Problemi di Analisi matematica elementare ma non troppo

Gianni Gilardi

Collegio Ghislieri, primavera 2013

Queste pagine costituiscono il materiale che ho preparato in vista di un corso tenuto presso il Collegio Ghislieri nel 2013. Tuttavia, molto del contenuto, che è particolarmente abbondante, non è stato usato. La parte più corposa riguarda esercizi spesso enunciati in forma vaga, come problemi da affrontare con il contributo attivo degli studenti. L'esempio tipico, infatti, consiste nella discussione di un'affermazione: si sta chiedendo di impostare un quadro in cui l'affermazione diventi significativa e di fornire ipotesi che la rendano vera. Se il problema è già ben posto nel quesito ma la risposta al quesito stesso è negativa, resta inteso che si chiede di aggiungere ipotesi che portino a qualche risultato positivo. Questi esercizi richiedono riflessione e senso critico più che calcoli complessi, ma di norma comportano qualche calcolo. Accanto a questi, propongo una serie di domande a ciascuna delle quali occorre rispondere "vero" o "falso", eventualmente fiutando la risposta esatta senza essere in grado di giustificarla rigorosamente.

Il materiale è organizzato come segue. Nel primo paragrafo introduco qualche notazione e richiamo alcune definizioni, che possono essere di tipo standard o meno. Nel secondo e nel terzo paragrafo presento gli esercizi e le domande. I tre paragrafi successivi riguardano aiuti relativi ad alcuni dei problemi del secondo paragrafo, aiuti che sono rispettivamente: *a*) indicazioni nella direzione di una dimostrazione o della formulazione di una congettura; *b*) le risposte esatte o possibili conclusioni; *c*) aiuti ulteriori, che seguono le notazioni di aiuti già forniti, nella direzione della verifica della correttezza della risposta esatta. Tuttavia tendo ad evitare soluzioni complete, anche perché le conclusioni potrebbero andare in varie direzioni diverse, come nel caso della costruzione di controesempi. Nell'ultimo paragrafo elenco le risposte esatte alle domande del terzo. Il materiale è disposto in ordine sparso, ma gli esercizi correlati fra loro sono consecutivi e il contenuto di un esercizio può essere utile per la risoluzione dell'esercizio successivo. Ma può anche accadere che il testo dell'esercizio successivo possa suggerire come risolvere l'esercizio precedente. Per evitare di essere influenzati conviene leggere i testi uno alla volta.

Le introduzioni delle notazioni, gli esercizi e le domande seguono una numerazione progressiva all'interno dei rispettivi paragrafi. Nei paragrafi successivi la numerazione fa riferimento ai numeri dell'esercizio o della domanda cui si stanno dando informazioni o risposte. La numerazione delle formule è progressiva all'interno dei paragrafi.

---

1. Notazioni e definizioni

1.1. Se $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, con $B_r^n(x)$ denotiamo l'usuale palla aperta di $\mathbb{R}^n$, cioè l'insieme costituito dai punti $y \in \mathbb{R}^n$ tali che $|y - x| < r$. Se il valore di n è chiaro dal contesto usiamo la notazione abbreviata $B_r(x)$. Se $x = 0$ scriviamo poi B_r^n o B_r.

1.2. Se A è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ nel senso della misura n-dimensionale ordinaria, denotiamo la sua misura con $\operatorname{mis}_n A$ oppure con $|A|$.

1.3. Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Poniamo

$$\operatorname{epi} f = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\} \quad \text{e} \quad \operatorname{ipo} f = \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\}.$$

Con $\operatorname{graf} f$ denotiamo il grafico di f.

1.4. Siano A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^n$ e $\alpha \in (0, 1]$. Ricordiamo che una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$ si dice hölderiana di esponente $\alpha \in (0, 1]$ quando esiste $L \geq 0$ tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in A.$$

Nel caso $\alpha = 1$ si dice più spesso che f è lipschitziana. Se Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $k > 0$, una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è detta di classe $C^{k,\alpha}$ se è di classe C^k e tutte le sue derivate di ordini $j = 0, \ldots, k$ sono hölderiane di esponente α.

1.5. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $T \in \mathbb{R}$ non nullo, diciamo che f è T-periodica (o periodica di periodo T, oppure che T è un periodo per f) quando $f(x + T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e diciamo che f è periodica se ha un periodo non nullo.

1.6. Diciamo che $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è analitica quando ogni $x \in \mathbb{R}$ ha un intorno in cui f è la somma di una serie di potenze di centro x.

1.7. Per p reale non nullo e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in (0, +\infty)^n$, il numero reale definito da

$$m_p(x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k^p \right)^{1/p}$$

si chiama media di ordine p dei numeri reali $x_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Il nome "media" è giustificato dalle relazioni

$$\begin{aligned} &\min_{k=1,\ldots,n} x_k \leq m_p(x) \leq \max_{k=1,\ldots,n} x_k \\ &m_p(x) = c \quad \text{se} \quad x_k = c \quad \text{per ogni } k \\ &m_p(\lambda x) = \lambda m_p(x) \quad \text{per } \lambda > 0. \end{aligned}$$

La definizione si estende al caso $x_k \geq 0$ se $p > 0$. La media di ordine p si chiama aritmetica, quadratica e armonica rispettivamente nei casi $p = 1, 2, -1$. Il numero reale

$$g(x) = \Big(\prod_{k=1}^{n} x_k \Big)^{1/n}$$

si chiama invece media geometrica dei numeri dati.

