo controllo. Siano $y \in E(x,L,i)$ e $df_y = OS$ e $L = O'S'$ le decomposizioni polari di df_y e di L . La (6.11) diventa

$$\left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)|O'S'v| \le |OSv| \le (t-\varepsilon)|O'S'v| \quad \text{per ogni } \; v\in\mathbb{R}^n\,.$$

Ma O e O' conservano le distanze; inoltre S' è biiettiva da $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}^n$ dato che $|\det S'|^2 = \det(L^*L) > 0$. Dunque quanto appena scritto equivale a

$$\left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)|w| \le |S(S')^{-1}w| \le (t-\varepsilon)|w| \quad \text{per ogni } \; w\in\mathbb{R}^n\,.$$

Posto per comodità $S'' = S(S')^{-1}$, seguono le implicazioni

$$\begin{array}{lll} |w|\ge 1 & \text{implica} & \dfrac{1}{t}+\varepsilon \le \left(\dfrac{1}{t}+\varepsilon\right)|w| \le |S''w| \\ |w|<1 & \text{implica} & |S''w| \le (t-\varepsilon)|w| < t-\varepsilon \end{array}$$

cioè le inclusioni

$$\begin{array}{l} S''(\mathbb{R}^n\setminus B_1(0)) \subseteq \mathbb{R}^n\setminus B_{\varepsilon+1/t}(0), \quad \text{cioè} \quad B_{\varepsilon+1/t}(0) \subseteq S''(B_1(0)) \\ S''(B_1(0)) \subseteq B_{t-\varepsilon}(0). \end{array}$$

Prendendo le misure di Lebesgue otteniamo le disuguaglianze

$$\left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)^n\omega_n \le \mathcal{L}^n(S''(B_1(0))) \le (t-\varepsilon)^n\omega_n.$$

Ma il membro centrale è dato da

$$\mathcal{L}^n(S''(B_1(0))) = \omega_n|\det S''| = \omega_n\frac{|\det S|}{|\det S'|} = \omega_n\frac{Jf(y)}{JL}$$

per cui deduciamo che

$$\left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)^n \le \frac{Jf(y)}{JL} \le (t-\varepsilon)^n$$

e immediatamente la (6.14).

Verifichiamo ora che $\mathcal{E}$ è un ricoprimento di E dimostrando che ogni punto $y \in E$ appartiene a un elemento di $\mathcal{E}$. Sfruttando la densità di $\mathcal{D}$ nell'insieme degli operatori lineari iniettivi e il Lemma 6.3 troviamo $L \in \mathcal{D}$ tale che

$$\operatorname{Lip}(L \circ (df_y)^{-1}) \le \left(\frac{1}{t}+\varepsilon\right)^{-1} \quad \text{e} \quad \operatorname{Lip}(df_y \circ L^{-1}) \le t-\varepsilon$$

e questa è la condizione (6.11). Scegliamo ora i in modo che

$$|f(z)-f(y)-df_y(z-y)| \le \frac{\varepsilon}{\operatorname{Lip}(L^{-1})}|z-y| \quad \text{per ogni } z \in B_{2/i}(y)$$

semplicemente applicando la definizione di df_y e osserviamo che per $z \in B_{2/i}(y)$ risulta

$$|f(z)-f(y)-df_y(z-y)| \le \frac{\varepsilon}{\operatorname{Lip}(L^{-1})}|z-y| = \frac{\varepsilon}{\operatorname{Lip}(L^{-1})}|L^{-1}Lz - L^{-1}Ly| \le \varepsilon|L(z-y)|$$

cioè che vale la (6.12). Scegliendo infine $x \in D \cap B_{1/i}(y)$, anche la (6.10) resta soddisfatta. Dunque $y \in E(x,L,i)$.

Siamo allora pronti a concludere. Scriviamo la famiglia $\mathcal{E}$ nella forma $\{E'_j\}$ e numeriamo con l'indice j l'operatore L tale che $E'_j = E(x,L,i)$. Allora tutte le condizioni richieste sono soddisfatte tranne il fatto che gli insiemi E'_j siano a due a due disgiunti. Ma per realizzare anche questa condizione basta sostituire $\{E'_j\}$ con la famiglia $\{E_j\}$ ottenuta con il procedimento consueto, vale a dire come segue

$$E_1 = E'_1 \quad \text{e} \quad E_j = E'_j \setminus \bigcup_{i<j} E_i \quad \text{per } j>1\,. \ \blacksquare$$

Teorema 6.5. *Valgano le* (6.1)–(6.3). *Allora vale la* (6.4). ■

Dimostrazione. Procediamo in due tappe. Supponiamo dapprima $f = L$ lineare e scriviamo la decomposizione polare $L = OS$. Abbiamo allora

$$\mathcal{H}^n(L(E)) = \mathcal{H}^n(O(S(E))) = \mathcal{H}^n(S(E))$$

grazie al Corollario 3.11. D'altra parte, per la (4.6) e la (6.5) applicata a S, abbiamo anche

$$\mathcal{H}^n(S(E)) = \mathcal{L}^n(S(E)) = |\det S|\mathcal{L}^n(E) = JL\mathcal{H}^n(E)$$

e la formula segue.

Consideriamo ora il caso generale e, fissato $t > 1$, applichiamo il Lemma 6.4 usandone le notazioni. Grazie alle (6.7) e alla Proposizione 3.10 otteniamo le due catene di uguaglianze e disuguaglianze

$$\mathcal{H}^n(L_j(E_j)) = \mathcal{H}^n((L_j \circ (f|_{E_j})^{-1} \circ (f|_{E_j}))(E_j) \le t^n \mathcal{H}^n(f(E_j))$$
$$\mathcal{H}^n(f(E_j)) = \mathcal{H}^n((f \circ (L|_{E_j})^{-1} \circ (L|_{E_j}))(E_j) \le t^n \mathcal{H}^n(L_j(E_j))$$

e usando il primo passo e le (6.8) deduciamo

$$t^{-2n}\mathcal{H}^n(f(E_j)) \le t^{-n}\mathcal{H}^n(L_j(E_j)) = t^{-n} JL_j \mathcal{H}^n(E_j) \le \int_{E_j} Jf \, d\mathcal{H}^n$$
$$\le t^n JL_j \mathcal{H}^n(E_j) = t^n \mathcal{H}^n(L_j(E_j)) \le t^{2n}\mathcal{H}^n(f(E_j)).$$

Sommando rispetto a j e usando la σ-additività di misura e integrale otteniamo

$$t^{-2n}\mathcal{H}^n(f(E)) \le \int_E Jf \, d\mathcal{H}^n \le t^{2n}\mathcal{H}^n(f(E)).$$

Siccome queste disuguaglianze valgono per ogni $t > 1$, possiamo prendere il limite di tutti i membri per $t \to 1^+$ e ottenere la (6.4). ∎

Possiamo specializzare la formula (6.4) dell'area in qualche caso semplice particolarmente significativo. Il primo di essi è dato da $n = 1$. Allora la matrice jacobiana $f'(x)$ coincide con la derivata $f'(x)$ pensata come vettore colonna e la matrice $f'(x)^t f'(x)$ che rappresenta $df_x^* \circ df_x$ è ridotta al solo scalare $|f'(x)|^2$. Abbiamo dunque $Jf = |f'|$ e la (6.4) diventa

$$\mathcal{H}^1(f(E)) = \int_E |f'(x)| \, dx. \tag{6.17}$$

Il secondo caso interessante e quello in cui $n = 2$ e $m = 3$. In tal caso il calcolo di Jf è agevole se si usa la formula di Binet–Cauchy. La matrice jacobiana $f'(x)$ ha per colonne le due derivate parziali di f, che momentaneamente denotiamo con $f_{,1}(x)$ e $f_{,2}(x)$ per semplicità, e $Jf(x)$ è la radice della somma dei quadrati dei determinanti delle tre sommatrici 2×2. Allo stesso risultato si arriva prendendo il modulo del prodotto vettoriale $f_{,1}(x) \times f_{,2}(x)$, per cui la (6.4) diventa

$$\mathcal{H}^2(f(E)) = \int_E \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \times \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right| dx.$$

L'ultimo caso è quello in cui $m = n+1$ e $f(E)$ è il grafico di una funzione $\phi : E \to \mathbb{R}$. Allora f (se la pensiamo definita solo in E) è la funzione $f(x) = (x, \phi(x))$, $x \in E$. Allora la matrice jacobiana $f'(x)$ ha la struttura seguente: l'ultima riga è la trasposta del vettore (colonna) $\nabla f(x)$ e la matrice ottenuta sopprimendo tale riga è la matrice unità di ordine n. Allora la formula di Binet–Cauchy fornisce facilmente $(Jf)^2 = 1 + |\nabla f|^2$ e la (6.4) diventa

$$\mathcal{H}^n(f(E)) = \int_E \sqrt{1 + |\nabla f(x)|^2} \, dx$$

che nei casi particolari $n = 1, 2$ fornisce la lunghezza e l'area di un grafico.

7. Generalizzazioni

Le ipotesi che abbiamo utilizzato per dimostrare la formula dell'area sono sovrabbondanti e la prima osservazione riguarda la regolarità di f. La (6.4), infatti, vale più in generale per funzioni solo lipschitziane. Il punto chiave è il Teorema di Rademacher, in base al quale ogni funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lipschitziana è differenziabile $\mathcal{L}^n$-quasi ovunque.

Osserviamo incidentalmente che, sebbene il caso lipschitziano sia abbastanza lontano dal caso C^1, le derivate di una funzione f lipschitziana, oltre a essere funzioni di Borel limitate, godono di buone proprietà, prima fra tutte la validità della formula di integrazione per parti

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\, \phi \, d\mathcal{L}^n = - \int_{\mathbb{R}^n} f_i \, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \, d\mathcal{L}^n$$

per ogni $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^1 nulla fuori di un compatto. Si noti che questa formula è falsa per funzioni solo differenziabili quasi ovunque (funzioni a scala di una sola variabile) e l'ipotesi aggiuntiva di continuità, inoltre, non è sufficiente (funzione di Cantor–Vitali).

La seconda osservazione riguarda il fatto che f può essere definita solo su E anziché nell'intero spazio ambiente. Abbiamo infatti il seguente risultato: se $f : E \to \mathbb{R}^m$ è lipschitziana, allora f è prolungabile a una funzione lipschitziana definita in tutto $\mathbb{R}^n$ e avente la stessa costante di Lipschitz di f. In questo caso è inteso che lo jacobiamo Jf che compare nella (6.4) è quello di un qualunque prolungamento lipschitziano di f. In particolare il secondo membro della (6.4) è indipendente dal prolungamento considerato.

Un'altra estensione riguarda invece la seconda delle ipotesi (6.3), che infatti può essere lasciata cadere. L'idea è che i punti in cui $Jf = 0$ non svolgono alcun ruolo, né al primo membro della (6.4), né al secondo.

Se invece si ignora la prima delle (6.3) le cose cambiano e la (6.4) stessa è falsa. Basta infatti pensare alla situazione seguente, nella quale, si noti, la seconda delle (6.3) invece è soddisfatta:

$$n = 1, \quad m = 2, \quad f(x) = (\cos x, \sin x), \quad E = [0, 3\pi].$$

In tal caso i due membri della (6.4) valgono 2π e 3π rispettivamente. L'immagine $f(E)$ è la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$, ma i suoi punti con ordinata positiva devono in qualche senso contare due volte essendo ottenuti due volte come immagini di punti di E, cioè hanno, tramite f, due controimmagini anziché una. La formula corretta è la seguente

$$\int_{f(E)} \mathcal{H}^0(E \cap f^{-1}(y)) \, d\mathcal{H}^n(y) = \int_E Jf(x) \, d\mathcal{H}^n(x)$$

e tiene conto appunto di questa molteplicità, dato che $\mathcal{H}^0$ è la misura che conta. ■

Il seguito del paragrafo è dedicato invece a due estensioni della (6.4) in due direzioni diverse da quelle prospettate sopra. Naturalmente anche per tali estensioni valgono discorsi analoghi a quelli fatti per il caso già trattato. Il primo risultato è una generalizzazione del teorema di cambiamento di variabile negli integrali multipli: il teorema classico si ottiene semplicemente supponendo $n = m$. Premettiamo un lemma, che costituisce la chiave di volta. Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ denotiamo con χ_A la sua funzione caratteristica.