2. Esercizi

2.1. Dare una dimostrazione rapidissima dell'estensione all'ambito complesso di tutte le formule di trigonometria di ordinaria amministrazione, ad esempio $\sin 2x = 2\sin x\cos x$.

2.2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $f(x) > 0$ per $x < 0$ e $f(1/n) = 0$ per ogni intero $n \geq 1$. Che si può dire della sviluppabilità di f in serie di Taylor di centro l'origine? Esibire una funzione elementare a tratti nelle condizioni dette.

2.3. Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ e si ponga $f(z) = \sum_{n=0}^\infty z^{2^n}$ per $z \in D$. Si dimostri che f non ha prolungamenti propri olomorfi.

2.4. Discutere l'affermazione seguente: ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica e non costante ha un periodo positivo minimo, cioè esiste $T > 0$ tale che f sia T-periodica e non sia τ-periodica per alcun $\tau \in (0, T)$.

2.5. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo $T > 0$. Si dimostri che la media di φ è la stessa su ogni intervallo di ampiezza T. Questo risultato si estende al caso in cui l'ipotesi di continuità è sostituita dall'integrabilità su ogni intervallo limitato?

2.6. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo $T > 0$ e sia μ la sua media su $[0, T]$. Si dimostri che

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^x \varphi(ny)\, dy = \mu x \quad \text{uniformemente in } \mathbb{R}.$$

2.7. Siano $\ell > 0$ e $c : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e strettamente positiva. Sia inoltre $f : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ continua. Si dimostri che esiste una e una sola funzione $u : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ ("mezza" corda elastica stazionaria) di classe C^1 che verifica le condizioni seguenti:

$$cu' \text{ è di classe } C^1 \quad \text{e} \quad -\frac{d}{dx}\bigl(c(x)u'(x)\bigr) = f(x) \quad \text{per ogni } x \in [0, \ell] \tag{2.1}$$

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u'(\ell) = 0. \tag{2.2}$$

La (2.1) può essere riscritta come $-c'u' - cu'' = f$?

2.8. Sia $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, periodica e strettamente positiva e si definisca $p_n(x) = p(nx)$ per $x \in \mathbb{R}$ e $n = 1, 2, \ldots$. In relazione all'Esercizio 2.7, si denoti con u_n la soluzione del problema (2.1)-(2.2) corrispondente al coefficiente c dato da $c(x) = p_n(x)$ per $x \in [0, \ell]$. Si dimostri che la successione $\{u_n\}$ converge uniformemente a una funzione u di classe C^1 che risolve il problema (2.1)-(2.2) corrispondente a un coefficiente c costante ("mezza" corda "omogeneizzata"). Il valore di tale costante è la media di p su un periodo?

2.9. Sia $\sum_{n=0}^\infty a_n$ una serie a termini reali strettamente positivi e siano

$$\ell_+ = \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \text{e} \quad \ell_- = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Si discutano le affermazioni seguenti: *a*) se $\ell_+ < 1$ la serie data converge; *b*) se $\ell_- < 1$ la serie data converge; *c*) se $\ell_+ > 1$ la serie data diverge; *d*) se $\ell_- > 1$ la serie data diverge.

2.10. Discutere l'affermazione seguente: se $p > 0$ e la serie reale $\sum_{n=2}^{\infty} n(\ln^p n)c_n$ converge, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$ rappresenta una funzione continua in $\mathbb{R}$.

2.11. Dimostrare le disuguaglianze di Young

$$ab \le \vartheta a^{\frac{1}{\vartheta}} + (1-\vartheta) b^{\frac{1}{1-\vartheta}} \quad \text{per ogni } a, b > 0 \text{ e } \vartheta \in (0,1) \tag{2.3}$$

$$ab \le \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q \quad \text{per ogni } a, b > 0 \text{ e } p, q > 1 \text{ tali che } \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1 \tag{2.4}$$

osservando che la seconda è equivalente alla prima.

2.12. Discutere l'affermazione: se la successione reale $\{c_n\}$ verifica $\sum_{n=1}^{\infty} |nc_n|^p < +\infty$ per almeno un $p > 1$, allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$.

2.13. Si accetti la Definizione 1.4 di funzione hölderiana anche nel caso $\alpha > 1$ e in tal caso si dimostri che, se il dominio è un aperto connesso di $\mathbb{R}^n$, si ottengono solo le costanti.

2.14. Che si può dire del resto di Peano nella formula di Taylor di centro x_0 e ordine k se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di classe $C^{k,\alpha}$ in un intorno di x_0 per un certo $\alpha \in (0, 1]$?

2.15. Caratterizzare, fra le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, quelle strettamente crescenti in termini di segno e zeri di f' e, fra le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2, quelle strettamente convesse in termini di segno e zeri di f''. Costruire una funzione di classe C^1 strettamente crescente la cui derivata ha più di un'infinità numerabile di zeri e una funzione di classe C^2 strettamente convessa la cui derivata seconda ha più di un'infinità numerabile di zeri.

2.16. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa verificante $f(0) > 0$ e si discuta l'affermazione seguente: dall'origine si possono condurre esattamente due tangenti al grafico di f (il che è vero nel caso delle parabole ad asse verticale). Formulata una congettura, si imposti il problema assumendo come incognita l'ascissa z del punto di contatto.

2.17. Nell'ipotesi che la funzione f sia di classe C^1 con $\lim_{x \to \pm\infty} f'(x) = \pm\infty$ si riaffronti il problema dell'Esercizio 2.16 assumendo come incognita la pendenza della tangente.

2.18. Siano $C \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e $x \in \mathbb{R}^n$. Discutere l'esistenza del minimo

$$\min \{|y - x| : \ y \in C\}.$$

Mostrare che se C è convesso l'eventuale punto di minimo è unico. Considerare il problema dell'unicità nel caso bidimensionale

$$C = \bigl\{ y \in \mathbb{R}^2 : \ g(y) = 0 \bigr\} \tag{2.5}$$

ove $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è almeno continua, dare un controesempio e formulare congetture prima di proseguire. Rivedere le congetture fatte considerando il caso particolare della (2.5)

$$g(y) = |y_1|^\alpha - y_2 \quad \text{e} \quad x = (0, \xi) \quad \text{con } \alpha \in (1,2) \text{ e } \xi > 0$$

e dimostrare che in questo caso il punto di minimo non è mai unico.

2.19. In relazione all'Esercizio 2.18, considerare il problema dell'unicità nel caso (2.5) supponendo g di classe C^2 con gradiente non nullo su C e x abbastanza vicino a C.

2.20. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e si consideri la proprietà $(*)$ seguente:

$$\begin{aligned}&\text{per ogni } x_0 \in \operatorname{graf} f \text{ esistono } y \in \operatorname{epi} f,\ z \in \operatorname{ipo} f \text{ e } r > 0 \text{ tali che}\\ &|y - x_0| = |z - x_0| = r, \quad B_r(y) \subseteq \operatorname{epi} f \quad \text{e} \quad B_r(z) \subseteq \operatorname{ipo} f.\end{aligned}$$

La proprietà $(*)$ implica la differenziabilità di f? Discutere la validità di $(*)$ se f è di classe C^k. Dare condizioni sufficienti che assicurino la validità della proprietà più forte: il raggio r di cui in $(*)$ può essere trovato indipendente da x_0 (cioè esiste $r > 0$ tale che per ogni x_0 esistano $y \in \operatorname{epi} f$ e $z \in \operatorname{ipo} f$ tali che...).

2.21. Date le due funzioni $g : (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ e $h : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, è possibile raccordarle con regolarità C^∞, costruire cioè $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ che abbia g e h come restrizioni? Che accade se la regolarità C^∞ è sostituita ovunque dall'analiticità?

2.22. Dare uno sviluppo asintotico del tipo

$$\Bigl(1 + \frac{1}{n}\Bigr)^n = e + \varepsilon_n \bigl(1 + o(1)\bigr) \quad \text{per } n \to \infty$$

con $\{\varepsilon_n\}$ successione infinitesima di tipo elementare.

2.23. Sia $\alpha > 0$ e si consideri la serie $\sum_{n=1}^\infty n^{-(\alpha+1)}$. Mostrare che la sua somma s e la sua ridotta n-esima s_n verificano

$$s = s_n + O(n^{-\alpha}) \quad \text{per } n \to \infty .$$

2.24. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Dimostrare le disuguaglianze di Jensen

$$f\Bigl(\sum_{k=1}^n \vartheta_k u_k\Bigr) \le \sum_{k=1}^n \vartheta_k f(u_k) \tag{2.6}$$

$$f\Bigl(\frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega u(x)\, dm\Bigr) \le \frac{1}{m(\Omega)} \int_\Omega f(u(x))\, dm \tag{2.7}$$

nelle quali $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, $(\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in [0, +\infty)^n$ con $\sum_{k=1}^n \vartheta_k = 1$ e, rispettivamente, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile secondo Riemann rispetto a una misura m sull'insieme misurabile Ω. Nell'ipotesi aggiuntiva di stretta convessità su f, dimostrare inoltre che, se $u_1, \dots, u_n$ non sono tutti uguali fra loro e $\vartheta_k > 0$ per ogni k, allora nella (2.6) vale la disuguaglianza stretta. Si dimostrino la (2.6) e l'ultima parte dell'esercizio per induzione su n. Si consiglia, nel passaggio da n a $n+1$, di separare ϑ_{n+1} dagli altri ϑ_k e, in riferimento all'ultima parte, di supporre $u_1 \ne u_2$ nel ragionamento ricorsivo. Per la (2.7) trattare dapprima il caso delle funzioni a scala sfruttando la (2.6), poi il caso generale, riconducendo quest'ultimo al caso più semplice in cui f è anche monotona e lipschitziana in un intervallo contenente l'immagine di u.