Lemma 7.1. *Siano $\{a_j\}$ una successione reale positiva infinitesima tale che la serie $\sum_j a_j$ diverga, $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ e $h : E \to \mathbb{R}$ una funzione di Borel non negativa. Allora esiste una successione $\{E_j\}$ di sottoinsiemi di Borel di E tali che*

$$h(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{E_j}(x) \quad \textit{per ogni } x \in E\,. \;\blacksquare \tag{7.1}$$

Dimostrazione. Poniamo $E_1 = \{x \in E : \ h(x) \geq a_1\}$ e definiamo ricorsivamente gli insiemi $E_2, \ E_3, \ldots$ come segue

$$E_j = \left\{ x \in E : \ h(x) \geq a_j + \sum_{i<j} a_i \chi_{E_i}(x) \right\}.$$

Come si vede subito ragionando per induzione, gli insiemi E_j sono di Borel. Ora poniamo per comodità

$$S_j(x) = \sum_{i \leq j} a_i \, \chi_{E_i}(x) \quad \text{per } x \in E \text{ e } j = 1, 2, \ldots$$

e, ragionando sempre per induzione, dimostriamo che per ogni j vale la disuguaglianza

$$h(x) \geq S_j(x) \quad \text{per ogni } x \in E\,. \tag{7.2}$$

Se $j = 1$ il fatto è ovvio. Sia allora $j > 1$. Supponendo vera la (7.2) scritta con $j-1$ al posto di j deduciamo la (7.2) stessa. Se $x \in E_j$ allora

$$h(x) \geq a_j + \sum_{i<j} a_i \chi_{E_i}(x) = \sum_{i \leq j} a_i \chi_{E_i}(x) = S_j(x).$$

Se invece $x \notin E_j$, usando l'ipotesi di induzione, abbiamo

$$h(x) \geq S_{j-1}(x) = \sum_{i<j} a_i \chi_{E_i}(x) = \sum_{i \leq j} a_i \chi_{E_i}(x) = S_j(x).$$

Dunque la (7.2) vale per ogni j. Fissiamo ora $x \in E$. Da quanto appena dimostrato deduciamo in particolare che esistono infiniti valori di j tali che $x \notin E_j$. In caso contrario, infatti, esisterebbe $j_* \geq 1$ tale che

$$h(x) \geq \sum_{j_* \leq i \leq j} a_i \quad \text{per ogni } j \geq j_*$$

il che implicherebbe $h(x) = +\infty$ dato che la serie $\sum_i a_i$ diverge. Dunque esiste una successione strettamente crescente di indici $\{j_k\}$ tale che $x \notin E_{j_k+1}$ per ogni k, cioè

$$h(x) < a_{j_k} + \sum_{j \leq j_k} a_i \chi_{E_i}(x) \quad \text{vale a dire} \quad h(x) - S_{j_k}(x) < a_{j_k}\,.$$

Tenendo conto della (7.2) scritta con $j = j_k$ abbiamo

$$0 \le h(x) - S_{j_k}(x) < a_{j_k} \quad \text{per ogni } k\,.$$

Ma ciò implica che la sottosuccessione $\{S_{j_k}(x)\}$ converge a $h(x)$. Siccome $\{S_j(x)\}$ è monotona, concludiamo che essa stessa converge a $h(x)$. ■

Teorema 7.2. *Valgano le* (6.1)–(6.3). *Allora vale la formula*

$$\int_{f(E)} g(y)\, d\mathcal{H}^n(y) = \int_E g(f(x))\, Jf(x)\, d\mathcal{H}^n(x) \tag{7.3}$$

per ogni funzione di Borel $g : f(E) \to \mathbb{R}$ *non negativa.* ■

Dimostrazione. Fissiamo una successione $\{a_j\}$ nelle condizioni del lemma e, applicando il lemma stesso all'insieme E e alla funzione $h = g \circ f$, troviamo la successione $\{E_j\}$ verificante la (7.1). Grazie alla σ-additività degli integrali e tenendo conto dell'iniettività di f abbiamo allora le due catene di uguaglianze

$$\begin{aligned}
&\int_{f(E)} g(y)\, d\mathcal{H}^n(y) = \int_{f(E)} h(f^{-1}(y))\, d\mathcal{H}^n(y) = \sum_j a_j \int_{f(E)} \chi_{E_j}(f^{-1}(y))\, d\mathcal{H}^n(y) \\
&\quad = \sum_j a_j \int_{f(E)} \chi_{f(E_j)}(y)\, d\mathcal{H}^n(y) = \sum_j a_j \mathcal{H}^n(f(E_j))\,, \\
&\int_E g(f(x))\, Jf(x)\, d\mathcal{H}^n(x) = \sum_j a_j \int_E \chi_{E_j}(x)\, Jf(x)\, d\mathcal{H}^n(x) = \sum_j a_j \int_{E_j} Jf(x)\, d\mathcal{H}^n(x)
\end{aligned}$$

e la (7.3) segue applicando la formula (6.4) dell'area agli insiemi E_j. ■

Il risultato successivo riguarda invece una situazione in cui l'insieme E sia "sottile": in tal caso la (6.4) diventa $0 = 0$ e il fatto che l'integrando del secondo membro sia proprio Jf non è essenziale dato che E ha misura nulla. Procedendo poi come sopra, si ottiene anche una formula di cambiamento di variabile per gli integrali.

Precisamente, il caso che vogliamo considerare è quello in cui E è un sottoinsieme di Borel di una varietà Γ di classe C^1 e di dimensione k inclusa in $\mathbb{R}^n$. Ricordiamo il significato di questo termine.

Definizione 7.3. *Sia* $k \in [1, n]$ *un intero. Un sottoinsieme* Γ *di* $\mathbb{R}^n$ *è una varietà di classe* C^1 *e di dimensione* k *quando, per ogni* $x \in \Gamma$, *esiste una terna* $(\omega_x, \Omega_x, \phi_x)$ *con la proprietà seguenti:*

$$\omega_x \text{ è un aperto di } \mathbb{R}^k \tag{7.4}$$

$$\Omega_x \text{ è un aperto di } \mathbb{R}^n \text{ contenente } x \tag{7.5}$$

$$\phi_x : \omega_x \to \Gamma \cap \Omega_x \quad \text{è biiettiva e di classe } C_1 \text{ e } J\phi(y) > 0 \text{ per ogni } y \in \omega_x. \tag{7.6}$$

La funzione ϕ_x *è detta carta locale per il punto* x *.* ■

Se E è un sottoinsieme di Borel di una varietà di dimensione $k < n$, una formula significativa deve far intervenire la misura di Hausdorff $\mathcal{H}^k$ anziché quella n-dimensionale. Le condizioni in cui ci metteremo sono le seguenti:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{lipschitziana e differenziabile} \tag{7.7}$$

$$\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n \text{ è una varietà di classe } C^1 \text{ e di dimensione } k \le m \tag{7.8}$$

$$E \subseteq \Gamma \quad \text{è di Borel} \tag{7.9}$$

$$f|_E \text{ è iniettiva} \quad \text{e} \quad J^\Gamma f(x) > 0 \quad \text{per ogni } x \in E \tag{7.10}$$

ove $J^\Gamma f$ è un nuovo jacobiano che definiamo di seguito. Dimostreremo la formula

$$\mathcal{H}^k(f(E)) = \int_E J^\Gamma f \, d\mathcal{H}^k. \tag{7.11}$$

Mettiamo l'accento sull'ipotesi $k \le m$, che sostituisce la precedente $n \le m$.

Ricordiamo che, se vale la (7.8), in ogni punto $x \in \Gamma$ esiste il cosiddetto spazio tangente $T_x\Gamma$, il quale è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione k (l'"oggetto tangente" in x a Γ nel senso intuitivo del termine è il k-piano $x + T_x\Gamma$).

Definizione 7.4. *Valgano le* (7.7) *e* (7.8) *e sia* $x \in \Gamma$ *. Poniamo*

$$J^\Gamma f(x) = \sqrt{\det(d^\Gamma f_x^* \circ d^\Gamma f_x)} \tag{7.12}$$

ove $d^\Gamma f_x$ *è la restrizione di* df_x *a* $T_x\Gamma$ *e* $d^\Gamma f_x^*$ *è il suo aggiunto.* ■

Esempio 7.5. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita da $f(x) = \lambda x$, ove $\lambda \in (0, +\infty)$ è assegnato, e consideriamo una varietà Γ di dimensione $k \le n$. Abbiamo dunque $k \le m = n$. Si ha $Jf(x) = \lambda^n$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, mentre $J^\Gamma f(x) = \lambda^k$ per ogni $x \in \Gamma$ come ora mostriamo. Poniamo per comodità $V = T_x\Gamma$ e $L = d^\Gamma f_x \in \mathrm{Hom}(V; \mathbb{R}^n)$ e calcoliamo $L^* \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n; V)$. Se $w \in \mathbb{R}^n$ e $v \in V$ risulta

$$(L^* w) \cdot v = w \cdot (Lv) = \lambda w \cdot v \quad \text{da cui} \quad \left(\frac{1}{\lambda} L^* w - w \right) \cdot v = 0.$$

Segue che $(1/\lambda)L^*$ è l'operatore $\pi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n; V)$ di proiezione ortogonale su V, cioè che $L^* = \lambda\pi$. Allora $L^* L = \lambda^2 \mathbb{1}_V$ da cui $\det(L^* L) = \lambda^{2k}$ e $J^\Gamma f(x) = \lambda^k$.

Osservazione 7.6. Lo jacobiano $J^\Gamma f(x)$ è dunque legato non tanto a df_x quanto piuttosto alla sua restrizione $d^\Gamma f_x$ allo spazio tangente $T_x\Gamma$ dato che solo da questa dipende. Si può allora pensare che $d^\Gamma f_x$ dipenda a sua volta solo dalla restrizione di f a Γ, e ciò è vero e per dimostrarlo usiamo il fatto seguente: se ϕ è una carta locale per x, allora

$$T_x\Gamma = d\phi_t(\mathbb{R}^k) \quad \text{ove} \quad t = \phi^{-1}(x). \tag{7.13}$$

Ricordiamo poi che, per il teorema sulla composizione di funzioni differenziabili, abbiamo

$$d(f\circ\phi)_t v = df_x(d\phi_t v) \quad \text{per ogni } \ v\in\mathbb{R}^k\,. \tag{7.14}$$

Siano ora f_1 e f_2 due funzioni differenzibili che hanno la stessa restrizione a Γ. Siccome $f_1\circ\phi = f_2\circ\phi$, abbiamo anche $d(f_1\circ\phi)_t = d(f_2\circ\phi)_t$ e la (7.14) fornisce

$$d(f_1)_x w = d(f_2)_x w \quad \text{per ogni } \ w\in d\phi_t(\mathbb{R}^k)\,.$$

Combinando con la (7.13) deduciamo che i due differenziali coincidono su $T_x\Gamma$.

Lemma 7.7. *Valgano le* (7.7) *e* (7.8) *e siano $x\in\Gamma$ e ϕ una carta per x. Allora vale la formula*

$$J(f\circ\phi)(t) = J^\Gamma f(x)\, J\phi(t) \tag{7.15}$$

ove $t=\phi^{-1}(x)$. ■

Dimostrazione. Grazie alla (7.13) siamo autorizzati a pensare $d\phi_t$ come un operatore lineare a valori in $T_x\Gamma$ anziché in $\mathbb{R}^m$. In particolare la (7.14) può essere ora letta come

$$d(f\circ\phi)_t = d^\Gamma f_x\circ d\phi_t.$$

Ricordiamo inoltre (vedi Osservazione 5.2) che $J\phi(t)$ non dipende dallo spazio scelto come codominio di $d\phi_t$ e rimane dunque lo stesso anche con il nuovo significato di $d\phi_t$.