2.25. Supponendo f anche di classe C^1, si ridimostri la disuguaglianza (2.7) di Jensen sviluppando la traccia seguente: per $t_0 \in \mathbb{R}$, sia p il polinomio di Taylor di f del primo ordine e di centro t_0 e si scriva la disuguaglianza $f(t) \geq p(t)$, valida per ogni t. Si scelga poi $t = u(x)$ e si integri su Ω. A questo punto si scelga t_0 in modo astuto. Si adatti poi la dimostrazione al caso di una funzione f convessa senza ulteriori ipotesi di regolarità. Si deduca infine la (2.6) dalla (2.7) scegliendo bene lo spazio di misura.

2.26. Sia $n \geq 3$ intero. Fra i poligoni di n lati inscritti in una circonferenza data e contenenti il suo centro come punto interno determinare quelli di perimetro massimo e quelli di area massima. Sfruttare il calcolo fatto per riottenere la lunghezza della circonferenza e l'area del cerchio al limite per $n \to \infty$.

2.27. Con la Notazione 1.7 calcolare il limite $\lim_{p\to 0} m_p(x)$ se $x_k > 0$ per ogni k. Che si può dire per il limite destro nell'ipotesi più debole $x_k \geq 0$?

2.28. Con la Notazione 1.7 calcolare i due limiti

$$\lim_{p\to+\infty} m_p(x) \quad \text{e} \quad \lim_{p\to-\infty} m_p(x).$$

2.29. Siano p, q reali tali che $0 < p < q$. Con la Notazione 1.7 dimostrare che

$$m_p(x) \leq m_q(x) \tag{2.8}$$

usando opportunamente la disuguaglianza di Jensen (2.6). Individuare le difficoltà da superare nella seguente via alternativa più complessa: ricondotti al caso $m_q(x) = 1$, usare in questo il Teorema di Weierstrass e il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

2.30. Estendere la (2.8) al caso $p < q < 0$. Tenendo conto di tutti gli esercizi visti sull'argomento, scrivere le disuguaglianze corrette fra media di ordine p con $p > 0$ e $p < 0$ e la media geometrica.

2.31. Seguendo l'Esercizio 2.27, dare una definizione ragionevole di media geometrica di una funzione u strettamente positiva (supporre, in prima battuta, u continua su un compatto K di $\mathbb{R}^n$ e poi generalizzare il più possibile) partendo dalla media di ordine p, con $p \neq 0$, definita dalla formula (vedi Notazione 1.2)

$$m_p(u) = \Bigl(\frac{1}{|K|}\int_K u(x)^p\,dx\Bigr)^{1/p}.$$

2.32. Siano $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $\alpha \in (0,1]$ tali che ogni punto di $\mathbb{R}^n$ ha un intorno in cui f è hölderiana di esponente α. Si dimostri che, per ogni sottoinsieme limitato $A \subset \mathbb{R}^n$, la funzione f è hölderiana di esponente α in A.

2.33. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e n intero positivo. Discutere l'implicazione

$$\text{da} \quad f(x) = o(x^n) \quad \text{per } x \to 0 \quad \text{segue} \quad f'(x) = o(x^{n-1}) \quad \text{per } x \to 0.$$

2.34. In relazione all'Esercizio 2.33, per ogni $n \geq 2$ costruire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^{n-1} tale che per $x \to 0$ le relazioni $f(x) = o(x^n)$ e $f'(x) = o(x^{n-1})$ siano vera e falsa rispettivamente. Costruire inoltre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che per $x \to 0$ le relazioni $f(x) = o(x^n)$ e $f'(x) = o(x^\varepsilon)$ siano rispettivamente vera per ogni n e falsa per ogni $\varepsilon > 0$.

2.35. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e n intero positivo. Discutere l'implicazione

$$\text{da} \quad f(x) = O(x^n) \quad \text{per } x \to +\infty \quad \text{segue} \quad f'(x) = O(x^{n-1}) \quad \text{per } x \to +\infty .$$

2.36. Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti reali nell'indeterminata x. Dimostrare che, se le radici complesse dell'equazione $P(x) = 0$ sono tutte reali, distinte o meno, anche tutte le radici complesse dell'equazione $P'(x) = 0$ sono reali.

2.37. Con le Notazioni 1.1 e 1.2, dimostrare che per ogni $r > 0$ risulta

$$\lim_{x \to 0} |B_r^n(0) \setminus B_r^n(x)| = \lim_{x \to 0} |B_r^n(x) \setminus B_r^n(0)| = 0.$$

2.38. Fra le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ limitate e integrabili su ogni limitato misurabile caratterizzare quelle che verificano la condizione (con le Notazioni 1.1 e 1.2)

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(z)\, dz = f(x) \quad \text{uniformemente.} \tag{2.9}$$

2.39. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ di classe C^1 verificanti $f(0) = f(1) = 0$ e $|f'(x)| \leq 1$ per ogni $x \in [0,1]$. Calcolare gli estremi superiori

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{e} \quad \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_0^1 |f(x)|\, dx.$$

Tali estremi superiori sono massimi?

2.40. Per $n \geq 1$ intero, sia T_n il più piccolo convesso di $\mathbb{R}^n$ che contiene l'origine e tutti i vettori della base canonica. Con la Notazione 1.2, calcolare la misura $\operatorname{mis}_n T_n$ e il rapporto $\operatorname{mis}_{n+1} T_{n+1} / \operatorname{mis}_n T_n$ e commentare i casi ben noti di dimensione bassa.

2.41. Si ipotizzi l'estensione del Teorema della divergenza di Gauss al caso della dimensione $n > 1$ qualunque (con un'adeguata definizione "naturale" della misura $(n-1)$-dimensionale sul bordo e la conseguente definizione dell'integrale di bordo) e si usi il teorema stesso per determinare un legame fra $\operatorname{mis}_n B_r$ (Notazione 1.1) e la misura $(n-1)$-dimensionale di ∂B_r. Ritrovare i casi ben noti $n = 2, 3$.

2.42. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ una serie di potenze reale con raggio di convergenza $r > 0$ finito e sia $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ la funzione somma. Discutere l'affermazione seguente: la serie converge per $x = r$ se e solo se il limite sinistro $\lim_{x \to r^-} f(x)$ esiste finito.

2.43. Precisare e dimostrare la legge della rifrazione attraverso una superficie regolare Γ di equazione $g(x) = 0$ che separa due mezzi omogenei e isotropi: nel punto in cui il raggio attraversa la superficie, il raggio incidente, quello rifratto e il versore normale a Γ sono complanari e vale la formula

$$\frac{\sin\vartheta'}{v'} = \frac{\sin\vartheta''}{v''}$$

ove ϑ' e ϑ'' sono gli angoli che il raggio incidente e quello rifratto formano con la normale e v' e v'' sono le velocità di propagazione del raggio nei due mezzi.

2.44. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è uniformemente differenziabile quando per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esista un operatore lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tale che

$$|f(x+h) - f(x) - Lh| \le \varepsilon|h| \quad \text{per } |h| \le \delta\,.$$

Dimostrare che ogni funzione uniformemente differenziabile è differenziabile in ogni punto e che il viceversa è falso.

2.45. In relazione all'Esercizio 2.44, considerare il caso più semplice $n = m = 1$ e dimostrare le affermazioni seguenti: a) una funzione f è uniformemente differenziabile se e solo se è differenziabile in ogni punto e risulta

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \quad \text{uniformemente in } \mathbb{R};$$

b) ogni funzione uniformemente differenziabile è di classe C^1; c) se f è differenziabile e f' è uniformemente continua, allora f è uniformemente differenziabile; d) se f è uniformemente continua e uniformemente differenziabile, allora f' è uniformemente continua. Dedurre che ogni funzione di classe $C^{1,\alpha}$ (Notazione 1.4) è uniformemente differenziabile.

2.46. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto non limitato e $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è lipschitziana, allora si ha

$$|f(x)| \le |f(0)| + |f(x) - f(0)| \le |f(0)| + L|x| \quad \text{per ogni } x \in \Omega$$

ove L è la costante di Lipschitz. Dunque $f(x) = O(|x|)$ per $|x| \to +\infty$. Discutetere la possibilità di estendere quest'ultima proprietà al caso delle funzioni hölderiane e a quello delle funzioni uniformemente continue, prestando attenzione al dominio Ω. Può essere utile vedere prima il caso più semplice $n = m = 1$.

2.47. Sia C un corridoio "a elle" i cui due rami sono illimitati e hanno ampiezze a e b. Determinare la lunghezza massima di una sbarretta che si riesce a far passare dall'uno all'altro ramo del corridoio facendola strisciare sul pavimento. Precisare il problema e risolverlo giustificando con cura ogni cosa.

2.48. Un cannone riesce a espellere un proiettile di massa m con velocità di uscita di modulo v. Trascurando la resistenza dell'aria, calcolare la gittata e l'inclinazione da usare per colpire l'obiettivo più lontano raggiungibile.

2.49. Considerato il problema di Cauchy in avanti

$$u'(t) = |\sin u(t)|^{1/2} \quad \text{per } t \ge 0 \quad \text{e} \quad u(0) = 0$$

dimostrare che ogni sua soluzione massimale è globale e descrivere compiutamente la struttura dell'insieme delle soluzioni.

2.50. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non decrescente. Studiare, per ogni $u_0 \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy *in avanti*

$$u'(t) + f(u(t)) = 0 \quad \text{per } t \geq 0 \quad \text{e} \quad u(0) = u_0$$

discutendo esistenza e unicità della soluzione globale.

2.51. Discutere l'affermazione: esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa e differenziabile, ma non di classe C^1.