Sia ora $d^\Gamma f_x = OS$ la decomposizione polare di $d^\Gamma f_x$. Dunque, posto per comodità $V=T_x\Gamma$, si ha $S\in\mathrm{Hom}(V;V)$ e $O\in\mathrm{Hom}(V;\mathbb{R}^m)$ con S simmetrico e O ortogonale. Abbiamo allora $d(f\circ\phi)_t = OSd\phi_t$, da cui

$$\bigl(J(f\circ\phi)(t)\bigr)^2 = \det(d\phi_t^* S^* O^* OS d\phi_t) = \det(d\phi_t^* S^* S d\phi_t).$$

Trasformiamo ora l'ultimo membro nel prodotto di due determinanti. Fissata una base di V, rappresentiamo $d\phi_t$ e S mediante le due matrici A e B rispettivamente. Siccome queste sono matrici $k\times k$, abbiamo

$$\begin{aligned}\det(d\phi_t^* S^* S d\phi_t) &= \det(B^t A^t AB) = \det(B^t B)\det(A^t A) = \det(S^* S)\det(d\phi_t^* d\phi_t)\\ &= \det(S^* O^* OS)\det(d\phi_t^* d\phi_t) = \det(d^\Gamma f_x^* d^\Gamma f_x)\det(d\phi_t^* d\phi_t) = (J^\Gamma f(x))^2 (J\phi(t))^2\end{aligned}$$

e deduciamo immediatamente la (7.15). ■

Lemma 7.8. *Sia Γ una varietà di classe C^1 e di dimensione k. Allora Γ si può scrivere come unione numerabile di insiemi Γ_i di Borel ciascuno dei quali è l'immagine di una carta locale e ha misura $\mathcal{H}^k$ finita.* ■

Dimostrazione. Per ogni $x\in\Gamma$ sia $(\omega_x,\Omega_x,\phi_x)$ come nella Definizione 7.3 di varietà. Notiamo che Γ è l'unione di tutti gli insiemi $\Gamma\cap\Omega_x$ e che ciascuno di essi è un insieme di Borel per il Lemma 6.2.

Per soddisfare alcune delle condizioni dell'enunciato osserviamo che, sostituendo ogni ω_x con una palla la cui chiusura è inclusa nell'aperto originario e agendo di conseguenza su Ω_x e su ϕ_x, vediamo che non è restrittivo supporre che $\mathcal{H}^k(\omega_x)$ sia finita e che ϕ_x sia lipschitziana. Segue che anche $\mathcal{H}^k(\Gamma \cap \Omega_x)$ è finita e siamo ricondotti a dimostrare solo che è possibile passare dall'unione arbitraria all'unione numerabile. Sebbene questa possibilità sia garantita da un risultato generale sugli spazi topologici a basi numerabili di aperti, preferiamo dettagliare la dimostrazione nel caso particolare che stiamo trattando.

Sia $\{B_i\}$ l'insieme, che è numerabile, di tutte le palle di $\mathbb{R}^n$ che hanno raggio razionale e centro in un punto di coordinate razionali. Denotiamo con $\mathcal{N}$ l'insieme degli indici i tali che esista $x \in \Gamma$ tale che $\Omega_x \supseteq B_i$. Si noti che $\mathcal{N}$ è numerabile. Per ogni $i \in \mathcal{N}$ scegliamo $x \in \Gamma$ tale che $\Omega_x \supseteq B_i$ e poniamo $\Omega^i = \Omega_x$ e $\Gamma_i = \Gamma \cap \Omega^i$. Allora $\{\Omega^i\}_{i\in\mathcal{N}}$ è una famiglia numerabile di aperti di $\mathbb{R}^n$ e ciascuno dei Γ_i è l'immagine di una carta locale. Dimostriamo che l'unione della famiglia $\{\Gamma_i\}$ è Γ. Sia infatti $x \in \Gamma$. Siccome $x \in \Omega_x$ e Ω_x è un aperto di $\mathbb{R}^n$, una almeno delle palle B_i contiene x ed è inclusa in Ω_x. Allora, per definizione, l'indice i corrispondente appartiene a $\mathcal{N}$ e $\Omega^i \supseteq B_i$. Concludiamo che $x \in \Gamma_i$. ■

Osservazione 7.9. Dal lemma segue immediatamente che $\dim_{\mathcal{H}} \Gamma = k$. Basta infatti osservare che $\dim_{\mathcal{H}} \Gamma_i = k$ per ogni i e applicare la Proposizione 3.18.

Teorema 7.10. *Valgano le* (7.7)–(7.10). *Allora vale la* (7.11). ■

Dimostrazione. Supponiamo dapprima che E sia incluso nell'immagine di una carta ϕ. Posto $E' = \phi^{-1}(E)$, possiamo applicare il Teorema 6.5 alla funzione $f \circ \phi$ e all'insieme E', osservando che le ipotesi sono soddisfatte se n è sostituito da k. Otteniamo

$$\mathcal{H}^k(f(E)) = \mathcal{H}^k((f \circ \phi)(E')) = \int_{E'} J(f \circ \phi)\, d\mathcal{H}^k.$$

D'altra parte, per il Teorema 7.2 di cambiamento di varibili, abbiamo

$$\int_E J^\Gamma f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_{\phi(E')} J^\Gamma f(x)\, d\mathcal{H}^k(x) = \int_{E'} J^\Gamma f(\phi(t))\, J\phi(t)\, d\mathcal{H}^k(t).$$

Confrontando e tenendo conto del Lemma 7.7 concludiamo.

Passiamo ora al caso generale. Applichiamo il Lemma 7.8, presentiamo Γ come unione di una famiglia numerabile di suoi sottoinsiemi di Borel Γ_i ciascuno dei quali è l'immagine di una carta locale e ha misura $\mathcal{H}^k$ finita. Posto $E_i = E \cap \Gamma_i$ vediamo che E è unione numerabile di insiemi di Borel ciascuno dei quali è nelle condizioni del caso particolare già trattato. Allora si conclude immediatamente usando la σ-additività della misura $\mathcal{H}^k$ sui boreliani e quella dell'integrale negli spazi σ-finiti. ■

8. Poligonali e superfici poliedriche inscritte

Le trattazioni elementari della nozione di lunghezza di una curva seguono di solito un approccio diverso, basato sull'approssimazione della curva con poligonali inscritte. Vediamo ora come ciò sia in accordo con quanto abbiamo visto nei paragrafi precedenti. Per semplicità ci limitiamo a un concetto di curva piuttosto particolare: ad esempio una circonferenza non sarà una curva. Tuttavia altri casi interessanti, come quello della circonferenza, si ottengono per additività.

Precisiamo che per suddivisione di un intervallo $[a, b]$ intendiamo un sottoinsieme finito di $[a, b]$ contenente a e b. Se $\{t_0, \ldots, t_k\}$ è una suddivisione di $[a, b]$ possiamo assumere le notazioni in modo che la funzione $i \mapsto t_i$ sia strettamente crescente. Ciò verrà sempre fatto senza avviso specifico.

Definizione 8.1. *Siano I un intervallo compatto e $f : I \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Definiamo la variazione totale di f mediante*

$$\operatorname{Var} f = \sup \Big\{ \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \Big\} \tag{8.1}$$

l'estremo superiore essendo preso al variare di tutte le possibili suddivisioni di I. ∎

Abbiamo limitato la definizione al caso di funzioni continue solo perché saranno continue tutte le funzioni che consideriamo nel seguito. Segnaliamo che le funzioni f tali che $\operatorname{Var} f$ è finita si chiamano *funzioni a variazione limitata*. Sono funzioni a variazione limitata tutte le funzioni lipschitziane ma non tutte le funzioni continue.

Definizione 8.2. *Diciamo che un sottoinsieme Γ di $\mathbb{R}^n$ è una curva se esistono un intervallo compatto I e una funzione $f : I \to \Gamma$ biiettiva e continua. Ogni funzione f in queste condizioni si chiama rappresentazione parametrica o parametrizzazione di Γ.* ∎

Se Γ è una curva e $f : I \to \Gamma$ è una sua parametrizzazione, allora anche f^{-1} è una funzione continua. Segue che, se $g : J \to \Gamma$ è un'altra parametrizzazione di Γ, allora la funzione $g^{-1} \circ f : I \to J$ è ben definita ed è biiettiva e continua con l'inversa. Essa è strettamente monotona di conseguenza e ciò implica facilmente che $\operatorname{Var} f = \operatorname{Var} g$, per cui ha senso la definizione data di seguito.

Notiamo poi che il funzionale Var è additivo nel senso seguente: se $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è continua e $c \in (a, b)$, allora

$$\operatorname{Var} f = \operatorname{Var}(f|_{[a,c]}) + \operatorname{Var}(f|_{[c,b]}) \tag{8.2}$$

come si verifica senza difficoltà. Ciò implica, in particolare, la monotonia non decrescente di Var come funzione del secondo estremo dell'intervallo. Seguiranno ovvie proprietà di additività e di monotonia del funzionale lunghezza.

Definizione 8.3. *Siano Γ una curva e f una sua parametrizzazione. Poniamo*

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \operatorname{Var} f$$

e chiamiamo $\mathcal{L}(\Gamma)$ lunghezza di Γ. Diciamo poi che la curva Γ è rettificabile se la sua lunghezza è finita. ■

Esempio 8.4. Casi particolarmente semplici di curve sono i segmenti. Se $x', x'' \in \mathbb{R}^n$ il segmento S che li congiunge è l'immagine della funzione $f(t) = x' + t(x'' - x')$, $t \in [0,1]$. Sia ora $\{t_0, \ldots, t_k\}$ una suddivisione di $[0,1]$. Allora

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k} (t_i - t_{i-1})|x'' - x'| = |x'' - x'| \quad \text{da cui} \quad \mathcal{L}(S) = \operatorname{Var} f = |x'' - x'|.$$

D'altra parte, siccome f è una similitudine di rapporto $|x'' - x'|$, abbiamo anche

$$\mathcal{H}^1(S) = |x'' - x'| \cdot \mathcal{H}^1([0,1]) = |x'' - x'|$$

e concludiamo che

$$\mathcal{H}^1(S) = \mathcal{L}(S) = |x'' - x'|. \tag{8.3}$$

Osservazione 8.5. L'esempio precedente suggerisce un'interpretazione geometrica per le somme che compaiono nella (8.1) quando f è pensata come parametrizzazione di una curva Γ. Sia infatti $\{t_0, \ldots, t_k\}$ una suddivisione di $[a,b]$. Allora possiamo considerare i k segmenti S_i aventi come estremi i punti $f(t_{i-1})$ e $f(t_i)$ di Γ e dire che essi costituiscono la poligonale inscritta in Γ indotta dalla suddivisione considerata. A questa poligonale è naturale attribuire una lunghezza prendendo $\sum_i \mathcal{H}^1(S_i)$, e questa somma, grazie alla (8.3), coincide con la somma che compare nella (8.1). In particolare la lunghezza di Γ risulta essere l'estremo superiore delle lunghezze di tutte le poligonali inscritte.

Osserviamo però che, sebbene la parametrizzazione f sia iniettiva, i segmenti delle poligonali inscritte possono avere intersezioni di misura 1-dimensionale positiva, per cui la somma $\sum_i \mathcal{H}^1(S_i)$ può non coincidere con la misura dell'unione dei segmenti.

Definizione 8.6. *Sia Γ una curva. Una parametrizzazione $g : J \to \Gamma$ di Γ è detta parametrizzazione per lunghezza d'arco quando*

$$\operatorname{Var}(g|_{[s_1,s_2]}) = s_2 - s_1 \tag{8.4}$$

per ogni coppia di punti $s_1, s_2 \in J$ tali che $s_1 < s_2$. ■

Segnaliamo che la variabile indipendente di una parametrizzazione per lunghezza d'arco viene spesso denotato con s e detta *ascissa curvilinea*. Con le notazioni della definizione, risulta subito $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{L}^1(J)$, come si vede prendendo come s_1 e s_2 gli estremi di J. Inoltre g è lipschitziana con $\operatorname{Lip}(g) \le 1$ (di fatto vale l'uguaglianza), dato che $|g(s_2) - g(s_1)| \le \operatorname{Var}(g|_{[s_1,s_2]})$.

Proposizione 8.7. *Sia Γ una curva rettificabile. Allora esiste una parametrizzazione per lunghezza d'arco di Γ.* ■

Dimostrazione. Sia $f : [a,b] \to \Gamma$ una parametrizzazione. Definiamo $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mediante $\psi(t) = \mathrm{Var}(f|_{[a,t]})$. Tenendo conto dell'iniettività di f e dell'additività della variazione totale vediamo che, se $a \le c < d \le b$, allora

$$\psi(d) - \psi(c) = \mathrm{Var}(f|_{[c,d]}) \ge |f(d) - f(c)| > 0.$$

Dunque ψ è strettamente crescente. Verifichiamo ora che ψ è continua a destra in ogni punto di $[a,b)$. La dimostrazione risulta più chiara se usiamo la notazione

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \quad \text{se} \quad \sigma = \{t_0, \dots, t_k\}.$$

Siano dunque $c \in [a,b)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrari. Allora possiamo fissare una suddivisione $\sigma = \{t_0, \dots, t_k\}$ di $[c,b]$ tale che

$$S(\sigma) \ge \mathrm{Var}(f|_{[c,b]}) - \varepsilon.$$

Usando ora la continuità di f in c, troviamo un punto $t' \in (t_0, t_1)$ tale che

$$|f(t') - f(c)| \le \varepsilon.$$

Osservato che $\sigma' = \{t', t_2, \dots, t_k\}$ e $\sigma'' = \sigma \cup \{t'\}$ sono suddivisioni di $[t', b]$ e di $[c,b]$ rispettivamente e che $S(\sigma'') \ge S(\sigma)$, abbiamo allora

$$\mathrm{Var}(f|_{[t',b]}) \ge S(\sigma') = S(\sigma'') - |f(t') - f(c)| \ge S(\sigma) - \varepsilon \ge \mathrm{Var}(f|_{[c,b]}) - 2\varepsilon.$$

Sottraendo $\mathrm{Var}\, f$ e riarrangiando concludiamo che

$$\psi(t') \le \psi(c) + 2\varepsilon.$$

Ma $\psi(c) \le \psi(t) \le \psi(t')$ se $c \le t \le t'$, per cui

$$\psi(c) \le \psi(t) \le \psi(c) + 2\varepsilon \quad \text{per ogni } t \in [c, t'].$$

Ciò conclude la dimostrazione della continuità a destra e in modo analogo si controlla la continuità a sinistra in ogni punto di $(a,b]$. Dunque ψ è anche continua, per cui l'immagine di ψ è un intervallo compatto J e la funzione inversa $\psi^{-1} : J \to [a,b]$ è ben definita, biiettiva e continua. Poniamo $g = f \circ \psi^{-1}$ e verifichiamo che g è la parametrizzazione cercata. Chiaramente $g : J \to \Gamma$ è biiettiva e continua. Controlliamo che vale la (8.4). Siano $s_1, s_2 \in J$ tali che $s_1 < s_2$. Posto $t_i = \psi^{-1}(s_i)$, si ha $t_1 < t_2$ e risulta

$$s_2 - s_1 = \psi(t_2) - \psi(t_1) = \mathrm{Var}(f|_{[a,t_2]}) - \mathrm{Var}(f|_{[a,t_1]}) = \mathrm{Var}(f|_{[t_1,t_2]}) = \mathrm{Var}(g|_{[s_1,s_2]}). \ \blacksquare$$

Teorema 8.8. *Sia Γ una curva in $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathcal{L}(\Gamma) = \mathcal{H}^1(\Gamma)$.* $\blacksquare$

Dimostrazione. Dimostriamo le due disuguaglianze. Per dimostrare " $\leq$ " fissiamo una parametrizzazione $f:[a,b]\to\Gamma$ e una suddivisione $\{t_0,\ldots,t_k\}$ di $[a,b]$. Poniamo per comodità $x_i=f(t_i)$ e introduciamo i segmenti S_i di estremi x_{i-1} e x_i e le curve $\Gamma_i=f([t_{i-1},t_i])$. Denotiamo infine con π_i l'operatore di proiezione ortogonale sulla retta che include S_i e dimostriamo dapprima che per ogni i risulta

$$S_i\subseteq\pi_i(\Gamma_i).$$

Supponiamo il contrario. Allora esiste $\vartheta\in(0,1)$ tale che il punto $x=x_{i-1}+\vartheta(x_i-x_{i-1})$ appartiene a S_i e non a $\pi_i(\Gamma_i)$. In altre parole l'insieme $\pi_i^{-1}(x)$ non interseca Γ_i. Osservato che

$$\pi_i^{-1}(x)=\{y\in\mathbb{R}^n:\ (y-x)\cdot(x_i-x_{i-1})=0\}$$

consideriamo i due aperti

$$A=\{y\in\mathbb{R}^n:\ (y-x)\cdot(x_i-x_{i-1})>0\}\quad\text{e}\quad B=\{y\in\mathbb{R}^n:\ (y-x)\cdot(x_i-x_{i-1})<0\}.$$

Per quanto abbiamo appena detto il complementare della loro unione è $\pi_i^{-1}(x)$, per cui $\Gamma_i\subseteq A\cup B$. D'altra parte $\Gamma_i\cap A\ni x_i$ e $\Gamma_i\cap B\ni x_{i-1}$ e concludiamo che Γ_i non è un connesso pur essendo f continua. Dunque l'inclusione in esame vale. Combinando con l'Esempio 8.4 e osservando che $\operatorname{Lip}\pi_i=1$, concludiamo che

$$|x_i-x_{i-1}|=\mathcal{H}^1(S_i)\leq\mathcal{H}^1(\pi(\Gamma_i))\leq\mathcal{H}^1(\Gamma_i)\quad\text{per } i=1,\ldots,k.$$

Sommando e usando l'additività di $\mathcal{H}^1$ sui boreliani abbiamo

$$\sum_{i=1}^k|x_i-x_{i-1}|\leq\mathcal{H}^1(\Gamma)$$

e passando all'estremo superiore al variare della suddivisione otteniamo

$$\mathcal{L}(\Gamma)\leq\mathcal{H}^1(\Gamma)$$

cioè la prima delle due disuguaglianze da provare.

Se $\mathcal{L}(\Gamma)=+\infty$ non c'è più nulla da dimostrare. In caso contrario la Proposizione 8.7 fornisce una parametrizzazione $g:J\to\Gamma$ per lunghezza d'arco e ricordando che $\operatorname{Lip}g\leq1$ otteniamo

$$\mathcal{H}^1(\Gamma)\leq\mathcal{H}^1(J)=\mathcal{L}^1(J)=\mathcal{L}(\Gamma)$$

cioè l'altra disuguaglianza. ■

Il risultato successivo può essere espresso, se accettiamo un linguaggio impreciso, nel modo seguente: la lunghezza $\mathcal{L}(\Gamma)$ è limite delle lunghezze delle poligonali inscritte ottenuto al tendere a zero della massima delle ampiezze degli intervalli delle suddivisioni. Una forma "sequenziale" precisa del risultato sarebbe quella che ora descriviamo. Sia $f:I\to\Gamma$ una parametrizzazione di una curva $\Gamma\subset\mathbb{R}^n$ e consideriamo una successione

$\{S_j\}$ di suddivisioni di I. Per ogni j denotiamo con $t_0^j, \ldots, t_{k_j}^j$ i punti della suddivisione S_j e con ℓ_j la lunghezza dell'associata poligonale inscritta in Γ in accordo con l'Osservazione 8.5. Allora, se esiste una successione positiva infinitesima $\{\delta_j\}$ tale che $t_i^j - t_{i-1}^j \le \delta_j$ per $i = 1, \ldots, k_j$ e $j = 1, 2, \ldots$, si ha $\lim_{j\to\infty} \ell_j = \mathcal{L}(\Gamma)$.

Teorema 8.9. *Siano Γ una curva in $\mathbb{R}^n$ rettificabile e $f : I \to \Gamma$ una sua parametrizzazione. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \ge \mathcal{L}(\Gamma) - \varepsilon \tag{8.5}$$

per ogni suddivisione $\{t_0, \ldots, t_k\}$ di I tale che $|t_i - t_{i-1}| \le \delta$ per $i = 1, \ldots, k$. ■

Dimostrazione. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Allora, in base alla definizione stessa di lunghezza, possiamo scegliere una suddivisione $\{\tau_0, \ldots, \tau_p\}$ di I tale che

$$\sum_{j=1}^{p} |f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})| \ge \mathcal{L}(\Gamma) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8.6}$$

Sia $\delta_0 = \min_j(\tau_j - \tau_{j-1})$. Per l'uniforme continuità di f esiste $\delta \in (0, \delta_0)$ tale che $|f(t') - f(t'')| \le \varepsilon/(4p)$ non appena $|t' - t''| \le \delta$. Sia ora $\{t_0, \ldots, t_k\}$ come nell'enunciato. Essendo $\delta < \delta_0$ risulta

$$t_i - t_{i-1} < \tau_j - \tau_{j-1} \quad \text{per ogni } i \text{ e } j. \tag{8.7}$$

Ora distinguiamo due casi: ciascuno dei punti $\tau_1, \ldots, \tau_{p-1}$ è uno dei punti t_i oppure no. Nel primo caso basta usare la disuguaglianza triangolare e la (8.6) per avere

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \ge \sum_{j=1}^{p} |f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})| \ge \mathcal{L}(\Gamma) - \frac{\varepsilon}{2}$$

e abbiamo concluso.

Nel secondo consideriamo la suddivisione unione delle due e isoliamo i punti t_i davvero nuovi rispetto ai punti τ_j. Denotiamo con $\mathcal{J}$ l'insieme degli indici $j \in \{1, \ldots, p-1\}$ tali che $\tau_j \ne t_i$ per ogni i. Allora, tenendo conto della (8.7), vediamo che per ogni $j \in \mathcal{J}$ esiste uno e un solo indice i tale che $t_i < \tau_j < t_{i+1}$. Denotiamo con i_j tale indice. Abbiamo allora

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \ge S - S' - S'' \qquad \text{ove}$$

$$S = \sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| - \sum_{j\in\mathcal{J}} |f(t_{i_j+1}) - f(t_{i_j})| + S' + S''$$

$$S' = \sum_{j\in\mathcal{J}} |f(\tau_j) - f(t_{i_j})| \qquad \text{e} \qquad S'' = \sum_{j\in\mathcal{J}} |f(t_{i_j+1}) - f(\tau_j)|.$$

Siccome S è la somma associata alla suddivisione ottenuta prendendo tutti i punti τ_j e alcuni altri, abbiamo

$$S \geq \sum_{j=1}^{p} |f(\tau_j) - f(\tau_{j-1})| \geq \mathcal{L}(\Gamma) - \frac{\varepsilon}{2}$$

per la (8.6). D'altra parte, per ogni $j \in \mathcal{J}$, risulta $|\tau_j - t_{i_j}| \leq \delta$ e $|t_{i_j+1} - \tau_j| \leq \delta$ per costruzione, per cui

$$S' + S'' \leq 2p\, \frac{\varepsilon}{4p} = \frac{\varepsilon}{2}$$

da cui immediatamente

$$\sum_{i=1}^{k} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \geq S - S' - S'' \geq \mathcal{L}(\Gamma) - \varepsilon$$

e la dimostrazione è conclusa. ■

Se $f : I \to \Gamma$ è una parametrizzazione di una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ che sia anche differenziabile e lipschitziana e verifichi $f'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$ (condizioni queste che, come abbiamo osservato, possono essere indebolite), riunendo il Teorema 8.8 e la (6.17) con $E = I$ (caso particolare della formula dell'area), otteniamo

$$\int_I |f'(t)|\, dt = \mathcal{H}^1(\Gamma) = \mathcal{L}(\Gamma) = \operatorname{Var} f.$$

Nel risultato successivo dimostriamo, sia pure in ipotesi su f di buona regolarità, che il primo e l'ultimo membro di questa formula coincidono indipendentemente da ipotesi di iniettività e di non annullamento della derivata, cioè che la variazione totale può essere scritta in termini della derivata nel caso di funzioni regolari. Nel caso non iniettivo, se consideriamo l'interpretazione cinematica di f come legge oraria di un moto al variare del tempo $t \in I$, stiamo accettando che il punto mobile $f(t)$ possa occupare la stessa posizione in istanti diversi. Naturalmente, in questa situazione, stiamo misurando la lunghezza della strada percorsa dal punto mobile, lunghezza che può non coincidere con la misura $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ della traiettoria Γ dato che interi suoi tratti potrebbero essere stati percorsi più volte.