2.52. Siano $u_n, u : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ funzioni di classe C^1. Discutere la seguente affermazione: se $\{u_n\}$ converge a u uniformemente, allora la lunghezza del grafico di u_n converge alla lunghezza del grafico di u. Interpretare in termini della continuità o meno, in ambito metrico, dell'applicazione (da precisare) *funzione* $\mapsto$ *lunghezza del grafico*.

2.53. In riferimento all'Esercizio 2.52, considerare l'analogo problema delle aree relativamente a funzioni $u_n, u : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$.

2.54. Dimostrare che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se e solo se, per ogni $A \neq \emptyset$, ogni $u : A \to \mathbb{R}$ limitata e ogni successione di funzioni $u_n : A \to \mathbb{R}$ convergente uniformemente a u, $\{f \circ u_n\}$ converge uniformemente a $f \circ u$.

2.55. Caratterizzare le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che verificano la proprietà seguente: per ogni $A \neq \emptyset$, ogni $u : A \to \mathbb{R}$ (limitata o meno) e ogni successione di funzioni $u_n : A \to \mathbb{R}$ convergente uniformemente a u, $\{f \circ u_n\}$ converge uniformemente a $f \circ u$.

2.56. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n n^{-\sqrt{n}}$ al variare di $x \in (0, +\infty)$.

2.57. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che f' sia periodica. Dimostrare che f è periodica se e solo se è limitata.

2.58. Sia $\{x_n\}$ una successione reale verificante

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{|x_n| + 1} \quad \text{per ogni } n \geq 0 .$$

Studiare il limite della successione.

2.59. Studiare, al variare di $\alpha > 0$, il limite

$$\lim_{n \to \infty} \bigl(e^{n^{-\alpha}} - 1\bigr) \ln(n!) .$$

2.60. Dimostrare che l'equazione

$$2x - \int_0^x e^{-y^2} (1 + y^2)^2 \sin^2 y \, dy = 1$$

ha una e una sola soluzione reale.

3. A bruciapelo

Questo vuole essere un test sul fiuto, cioè sulla capacità di formulare congetture esatte. Leggere un questito alla volta e scegliere “vero” o “falso” entro mezzo minuto. Le scelte non fatte e l’uso di “testa o croce” equivalgono a risposte errate. Il tempo risparmiato su un quesito è perso e non può essere aggiunto al tempo diponibile per un altro questito.

3.1. Se $r \in (0, +\infty)$ è il raggio di una serie di potenze e $|z| > r$, allora la successione dei moduli delle ridotte valutate in z diverge.

3.2. Esiste una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann e discontinua in tutti i punti razionali di $[0,1]$.

3.3. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa e superiormente limitata, allora è di classe C^∞.

3.4. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è convessa e non differenziabile in 0, allora esistono infiniti polinomi p di grado ≤ 1 tali che $p(x) \leq f(x)$ per ogni x e $p(0) = f(0)$.

3.5. Se $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è convessa, allora esiste un polinomio p di grado ≤ 1 tale che $p(x) \leq f(x)$ per ogni x e $p(0) = f(0)$.

3.6. Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è monotona, allora esiste una funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $g(x) \geq f(x)$ per ogni x.

3.7. Se A e B sono due chiusi non vuoti e disgiunti di $\mathbb{R}^n$, allora esiste $\delta > 0$ tale che $|x - y| \geq \delta$ per ogni $x \in A$ e ogni $y \in B$.

3.8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analitica (Definizione 1.6) e non identicamente nulla. Allora l’insieme degli zeri di f è al più numerabile.

3.9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e sia Z l’insieme dei suoi zeri. Se Z non ha punti interni, allora è al più numerabile.

3.10. Esiste $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ verificante $\lim_{y \to x} f(y) = +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

3.11. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente positiva. Allora esiste un intervallo I non ridotto a un punto tale che $\inf_{x \in I} f(x) > 0$.

3.12. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ non negativa e integrabile secondo Riemann. Se f ha integrale nullo, allora l’insieme degli x tali che $f(x) > 0$ è al più numerabile.

3.13. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e non lipschitziana. Allora esiste una soluzione massimale dell’equazione differenziale $u'(t) = f(u(t))$ che non è globale.

3.14. Se la serie reale $\sum_{n=0}^\infty a_n$ converge allora la serie $\sum_{n=0}^\infty a_n^2$ dei quadrati converge.

3.15. Se la serie reale a termini positivi $\sum_{n=0}^\infty a_n$ converge allora converge anche la serie dei quadrati $\sum_{n=0}^\infty a_n^2$.

3.16. Esiste una successione reale non negativa $\{a_n\}$ tale che la serie $\sum_{n=0}^\infty a_n^\lambda$ converga per ogni $\lambda \geq 1$ e diverga per ogni $\lambda < 1$.

3.17. Sia data una successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convesse, di classe C^∞ e tutte dotate di almeno punto di minimo e si supponga che la successione converga uniformemente a una funzione f. Allora anche f ha almeno punto di minimo.

3.18. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa che ha uno e un solo punto di minimo. Allora esistono $x, y \in \mathbb{R}$ in cui f è differenziabile e tali che $f'(x) < 0$ e $f'(y) > 0$.