Proposizione 8.10. *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una funzione di classe C^1. Allora*

$$\operatorname{Var} f = \int_a^b |f'(t)|\, dt. \; ■ \tag{8.8}$$

Dimostrazione. Sia $\{t_0, \ldots, t_m\}$ una suddivisione di $[a,b]$. Allora

$$\sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{m} \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} f'(t)\, dt \right| \leq \sum_{j=1}^{m} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f'(t)|\, dt = \int_a^b |f'(t)|\, dt.$$

Prendendo l'estremo superiore al variare della suddivisione otteniamo la disuguaglianza "$\le$" al posto dell'uguaglianza della (8.8). Per quanto riguarda l'uguaglianza opposta, basta ottenerla "a meno di ε per ogni $\varepsilon > 0$". Sia dunque $\varepsilon > 0$. Per ipotesi le derivate f_i' delle componenti f_i di f sono uniformemente continue. Quindi esiste $\delta > 0$ tale che $|f_i'(t) - f_i'(\tau)| \le \varepsilon$ per ogni coppia di punti $t, \tau \in [a,b]$ verificanti $|t-\tau| \le \delta$ e per $i = 1, \dots, n$. Fissiamo una suddivisione $\{t_0, \dots, t_m\}$ di $[a,b]$ tale che $t_j - t_{j-1} \le \delta$ per $j = 1, \dots, m$. Per ogni j fissato applichiamo il Teorema del valor medio di Lagrange a f_i in $[t_{j-1}, t_j]$: troviamo τ_{ij} in tale intervallo tale che $f_i(t_j) - f_i(t_{j-1}) = (t_j - t_{j-1}) f_i'(\tau_{ij})$. Costruito il vettore $v_j = (f_1'(\tau_{1j}), \dots, f_n'(\tau_{nj}))$ otteniamo dunque

$$f(t_j) - f(t_{j-1}) = (t_j - t_{j-1})\, v_j \quad \text{e} \quad |f(t_j) - f(t_{j-1})| = (t_j - t_{j-1})\, |v_j|.$$

Deduciamo pertanto

$$\begin{aligned} &\int_{t_{j-1}}^{t_j} |f'(t)|\, dt - |f(t_j) - f(t_{j-1})| = \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f'(t)|\, dt - (t_j - t_{j-1})\, |v_j| \\ &= \int_{t_{j-1}}^{t_j} \bigl(|f'(t)| - |v_j|\bigr)\, dt \le \int_{t_{j-1}}^{t_j} |f'(t) - v_j|\, dt. \end{aligned}$$

Ma se $t \in [t_{j-1}, t_j]$ si ha $|t - \tau_{ij}| \le t_j - t_{j-1} \le \delta$, per cui

$$|f'(t) - v_j| \le \sum_{i=1}^{n} |f_i'(t) - f_i'(\tau_{ij})| \le n\varepsilon \quad \text{per ogni } t \in [t_{j-1}, t_j]$$

così che l'ultimo integrale della catena precedente risulta $\le n\varepsilon(t_j - t_{j-1})$. Sommando ora rispetto a j e usando la definizione di $\operatorname{Var} f$ concludiamo che

$$\int_a^b |f'(t)|\, dt \le \sum_{j=1}^{m} |f(t_j) - f(t_{j-1})| + n\varepsilon(b-a) \le \operatorname{Var} f + n\varepsilon(b-a). \ \blacksquare$$

Osservazione 8.11. Ci si può chiedere se i risultati trovati per le curve abbiamo estensioni a dimensioni superiori e la risposta è essenzialmente negativa. Per chiarire questo fatto immaginiamo di porre il problema in termini precisi.

Innanzi tutto occorre estendere le nozioni di curva e di poligonale inscritta a dimensioni superiori. Senza pretendere di generalizzare molto possiamo dire che un sottoinsieme Γ di $\mathbb{R}^n$ è una k-superficie quando esistono un insieme ω di $\mathbb{R}^k$ con interno non vuoto e una funzione $f : \omega \to \Gamma$ biiettiva e continua che chiameremo parametrizzazione di Γ (naturalmente potremmo richiedere a ω di avere qualche proprietà in più...). La suddivisione dell'intervallo viene ora rimpiazzata da una sua generalizzazione che, per evitare di parlare di complessi simpliciali, possiamo chiamare semplicemente triangolazione di ω e definire come segue.

Chiamiamo k-triangolo un sottoinsieme $T \subseteq \mathbb{R}^k$ che si possa presentare come il minimo convesso che contiene $k+1$ punti assegnati, che chiameremo vertici del k-triangolo. Notiamo che l'insieme dei vertici resta univocamente determinato dal triangolo T stesso se $\mathcal{H}^k(T) > 0$ e vedremo che la determinazione dei vertici è inessenziale nel caso opposto. Chiamiamo poi triangolazione di ω una famiglia finita $\{T_i\}$ di k-triangoli inclusi in ω verificanti qualche condizione di compatibilità, ad esempio che $\mathcal{H}^k(T_i \cap T_j) = 0$ se $i \neq j$ (o anche qualche condizione più restrittiva). Fissate una parametrizzazione $f : \omega \to \Gamma$ e una triangolazione $\{T_i\}$ di ω, consideriamo l'insieme $\{t_j\}$ dei vertici del generico k-triangolo T_i e il minimo convesso F_i di $\mathbb{R}^n$ che contine le immagini $f(t_j)$. Possiamo chiamare faccia della superficie poliedrica tale insieme F_i, chiamare superficie poliedrica inscritta in Γ l'insieme di tali facce e attribuirle $\sum_i \mathcal{H}^k(F_i)$ come misura.

Tutto ciò nel caso $k = 1$ ripropone quasi quanto abbiamo detto sopra se imponiamo a ω di essere un intervallo compatto: la differenza sta solo nel fatto che la triangolazione è una famiglia di subintervalli di ω essenzialmente disgiunti anziché una suddivisione dello stesso ω, il che non incide quando poi si vuole prendere l'estremo superiore delle lunghezze delle poligonali inscritte.

Il problema può allora essere posto nei seguenti termini: ci chiediamo se $\mathcal{H}^k(\Gamma)$ è l'estremo superiore dell'insieme costituito dalle misure delle superfici poliedriche inscritte in Γ. Ebbene la risposta è decisamente negativa per ogni $k > 1$, in quanto la congettura si rivela falsa già con $k = 2$ e in situazioni del tutto elementari, come quella di superfici cilindriche e sferiche di $\mathbb{R}^3$, per le quali l'estremo superiore è infinito. E non aiuta ad esempio limitarsi alle triangolazioni relative a k-triangoli di diametro piccolo, per cui anche l'estensione del Teorema 8.9 è problematica.

Esempio 8.12. Consideriamo la superficie cilindrica $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ data dal prodotto della circonferenza avente centro nell'origine di $\mathbb{R}^2$ e raggio r e dell'intervallo $[0,h]$ e controlliamo la validità delle ultime affermazioni. Prendiamo come parametrizzazione la seguente

$$f(\vartheta, z) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, z), \quad (\vartheta, z) \in \omega = [0, 2\pi] \times [0, h].$$

Siano ora $n, m \geq 1$ interi. Consideriamo i due triangoli di vertici

$$(0,0)\,,\ (2\pi/n, 0) \text{ e } (\pi/n, h/m) \quad \text{e} \quad (2\pi/n, 0)\,,\ (\pi/n, h/m) \text{ e } (3\pi/n, h/m)$$

e i triangoli T che si ottengono dai due precedenti mediante il gruppo di isometrie generato dalle traslazioni associate ai vettori $(2\pi/n, 0)$ e $(\pi/n, 2h/m)$ e dalla simmetria rispetto all'asse delle ascisse ϑ. Consideriamo infine la triangolazione di ω costituita dai triangoli T detti che restano inclusi in ω. Otteniamo $m(2n-1)$ triangoli isometrici e la parametrizzazione f induce una superficie poliedrica P inscritta in Γ costituita da altrettante facce, pure fra loro isometriche. Allora per calcolare la misura $A(m,n)$ che dobbiamo attribuire a P, cioè la somma delle aree delle facce, basta calcolare l'area di una di esse, la faccia F di vertici $A = f(0,0)$, $B = f(2\pi/n, 0)$ e $C = f(\pi/n, h/m)$, che è un triangolo isoscele di base AB. Siano H il piede dell'altezza corrispondente e C' la proiezione ortogonale di C sul piano $z = 0$. Si noti che $C' = f(\pi/n, h/m)$ sta sul cilindro, mentre H è il punto medio del segmento di estremi A e B. Dunque $C' \neq H$ e il triangolo di vertici C, H e C' è rettangolo in C'. Allora tutto può essere calcolato per via elementare. Detto $\alpha(m,n)$ l'angolo dei vettori $H-C$ e $C'-C$, abbiamo

$$\mathcal{H}^2(F) = |H-A|\cdot|C'-C| = r\sin\frac{\pi}{n}\cdot\frac{h}{m}\,\frac{1}{\cos\alpha(m,n)}$$

$$A(m,n) = m(2n-1)\cdot\mathcal{H}^2(F) = 2\pi rh\cdot\frac{n-1/2}{n}\cdot\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\cos\alpha(m,n)}\,.$$

Osservato che il prodotto che precede il reciproco del coseno nell'ultima formula converge a $2\pi rh$, cioè all'area corretta della superficie cilindrica, occorre studiare il comportamento del coseno al tendere di m e n all'infinito. Abbiamo

$$\frac{1}{\cos\alpha(m,n)} = \sqrt{1+\tan^2\alpha(m,n)} \quad \text{e} \quad \tan\alpha(m,n) = \frac{|C'-H|}{|C'-C|} = \frac{r\bigl(1-\cos(\pi/n)\bigr)}{h/m}$$

e la formula di Taylor del coseno fornisce, per un opportuno $\tau_n\in(0,1)$, la rappresentazione

$$\tan\alpha(m,n) = \frac{mr}{h}\cdot\frac{1}{2}\,(\pi/n)^2\cos\frac{\tau_n\pi}{n} = \frac{\pi^2 r}{2h}\cdot\frac{m}{n^2}\cdot\cos\frac{\tau_n\pi}{n}\,.$$

Siccome $\cos(\tau_n\pi/n)$ tende a 1 per $n\to\infty$, vediamo che tutto dipende dal comportamento del rapporto m/n^2. Siccome possiamo, volendo, imporre che il suo limite sia un arbitrario $\ell\in[0,+\infty]$, vediamo allora chiaramente, da un lato, che l'estremo superiore dell'insieme descritto da $A(m,n)$ al variare di m e n è $+\infty$ e, dall'altro, che, per ogni $\lambda\in[2\pi rh,+\infty]$, esistono successioni $\{m_k\}$ e $\{n_k\}$ divergenti tali che $\{A(m_k,n_k)\}$ tenda a λ. Inoltre, per avere l'area corretta $2\pi rh$ come limite, non basta imporre che $\{m_k\}$ e $\{n_k\}$ divergano, cioè che sia infintesima la successione dei diametri dei triangoli della triangolazione; occorre invece imporre che sia infinitesima la successione $\bigl\{m_k/n_k^2\bigr\}$. Si noti che questa condizione equivale al fatto che sia infinitesima la successione $\{\alpha(m_k,n_k)\}$ degli angoli, cioè che i triangoli inscritti in Γ così costruiti tendano ad adagiarsi sulla superficie stessa. Nella condizione estrema in cui la successione $\bigl\{m_k/n_k^2\bigr\}$ diverge i triangoli tendono a disporsi ortogonalmente rispetto a Γ. Concludiamo il discorso con la formula corretta

$$\mathcal{H}^2(\Gamma) = \liminf_{m,n\to\infty} A(m,n)$$

che suggerisce anche una congettura relativa a casi più generali.

9. Frattali autosimili

Con il termine generico *frattale* possiamo intendere sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$ di dimensione di Hausdorff non intera oppure di dimensione intera ma dotati di una struttura topologica che li rende lontanissimi dalle varietà. Il primo esempio di frattale è il ben noto insieme di Cantor, che denotiamo con $\mathcal{C}$ e che ha dimensione compresa fra 0 e 1. Esso gode anche di un'altra proprietà, per cui diciamo che $\mathcal{C}$ è autosimile: i due sottoinsiemi $\mathcal{C}\cap[0,1/3]$ e $\mathcal{C}\cap[2/3,1]$ costituiscono una partizione di $\mathcal{C}$ e sono simili a $\mathcal{C}$ stesso. Considerate infatti le due omotetie S_0 e S_1 di rapporto $1/3$ e centri 0 e 1, abbiamo $\mathcal{C} = S_0(\mathcal{C}) \cup S_1(\mathcal{C})$ e $S_0(\mathcal{C}) \cap S_1(\mathcal{C}) = \emptyset$.

In questo paragrafo vogliamo dare qualche indicazione sulla costruzione di frattali autosimili dimostrando un teorema di esistenza e unicità ed enunciando un risultato sulla dimensione di Hausdorff del frattale trovato. Ecco il quadro nel quale ci mettiamo:

$$S_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \quad \text{è una similitudine di rapporto } \lambda_j < 1\,, \quad j = 1, \ldots, m \tag{9.1}$$

Supponiamo inoltre le S_j diverse fra loro e definiamo $S : 2^{\mathbb{R}^N} \to 2^{\mathbb{R}^N}$ e λ mediante

$$S(A) = \bigcup_{j=1}^{m} S_j(A) \qquad \text{e} \qquad \lambda = \max_{1 \le j \le m} \lambda_j\,. \tag{9.2}$$

Il problema che ci poniamo è quello di trovare sottoinsiemi $K \subseteq \mathbb{R}^N$ tali che $S(K) = K$, insiemi che chiamiamo *invarianti* rispetto alla famiglia di similitudini considerata. Ma vediamo subito che dobbiamo formulare il problema diversamente. Consideriamo infatti la situazione che abbiamo introdotto a proposito dell'insieme di Cantor: oltre a $\mathcal{C}$, sono invarianti $\mathbb{R}$ e l'insieme vuoto. Conviene allora cercare solo i compatti non vuoti invarianti, nel qual caso troviamo solo $\mathcal{C}$, come sarà chiaro in seguito.

Lo strumento che intendiamo usare è il ben noto Teorema delle contrazioni di Banach, che enunciamo per la comodità del lettore.

Teorema 9.1. *Siano (X, d) uno spazio metrico completo e $f : X \to X$ una contrazione, cioè esista una costante $\lambda \in [0, 1)$ tale che $d(f(x), f(y)) \le \lambda\, d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$. Allora esiste uno e un solo $\overline{x} \in X$ tale che $f(\overline{x}) = \overline{x}$. Inoltre, se $x_0 \in X$ e se la successione $\{x_n\}$ di elementi di X è definita per ricorrenza dalle condizioni $x_{n+1} = f(x_n)$ per ogni $n \ge 0$, allora essa converge a $\overline{x}$.* ■

Per applicare il Teorema 9.1 occorre introdurre lo spazio metrico nel quale lavorare. Nel seguito usiamo la notazione

$$I_r(A) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ \operatorname{dist}(x, A) \le r\}$$

per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^N$ non vuoto e $r \in [0, +\infty)$. Notiamo che $I_0(A) = \overline{A}$.

Definizione 9.2. *Siano $A, B \subset \mathbb{R}^N$ due insiemi limitati e non vuoti. Poniamo*

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf\{r \ge 0 :\ A \subseteq I_r(B),\ B \subseteq I_r(A)\} \tag{9.3}$$

e chiamiamo $d_{\mathcal{H}}(A, B)$ distanza di Hausdorff di A da B. ■

Osservazione 9.3. Notiamo che la definizione ha senso in quanto l'insieme di cui si prende l'estremo inferiore è non vuoto dato che gli insiemi considerati sono limitati. Tale insieme, inoltre, è chiaramente una semiretta e si vede immediatamente che il suo estremo inferiore è di fatto un minimo. Abbiamo dunque

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) \le r \quad \text{se e solo se} \quad A \subseteq I_r(B) \quad \text{e} \quad B \subseteq I_r(A)$$

e $d_{\mathcal{H}}(A,B) = r$ se nessun $r' \in [0,r)$ gode della stessa proprietà. ■

Ci chiediamo ora se la distanza di Hausdorff è una metrica nell'insieme dei sottoinsiemi limitati non vuoti di $\mathbb{R}^N$ e la risposta è negativa. Tuttavia le cose funzionano se restringiamo $d_{\mathcal{H}}$ alla classe dei compatti non vuoti. Poniamo una volta per tutte

$$\mathcal{K} = \{K \subset \mathbb{R}^N : \ K \text{ è compatto non vuoto}\}. \tag{9.4}$$

Proposizione 9.4. *La distanza di Hausdorff $d_{\mathcal{H}}$ è una metrica in $\mathcal{K}$.* ■

Dimostrazione. Ovviamente valgono la non negatività e la simmetria. Proviamo la disuguaglianza triangolare. Se $A, B, C \in \mathcal{K}$, posto $r' = d_{\mathcal{H}}(A,B)$ e $r'' = d_{\mathcal{H}}(B,C)$, valgono le inclusioni

$$A \subseteq I_{r'}(B), \quad B \subseteq I_{r'}(A), \quad B \subseteq I_{r''}(C) \quad \text{e} \quad C \subseteq I_{r''}(B)$$

e deduciamo

$$A \subseteq I_{r'+r''}(C) \quad \text{e} \quad C \subseteq I_{r'+r''}(A)$$

concludendo che $d_{\mathcal{H}}(A,C) \le r' + r''$. Proviamo infine che solo due insiemi uguali possono avere distanza nulla. Supponiamo infatti $d_{\mathcal{H}}(A,B) = 0$. Allora valgono le due inclusioni $A \subseteq \overline{B}$ e $B \subseteq \overline{A}$. Siccome A e B sono chiusi deduciamo che $A = B$. ■

Osservazione 9.5. Si noti che l'ultima parte della dimostrazione mostra chiaramente che la distanza di Hausdorff non è una metrica nell'ambito dei limitati non vuoti: la condizione $d_{\mathcal{H}}(A,B) = 0$, infatti, equivale al fatto che A e B abbiano la stessa chiusura. ■

I risultati che seguono riguardano la completezza dello spazio metrico e l'esistenza e l'unicità del compatto non vuoto invariante. Le dimostrazioni risultano più chiare se alcune loro parti vengono isolate come lemmi.

Lemma 9.6. *Siano $\{K_n\}$ una successione non crescente di elementi di $\mathcal{K}$ e $K = \cap_n K_n$. Allora $K \in \mathcal{K}$ e $\{K_n\}$ converge a K rispetto alla metrica $d_{\mathcal{H}}$.* ■

Dimostrazione. Chiaramente K è chiuso e limitato, cioè compatto. Per vedere che K non è vuoto, prendiamo $x_n \in K_n$ per ogni n. Allora $\{x_n\}$ è una successione di elementi di K_1 e, dunque, ha una sottosuccessione $\{x_{n_i}\}$ convergente a un certo punto $x \in K_1$. Mostriamo che $x \in K$. Fissiamo infatti n. Per un certo indice j si ha $n_i \ge n$ per ogni $i \ge j$, da cui $x_{n_i} \in K_n$ per $i \ge j$. Siccome K_n è chiuso deduciamo che $x \in K_n$. Dall'arbitrarietà di n segue $x \in K$.

Venendo alla seconda tesi, dobbiamo provare che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice n' tale che $d_{\mathcal{H}}(K_n, K) \le \varepsilon$ per ogni $n \ge n'$. Siccome $K \subseteq K_n \subseteq I_\varepsilon(K_n)$ per ogni $\varepsilon > 0$ e n, dobbiamo dimostrare solo che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste n' tale che $K_n \subseteq I_\varepsilon(K)$ per ogni $n \ge n'$. Ragionando per assurdo, esistano $\varepsilon > 0$ e una successione strettamente crescente $\{n_i\}$ di indici tali che $K_{n_i} \not\subseteq I_\varepsilon(K)$ per ogni i. Per ogni i sia $x_i \in K_{n_i} \setminus I_\varepsilon(K)$. Allora $\operatorname{dist}(x_i, K) > \varepsilon$ per ogni i. Siccome $x_i \in K_1$ per ogni i e K_1 è compatto, possiamo estrarre una sottosuccession $\{x_{i_j}\}$ convergente a un punto $x \in K_1$. Ora, per ogni n, si ha subito che $x \in K_n$ dato che $x_{i_j} \in K_n$ per j abbastanza grande e K_n è chiuso. Dunque $x \in K$. Eppure risulta $\operatorname{dist}(x, K) = \lim_{j\to\infty} \operatorname{dist}(x_{i_j}, K) \geq \varepsilon$, il che è assurdo. ■

Teorema 9.7. *L'insieme* $\mathcal{K}$ *dei compatti non vuoti di* $\mathbb{R}^N$ *è uno spazio metrico completo rispetto alla distanza di Hausdorff.* ■

Dimostrazione. Sia $\{K_n\}$ una successione di Cauchy. Poniamo

$$K'_n = \overline{\bigcup_{i\geq n} K_i} \qquad \text{e} \qquad K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K'_n.$$

Essendo $\{K_n\}$ è limitata rispetto a $d_{\mathcal{H}}$, esiste $r > 0$ tale che $d_{\mathcal{H}}(K_n, K_1) \leq r$ per ogni n , per cui tutti i K_n sono inclusi in uno stesso limitato e ognuno dei K'_n è limitato. Allora ogni K'_n è anche compatto e ovviamente non vuoto. Grazie al lemma, abbiamo $K \in \mathcal{K}$ e $\{K'_n\}$ converge a K nel senso della metrica $d_{\mathcal{H}}$. Basta allora dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathcal{H}}(K_n, K'_n) = 0.$$

Sia $\varepsilon > 0$ e si fissi n' tale che $d_{\mathcal{H}}(K_i, K_n) \leq \varepsilon$ per ogni $i, n \geq n'$. Dimostriamo che $d_{\mathcal{H}}(K_n, K'_n) \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq n'$. Sia infatti $n \geq n'$. Si ha $K_n \subseteq K'_n \subseteq I_\varepsilon(K'_n)$, ovviamente. D'altra parte, per ogni $i \geq n$, si ha $d_{\mathcal{H}}(K_i, K_n) \leq \varepsilon$ da cui $K_i \subseteq I_\varepsilon(K_n)$. Segue allora

$$\bigcup_{i\geq n} K_i \subseteq I_\varepsilon(K_n) \quad \text{e quindi anche} \quad K'_n \subseteq I_\varepsilon(K_n).$$

Dunque $d_{\mathcal{H}}(K_n, K'_n) \leq \varepsilon$. ■

Lemma 9.8. *Siano* $A_j, B_j \in \mathcal{K}$ *per* $j = 1, \ldots, m$ *e si ponga*

$$A = \bigcup_{j=1}^{m} A_j \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{j=1}^{m} B_j\,.$$

Allora $d_{\mathcal{H}}(A, B) \leq \max_{1\leq j\leq m} d_{\mathcal{H}}(A_j, B_j)$. ■

Dimostrazione. Poniamo $r_j = d_{\mathcal{H}}(A_j, B_j)$ e $r = \max_j r_j$. Allora per ogni j

$$A_j \subseteq I_{r_j}(B_j) \subseteq I_r(B) \qquad \text{e} \qquad B_j \subseteq I_{r_j}(A_j) \subseteq I_r(A)$$

da cui $A \subseteq I_r(B)$ e $B \subseteq I_r(A)$ e la tesi. ■

Teorema 9.9. *Valgano le* (9.1) *e* (9.2). *Allora esiste uno e un solo* $K \in \mathcal{K}$ *tale che* $S(K) = K$. *Inoltre, se* $K' \in \mathcal{K}$ *e la successione* $\{K_n\}$ *è definita dalle condizioni*

$$K_0 = K' \qquad \text{e} \qquad K_{n+1} = S(K_n) \quad \textit{per ogni } n \geq 0 \tag{9.5}$$

risulta $K = \lim_{n\to\infty} K_n$ *nel senso della distanza* $d_{\mathcal{H}}$. ■

Dimostrazione. Grazie al Teorema 9.1 delle contrazioni e al Teorema 9.7, è sufficiente verificare che S manda $\mathcal{K}$ in sé ed è una contrazione rispetto alla metrica $d_{\mathcal{H}}$. Se $K \in \mathcal{K}$ allora $S_j(K) \in \mathcal{K}$ per ogni j da cui $S(K) \in \mathcal{K}$. Siano ora $K', K'' \in \mathcal{K}$ e $r = d_{\mathcal{H}}(K', K'')$. Allora $K' \subseteq I_r(K'')$ e $K'' \subseteq I_r(K')$, da cui

$$S_j(K') \subseteq I_{\lambda_j r}(S_j(K'')) \quad \text{e} \quad S_j(K'') \subseteq I_{\lambda_j r}(S_j(K')) \quad \text{per } j = 1, \ldots, m$$

cioè $d_{\mathcal{H}}(S_j(K'), S_j(K'')) \le \lambda_j r$ per ogni j . Il lemma fornisce allora

$$d_{\mathcal{H}}(S(K'), S(K'')) \le \max_{1 \le j \le m} \lambda_j r = \lambda\, d_{\mathcal{H}}(K', K'')$$

da cui la tesi essendo $\lambda < 1$. ■

Notiamo che, se $m = 1$, l'unica similitudine che dobbiamo prendere in considerazione è essa stessa una contrazione e, di conseguenza, ha un punto fisso x_0 . Allora l'insieme K dato dal Teorema 9.9 è $\{x_0\}$ e la situazione è completamente banale.