3.19. Il Teorema di De l'Hôpital per la forma indeterminata $0/0$ per $x \to +\infty$ si estende, senza aggiunta di ipotesi, al caso in cui il dominio delle funzioni che intervengono sia un insieme (intervallo o meno) aperto e non superiormente limitato.

3.20. Esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biiettiva il cui grafico è un sottoinsieme denso di $\mathbb{R}^2$.

3.21. Siano $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzioni convesse e la successione $\{f_n\}$ converga puntualmente alla funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Allora la convergenza è uniforme.

3.22. Siano $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$ funzioni convesse e la successione $\{f_n\}$ converga puntualmente alla funzione $f : (0,1) \to \mathbb{R}$. Allora la convergenza è uniforme.

3.23. Siano $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzioni convesse e la successione $\{f_n\}$ converga puntualmente alla funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora la convergenza è uniforme in ogni limitato.

3.24. Siano $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzioni a scala e la successione $\{f_n\}$ converga uniformemente alla funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Allora l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile.

3.25. Siano $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ funzioni a scala e la successione $\{f_n\}$ converga uniformemente alla funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Allora ogni discontinuità di f è eliminabile o un salto.

4. Primi aiuti

La coppia di numeri richiama l'esercizio.

2.3. Si scriva $f(z^2)$ in termini di $f(z)$ e si iteri la formula ottenuta. Si considerino i punti del tipo $\rho e^{i\vartheta}$ con $\vartheta = k \cdot 2\pi 2^{-n}$ (k, n interi positivi) e $\rho \in (0,1)$ e il corrispondente comportamento di f. Si deduca che nessun punto della circonferenza unitaria ∂D ha intorni (relativi a D) in cui f è limitata.

2.5. Considerare la funzione $a \mapsto \int_a^{a+T} \varphi(x)\, dx$, $a \in \mathbb{R}$. Alternativamente, considerando dapprima il caso $a \in (0,T)$, usare l'additività dell'integrale e la periodicità.

2.6. Ricondursi al caso $\mu = 0$.

2.7. Introdurre $F(x) = \int_\ell^x f(y)\, dy$ per $x \in [0, \ell]$ e trovare una formula esplicita per u.

2.8. Partire dalla formula esplicita che fornisce la soluzione u_n, integrare per parti e usare l'Esercizio 2.6. Si trova una formula per il limite u e da questa si leggono le proprietà richieste.

2.11. Cambiare variabili: $a = x^\vartheta$ e $b = y^{1-\vartheta}$.

2.12. Usare la disuguaglianza (2.4) di Young.

2.13. Si dimostra che tutte le derivate direzionali di f sono nulle. Se poi Ω è connesso, allora è connesso per archi (regolari), da cui facilmente $f(x) = f(y)$ per ogni $x, y \in \Omega$.

2.15. Studiare i punti interni all'insieme degli zeri di derivata o derivata seconda, nei due casi. L'insieme di Cantor è chiuso, non ha punti interni e non è numerabile.

2.16. Se f non è differenziabile ovunque le tangenti richieste possono non esistere. Ma anche se f è C^∞ le tangenti possono non esistere (o ne può esistere una sola), a causa di asintoti. Per escludere questi casi si può supporre che f sia di classe C^1 (oppure di classe C^2 con $f'' > 0$ per semplificare) e che $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = \pm\infty$.

2.17. Esistono rette "esterne" e rette "secanti" e ciascuna delle due tangenti separa in qualche senso le une dalle altre. Dunque le pendenze candidate ad essere pendenze di tangenti sono...

2.18. Ultimo punto dell'esercizio: l'insieme C è ora il grafico di una funzione φ pari, per cui l'unico caso di unicità corrisponde al fatto che l'origine sia punto di minima distanza.

2.19. Ogni punto di minimo è nelle condizioni del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Impostare la condizione data dal teorema citato in relazione a $\frac{1}{2}|y-x|^2$.

2.20. La $(*)$ non implica nemmeno la continuità. Supponiamo f differenziabile e riferiamoci, ad esempio, alla palla $B_r(y)$. Scritto x_0 nella forma $x_0 = (x_0', f(x_0'))$ con $x_0' \in \mathbb{R}^n$, l'esistenza della palla richiesta equivale all'esistenza di $\delta > 0$ e di $c > 0$ tali che, considerato il paraboloide p definito da

$$p(x) = f(x_0') + \nabla f(x_0') \cdot (x' - x_0') + c\,|x' - x_0'|^2, \quad |x' - x_0'| < \delta,$$

risulti $\operatorname{epi} p \subseteq \operatorname{epi} f$, cioè $f(x') \le p(x')$ per $|x' - x'_0| < \delta$. Si noti che δ dovrà essere tanto più piccolo quanto più grande è $|\nabla f(x'_0)|$.

2.21. Data comunque la successione reale $\{c_n\}$, esiste $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $f^{(n)}(0) = c_n$ per ogni n. Esiste inoltre $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ che vale 0 in $(-\infty, 0]$ e 1 in $[1, +\infty)$. Per la seconda domanda considerare il caso in cui g e h siano costanti con due valori diversi.