Supponiamo dunque $m > 1$ (senza più richiamare questa ipotesi) e cerchiamo indicazioni sulla dimensione di Hausdorff di K (usando le misure di Hausdorff non normalizzate dato che non ci interessano i rapporti con le misure di Lebesgue). Supponiamo di essere, per un certo $s > 0$, nella situazione particolarmente fortunata seguente (che implica $s = \dim_{\mathcal{H}} K$ e che non sempre si verifica): $0 < \mathcal{H}^s(K) < +\infty$ e $\mathcal{H}^s(S_i(K) \cap S_j(K)) = 0$ per $i \ne j$. Allora abbiamo $\mathcal{H}^s(K) = \sum_{j=1}^m \mathcal{H}^s(S_j(K)) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^s \mathcal{H}^s(K)$ e semplificando per $\mathcal{H}^s(K)$ deduciamo che

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j^s = 1. \tag{9.6}$$

Ecco allora che, in generale, siamo indotti a confrontare $\dim_{\mathcal{H}} K$ con la soluzione positiva s dell'equazione (9.6), soluzione che effettivamente esiste ed è unica, come ora controlliamo. Denotando infatti con $\phi(s)$ il primo membro della (9.6), ove s è ora un parametro positivo, vediamo che ϕ è una funzione continua e strettamente decrescente. Inoltre ϕ è infinitesima all'infinito e $\phi(0^+) = m > 1$. Allora $\phi(s) = 1$ per uno e un solo $s > 0$.

Proposizione 9.10. *Sia* s *la soluzione positiva dell'equazion* (9.6). *Allora*

$$\mathcal{H}^s(K) \le (\operatorname{diam} K)^s < +\infty \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H}^s(S_i(K) \cap S_j(K)) = 0 \quad \text{per } i \ne j\,. \ ■ \tag{9.7}$$

Dimostrazione. Se K è ridotto a un punto allora le (9.7) sono banalmente soddisfatte. Supponiamo dunque $\operatorname{diam} K > 0$ e osserviamo che la condizione $K = S(K)$ implica

$$K = S(S(K)) = \bigcup_{i,j=1}^m (S_i \circ S_j)(K).$$

Iterando, si vede che in generale vale l'uguaglianza

$$K = \bigcup_{j_1,\dots,j_p=1}^{m} (S_{j_1} \circ \ldots \circ S_{j_p})(K)$$

per ogni $p \ge 1$. In particolare, per ogni p fissato, la famiglia $\mathcal{F}_p$ descritta dagli insiemi $(S_{j_1} \circ \ldots \circ S_{j_p})(K)$ al variare di $j_1, \ldots, j_p$ in $\{1, \ldots, m\}$ è un ricoprimento di K costituito da insiemi di diametro positivo. Osserviamo ora che

$$\operatorname{diam}\bigl((S_{j_1} \circ \ldots \circ S_{j_p})(K)\bigr) = \lambda_{j_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_{j_p} \operatorname{diam} K \le \lambda^p \operatorname{diam} K.$$

Allora, se $\delta > 0$ e p è abbastanza grande in modo che $\lambda^p \operatorname{diam} K \le \delta$, la famiglia $\mathcal{F}_p$ è anche un δ-ricoprimento di K e abbiamo

$$\mathcal{H}^s_\delta(K) \le \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{m} \bigl(\operatorname{diam}((S_{j_1} \circ \ldots \circ S_{j_p})(K))\bigr)^s = \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{m} \lambda^s_{j_1} \cdot \ldots \cdot \lambda^s_{j_p} (\operatorname{diam} K)^s.$$

D'altra parte, dall'equazione (9.6) segue che

$$1 = \Bigl(\sum_{j=1}^{m} \lambda^s_j\Bigr)^p = \Bigl(\sum_{j_1=1}^{m} \lambda^s_{j_1}\Bigr) \cdot \ldots \cdot \Bigl(\sum_{j_p=1}^{m} \lambda^s_{j_p}\Bigr) = \sum_{j_1,\dots,j_p=1}^{m} \lambda^s_{j_1} \cdot \ldots \cdot \lambda^s_{j_p}.$$

Concludiamo che

$$\mathcal{H}^s_\delta(K) \le (\operatorname{diam} K)^s$$

e la prima delle (9.7) segue dall'arbitrarietà di δ. Per quanto riguarda la seconda, basta osservare che $\mathcal{H}^s(K) < +\infty$ e che la (9.6) implica

$$\mathcal{H}^s\Bigl(\bigcup_{j=1}^{m} S_j(K)\Bigr) = \mathcal{H}^s(K) = \sum_{j=1}^{m} \lambda^s_j\, \mathcal{H}^s(K) = \sum_{j=1}^{m} \mathcal{H}^s(S_j(K))$$

per cui nessuna delle mutue intersezioni può avere misura positiva. ∎

Dunque esiste uno e un solo compatto non vuoto K invariante rispetto alla famiglia (9.1) considerata e la prima delle (9.7) ne stima, in particolare, la dimensione:

$$\dim_{\mathcal{H}} K \le s. \tag{9.8}$$

Tuttavia questa stima può essere davvero troppo grossolana e avviene in generale che $\dim_{\mathcal{H}} K < s$. In tali condizioni la seconda delle (9.7) non è di alcun interesse dato che si ha $\mathcal{H}^s(K) = 0$ e dunque $\mathcal{H}^s(S_j(K)) = 0$ per ogni j. Ciò è sicuramente vero se $s > N$, e questo può effettivamente accadere.

Ad esempio, se riprendiamo la situazione introdotta all'inizio del paragrafo a proposito dell'insieme di Cantor e sostituiamo le omotetie S_0 e S_1 con quelle aventi gli stessi centri ma rapporto $\lambda \in [1/2, 1)$, l'insieme K dato dal Teorema 9.9 è l'intervallo $[0, 1]$, come si vede subito prendendo $K' = [0,1]$ nella (9.5). Ebbene un semplice calcolo mostra che la soluzione dell'equazione (9.6) è data da $s = \ln 2/\ln(1/\lambda)$ e, al variare di λ in $[1/2,1)$, il valore di s descrive tutto l'intervallo $[1,+\infty)$. In queste condizioni la stima è significativa solo se $\lambda = 1/2$ e questo caso rientra nel risultato che stiamo per enunciare. La sua dimostrazione, tuttavia, verrà omessa.

Definizione 9.11. *Diciamo che la famiglia* (9.1) *verifica la condizione dell'aperto quando esiste un aperto limitato A di $\mathbb{R}^N$ tale che*

$$S(A) \subseteq A \qquad e \qquad S_i(A) \cap S_j(A) = \emptyset \quad per \ \ i \neq j\,. \ \blacksquare \tag{9.9}$$

Teorema 9.12. *Con le ipotesi e le notazioni del Teorema 9.9 e della Proposizione 9.10, supponiamo che sia soddisfatta la condizione dell'aperto. Allora $\mathcal{H}^s(K) > 0$.* ■

Osservazione 9.13. Combinando con la Proposizione 9.10 e con l'Osservazione 3.17, deduciamo $\dim_{\mathcal{H}} K = s$. In queste condizioni è giustificato l'aggettivo *autosimile* che si attribuisce a K: le intersezioni che compaiono nella (9.7) sono trascurabili.

Si noti inoltre che, prendendo $K' = \overline{A}$ nella (9.5), otteniamo una successione decrescente e il suo limite rispetto alla misura di Hausdorff, cioè il compatto K invariante, è l'intersezione dei K_n grazie al Lemma 9.6. Segue in particolare che $K \subseteq \overline{A}$, il che fornisce anche un'indicazione su come cercare di verificare la condizione dell'aperto. ■

Il seguito del paragrafo è dedicato alla costruzione di esempi che rientrano nelle condizioni di tutti i risultati precedenti. Molti dei frattali che costruiamo sono connessi. Ribadiamo che al frattale di volta in volta considerato converge, rispetto alla distanza di Hausdorff, ogni successione $\{K_n\}$ costruita mediante la (9.5) a partire da un arbitrario compatto K_0 (in particolare a partire da un compatto ridotto a un solo punto). In aggiunta il limite è l'intersezione dei K_n se $K_1 \subseteq K_0$, e ciò avviene in particolare se K_0 è la chiusura di un aperto nelle condizioni della Definizione 9.11.

L'insieme di Cantor. Esso è descritto all'inizio del paragrafo. Siccome la condizione dell'aperto è soddisfatta con $A = (0,1)$, abbiamo $\dim_{\mathcal{H}} \mathcal{C} = \ln 2/\ln 3 \simeq 0.63$. Varianti di $\mathcal{C}$ si possono ottenere prendendo come similitudini le due omotetie di centri 0 e 1 e di rapporti $\lambda_1, \lambda_2 \in (0,1)$ diversi da $1/3$ ed eventualmente diversi fra loro. La condizione dell'aperto è soddisfatta con $A = (0,1)$ se $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$. Nel caso $\lambda_1 = 1/4$ e $\lambda_2 = 1/2$ la dimensione del frattale ottenuto è $s = \ln\phi/\ln 2$ ove $\phi = (1+\sqrt{5})/2$ è il rapporto aureo.

Frattali di dimensione prescritta. Sia $s > 0$. Se $s > N$, essendo $\dim_{\mathcal{H}} E \leq N$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^N$, nessun sottoinsieme può avere dimensione s. Sia dunque $s \leq N$. Per tentare di costruire un frattale $K \subset \mathbb{R}^N$ di dimensione s prendiamo $m > 1$ omotetie di rapporto $\lambda = m^{-1/s} < 1$ così che la (9.6) vale automaticamente. Inoltre la condizione dell'aperto è soddisfatta con le scelte seguenti: $m = 2^N$, che implica $\lambda \leq 1/2$, $A = (0,1)^N$ e come omotetie quelle aventi i centri nei 2^N vertici del cubo $[0,1]^N$. Tuttavia nel caso $s = N$ tutto ciò si banalizza: abbiamo infatti $\lambda = 1/2$ e $K = [0,1]^N$. Se invece $s < N$ si ottiene un frattale. In particolare, se $N > 1$, possiamo costruire frattali di dimensioni intere $s = 1, \dots, N-1$. Notiamo infine che, per ogni $N \ge 1$, la scelta $\lambda = 1/3$ corrisponde al caso $s = N \ln 2/\ln 3$ e fornisce la potenza $\mathcal{C}^N$ dell'insieme di Cantor.

Frattali di Sierpinski. Il più semplice è il *triangolo di Sierpinski*. Esso si ottiene prendendo le tre omotetie di rapporto $1/2$ aventi i centri nei vertici di un triangolo equilatero. La condizione dell'aperto è soddisfatta e la dimensione vale $s = \ln 3/\ln 2 \simeq 1.58$.

Il *pentagono di Sierpinski* si ottiene prendendo le cinque omotetie tutte di rapporto $\lambda = (3-\sqrt{5})/2$ aventi i centri nei vertici di pentagono regolare. La scelta di λ è fatta in modo che le cinque immagini del pentagono tramite le cinque omotetie abbiano a due a due un solo punto comune. La condizione dell'aperto è soddisfatta e la dimensione vale $s = \ln 5/|\ln \lambda| \simeq 1.67$. Disegni interessanti si ottengono se si applica la (9.5) a partire non tanto dal pentagono originario quanto piuttosto dalla stella a cinque punte "inscritta".

Simile al precedente è il *pentagono di Durer* (1525), che si ottiene prendendo anche una sesta omotetia, quella dello stesso rapporto λ avente centro nel centro del pentagono. La dimensione che si ottiene è $s = \ln 6/|\ln \lambda| \simeq 1.86$.

Il *tappeto di Sierpinski* si ottiene prendendo le otto omotetie di rapporto $1/3$ aventi i centri nei vertici e nei punti medi dei lati di un quadrato. La condizione dell'aperto è soddisfatta e la dimensione vale $s = \ln 8/\ln 3 \simeq 1.89$.

Il *tetraedro di Sierpinski* e la versione tridimensionale del triangolo e si ottiene prendendo le quattro omotetie di rapporto $1/2$ aventi i centri nei vertici di un tetraedro regolare. La condizione dell'aperto è soddisfatta e la dimensione vale $s = 2$.

La versione tridimensionale del tappeto di Sierpinski considerato sopra è la cosiddetta *spugna di Sierpinski-Menger*, che si ottiene prendendo le venti omotetie di rapporto $1/3$ aventi i centri negli otto vertici e nei dodici punti medi degli spigoli di un cubo. La sua dimensione è data da $s = \ln 20/\ln 3 \simeq 2.73$.

La curva di Koch. Questo è uno dei frattali più famosi e si ottiene prendendo le similitudini S_j, $j = 1, \dots, 4$, di $\mathbb{R}^2$ in sé, tutte di rapporto $1/3$, che ora descriviamo. Le prime due sono le omotetie aventi centri nei punti $(0,0)$ e $(1,0)$ e per costruire le altre consideriamo le due terne di punti (vertici di due triangoli equilateri, si noti)

$$\begin{aligned} &x = (0,0), && y = (1/2, -\sqrt{3}/2) && \text{e} \quad z = (1,0) \\ &x' = (1/3,0), && y' = (2/3,0) && \text{e} \quad z' = (1/2, \sqrt{3}/6). \end{aligned}$$

Allora S_3 è l'unica similitudine che trasforma x, y, z ordinatamente in x', y', z', mentre S_4 è quella che trasforma x, y, z ordinatamente in z', x', y'. In altre parole

$$S_3 = \mathcal{T}_{(1/3,0)} \circ \mathcal{O}^{1/3}_{(0,0)} \circ \mathcal{R}^{\pi/3}_{(0,0)} \quad \text{e} \quad S_4 = \mathcal{T}_{(-1/3,0)} \circ \mathcal{O}^{1/3}_{(1,0)} \circ \mathcal{R}^{-\pi/3}_{(1,0)}$$

ove, per $v, c \in \mathbb{R}^2$, $\lambda > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, abbiamo denotato con $\mathcal{T}_v$, $\mathcal{O}^\lambda_c$ e $\mathcal{R}^\alpha_c$ la traslazione che manda l'origine in v, l'omotetia di centro c e rapporto λ e la rotazione di centro c e angolo α, così che la formazione della curva di Koch si vede particolarmente bene se si prende $K' = [0,1] \times \{0\}$ nella (9.5). Per controllare che è soddisfatta la condizione dell'aperto osserviamo che, detta K la curva di Koch, l'aperto complementare di $K \cup K'$

ha una sola componente connessa illimitata. Allora come A si può prendere l'unione delle altre. Pertanto la dimensione di K è data da $s = \ln 4/\ln 3 \simeq 1.26$.

L'esagono di Sierpinski e i fiocchi di neve. La costruzione dell'esagono è analoga a quella del pentagono: si prendono le sei omotetie aventi centri nei vertici di un esagono regolare scegliendo il rapporto comune $\lambda = 1/3$, cioè in modo che le immagini dell'esagono tramite le sei omotetie considerate abbiano a due a due un solo punto comune. Il frattale K ottenuto ha dimensione di Hausdorff $s = \ln 6/\ln 3 = 1 + \ln 2/\ln 3 \simeq 1.63$.

Si consideri ora il complementare di K e si osservi che esso ha infinite componenti connesse di cui una sola illimitata. Ciascuna delle altre, tutte simili fra loro, è un *fiocco di neve*, cioè ha come frontiera l'unione delle tre curve di Koch che si costruiscono sui tre lati di un triangolo equilatero esternamente rispetto al triangolo stesso. ■

Concludiamo il paragrafo con un breve cenno sulla connessione tra frattali e sistemi dinamici discreti. Il caso più semplice è quello descritto dalla relazione ricorrente

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9.10}$$

ove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ sono assegnati. La successione $\{x_n\}$ costruita tramite la (9.10) si chiama orbita di x_0. Se f è una contrazione allora tutte le orbite convergono all'unico punto fisso di f. In caso contrario il problema che ci si pone è quello di vedere se le orbite convergono o meno e di "capire" quelle che non convergono. Ciò che spesso avviene, infatti, è che le orbite sono estremamente sensibili a piccole perturbazioni del dato iniziale x_0 e molte di esse sembrano presentare un comportamento caotico. Noi ci limitiamo a un esempio considerando la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalle formule

$$f(x) = 3x \quad \text{se } x \le 1/2 \qquad \text{e} \qquad f(x) = 3(1-x) \quad \text{se } x \ge 1/2 \tag{9.11}$$

e dimostrando il teorema che segue, anche se si potrebbe dire di più.

Teorema 9.14. *Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data dalla* (9.11) *e $\mathcal{C}$ l'insieme di Cantor e, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, si consideri la successione $\{x_n\}$ definita per ricorrenza mediante la* (9.10)*. Allora valgono le conclusioni seguenti:*

$$\textit{se } x_0 \in \mathcal{C} \quad \textit{allora} \quad x_n \in \mathcal{C} \textit{ per ogni } n \tag{9.12}$$

$$\textit{se } x_0 \notin \mathcal{C} \quad \textit{allora} \quad \textit{la successione } \{x_n\} \textit{ diverge.} \ ■ \tag{9.13}$$

Dimostrazione. Notiamo che nella (9.13) il limite deve essere $-\infty$ dato che ognuna delle successioni $\{x_n\}$ in esame è limitata superiormente. Conviene scrivere i punti di $[0, 1]$ in base 3, cioè nella forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} \quad \text{con } c_k \in \{0, 1, 2\}, \quad \text{che abbreviamo in} \quad x = 0, c_1 c_2 c_3 \ldots \tag{9.14}$$

Ricordiamo che, se $x \in [0, 1)$, vi è una unica rappresentazione di x nella forma (9.14) tale che per ogni $k \ge 1$ esista $i > k$ tale che $c_i \ne 2$, cioè, come si usa dire, che non presenta il periodo 2. Se invece, come noi intendiamo fare, si accetta la presenza del periodo 2, allora abbiamo: (i) anche $x = 1$ ha una tale rappresentazione, precisamente $0,22222\ldots$, come si vede immediatamente sommando la serie geometrica; (ii) hanno due rappresentazioni tutti e soli i punti $x \in (0,1)$ che possono essere rappresentati con la presenza del periodo 2; (iii) questi sono tutti e soli i punti $x \in (0,1)$ che possono essere rappresentati con la presenza del periodo 0. Abbiamo ad esempio

$$\frac{1}{3} = 0,100000\ldots = 0,022222\ldots$$

Queste considerazioni mostrano allora che $\mathcal{C}$ è costituito da tutti e soli i punti $x \in [0,1]$ tali che una almeno delle rappresentazioni (9.14) non contiene la cifra 1, e ciò si vede particolarmente bene se si considera la costruzione di $\mathcal{C}$ ottenuta con $K' = [0,1]$ nella (9.5).

Dimostriamo la (9.12) controllando che f trasforma $\mathcal{C}$ in se stesso. Sia infatti $x \in \mathcal{C}$. Siccome $f(0) = f(1) = 0 \in \mathcal{C}$ supponiamo senz'altro $x \in (0,1)$. Se $x \le 1/2$ allora $x \le 1/3$ e la sua rappresentazione è del tipo $x = 0,0c_2c_3\ldots$ con $c_k \ne 1$ per ogni k. Allora $f(x) = 3x = 0,c_2c_3\ldots$ e dunque appartiene a $\mathcal{C}$. Se $x \ge 1/2$ allora $f(x) = f(1-x)$ e, siccome $1 - x \in \mathcal{C}$, ricadiamo nel caso già esaminato.

Passiamo ora alla (9.13). Articoliamo la sua dimostrazione in varie tappe iniziando con un'osservazione preliminare:

$$\text{se } x_n < 0 \text{ per un certo } n \text{ allora } \{x_n\} \text{ diverge.} \tag{9.15}$$

Si ha infatti $x_{n+k} = 3^k x_n$ per ogni $k \ge 0$, da cui la divergenza della successione $\{x_n\}$.

I casi da esaminare sono due: $x_0 \notin [0,1]$ e $x_0 \in (0,1)\setminus\mathcal{C}$. Supponiamo $x_0 \notin [0,1]$. Se $x_0 < 0$ possiamo applicare la (9.15); se $x_0 > 1$ allora $x_1 < 0$ e ancora concludiamo.

Prima di considerare il secondo caso dimostriamo un risultato ausiliario. Per ogni $m \ge 1$ sia A_m l'insieme dei punti $x \in (0,1)\setminus\mathcal{C}$ che hanno una rappresentazione del tipo (9.14) con la proprietà seguente: $c_m = 1$ e $c_k \ne 1$ per ogni $k < m$. Dimostriamo che per ogni $m \ge 1$ vale l'implicazione:

$$\text{se } x_n \in A_m \text{ per un certo } n \text{ allora } \{x_n\} \text{ diverge.} \tag{9.16}$$

Ragioniamo per induzione su m. Sia $m = 1$ e sia n tale che $x_n \in A_1$. Allora $x_n \in (1/3, 2/3)$, da cui $x_{n+1} \notin [0,1]$ e $x_{n+2} < 0$. Dunque possiamo applicare la (9.15). Sia ora $m \ge 1$. Supponendo che valga la (9.16) e dimostriamo l'implicazione ottenuta dalla (9.16) sostituendo m con $m+1$. Sia n tale che $x_n \in A_{m+1}$. Allora $x = 0,c_1c_2\ldots$, $c_{m+1} = 1$ e $c_k \ne 1$ per ogni $k \le m$. In particolare $c_1 \ne 1$ e abbiamo i due casi $c_1 = 0$ e $c_1 = 2$. Se $c_1 = 0$ allora $x \in (0,1/3)$, da cui $x_{n+1} = 3x_n = 0,c_2c_3\ldots$. Dunque $x_{n+1} \in A_m$ e l'ipotesi di induzione assicura che $\{x_n\}$ diverge. Se $c_1 = 2$ allora $x_n \in (2/3,1)$ da cui $x_{n+1} = 3(1-x_n) = 0$. Ma risulta $1 - x = 0,c'_1c'_2\ldots$ con $c'_k = 2 - c_k$ per ogni $k \ge 2$ dato che $0,222\ldots = 1$. Dunque $x_{n+1} = 0,c'_2c'_3\ldots$, per cui $x_{n+1} \in A_m$ e ancora concludiamo. Dunque la (9.16) vale per ogni $m \ge 1$.

Consideriamo finalmente il caso lasciato in sospeso: $x \in (0,1)\setminus\mathcal{C}$. Osservato che l'insieme $(0,1)\setminus\mathcal{C}$ è proprio l'unione degli A_m, deduciamo che x_0 appartiene a uno degli A_m e la divergenza della successione segue dalla (9.16). ■