2.22. Passare ai logaritmi.

2.23. Stimare il resto n-esimo con un integrale.

2.25. La scelta conveniente di t_0 è la media di u.

2.26. Formulare il problema di massimo in termini degli angoli α_k, $k = 1, \dots, n$, sottesi dai lati, con un vincolo sugli angoli stessi. Combinare l'uso del Teorema di Weierstrass e del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Procedere analogamente per l'area. Alternativamente e più convenientemente, usare per entrambi i problemi la disuguaglianza (2.6) di Jensen con una scelta opportuna di u_k e ϑ_k, $k = 1, \dots, n$.

2.27. Nel caso $x_k > 0$ per ogni k, passando ai logaritmi e cambiando base in x_k^p, si ha

$$\ln m_p(x) = \frac{1}{p}\, \ln\Bigl[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{p \ln x_k}\Bigr] = \frac{1}{p}\, \ln\Bigl[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Bigl(1 + p \ln x_k \cdot \bigl(1 + o(1)\bigr)\Bigr)\Bigr]$$
$$= \frac{1}{p}\, \ln\Bigl[1 + \frac{p}{n} \sum_{k=1}^n \ln x_k \cdot \bigl(1 + o(1)\bigr)\Bigr] = \dots$$

Alternativamente si può calcolare $\lim_{p \to 0} \ln m_p(x)$ usando il Teorema di De l'Hôpital. Se qualcuno degli x_k è nullo, ci si riconduce a quanto si è già dimostrato.

2.28. Considerare il caso $n = 2$ con $x_1 < x_2$ per intuire i risultati. Fatto ciò, la dimostrazione è facile per stime dirette.

2.29. La funzione $r \mapsto |x|^{q/p}$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa dato che $q/p > 1$. Allora

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^q = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k^p)^{q/p} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k^p) \ge \dots$$

Il Teorema Weierstrass per $x \mapsto m_p(x)$ sul compatto descritto dalle condizioni $x_k \ge 0$ per ogni k e $m_q(x) = 1$ fornisce massimo e minimo, mentre il Teorema dei moltiplicatori fornisce un punto solo, il punto $(1, \dots, 1)$: occorre verificare che questo è di massimo. A tale scopo occorre considerare il caso analogo con l'aggiunta, al vincolo $m_q(x) = 1$, dei vincoli di annullamento di alcune coordinate. Se si impongono $n - m < n$ annullamenti di coordinate si ottengono problemi analoghi in m variabili (con il significato di una scelta di m fra le n variabili originarie) e si trova il punto $(\xi, \dots, \xi) \in \mathbb{R}^m$ con $\xi = (n/m)^{1/q}$. Calcolando $m_p(x)$ per ciascuno di tali punti x, si vede, usando l'ipotesi $p < q$, che il valore massimo di m_p è 1 e si conclude.

2.30. Scrivere il legame fra $m_{-p}(x)$ e $m_p(y)$ ove $y = (1/x_1, \ldots, 1/x_n)$.

2.32. Per assurdo e per compattezza sequenziale su $\overline{A}$.

2.34. Il primo controesempio può essere dato dalla funzione definita come segue:

$$f(x) = x^{n+\sigma} \sin x^{-\sigma} \quad \text{se } x > 0 \quad \text{e} \quad f(x) = 0 \quad \text{se } x \le 0, \quad \text{ove } \sigma > 0.$$

Per costruire il secondo controesempio si può prendere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che per x positivo piccolo risulti

$$f(x) \approx e^{-1/x} \sin \psi(x) \quad \text{e} \quad \sup_{t \in (0,x)} |f'(t)| \approx \frac{1}{|\ln x|}.$$

2.35. Occorre legare i valori di f' a quelli di f mediante disuguaglianze.

2.36. Abbinare il Teorema di Rolle e l'Esercizio 2.33.

2.37. I due limiti sono lo stesso problema e si ha $B_r^n(x) \subseteq B_{r+|x|}^n(0)$.

2.38. Se f è limitata e r è fissato, grazie all'Esercizio 2.37 applicato con $x - x_0$ al posto di x, la funzione che a ogni x associa la media al primo membro della (2.9) ha una proprietà notevole che si conserva con la convergenza uniforme. Che sia questa la caratteristica?

2.39. Se fossero ammesse funzioni C^1 a tratti, per avere il massimo si prenderebbe f in modo che in ogni punto x di differenziabilità risulti $|f'(x)| = 1$, cioè $f'(x) = \pm 1$. Ma cambiare troppo il segno di f' non conviene e occorre tener conto che f è nulla agli estremi.

2.40. Trovare il legame fra $\operatorname{mis}_{n+1} T_{n+1}$ e $\operatorname{mis}_n T_n$ osservando che T_{n+1} è l'immagine dell'applicazione $(x, \vartheta) \mapsto ((1-\vartheta)x, \vartheta)$, $(x, \vartheta) \in T_n \times [0,1]$, e applicando il Teorema di cambiamento di variabile. Si ottiene allora il valore del rapporto $\operatorname{mis}_{n+1} T_{n+1} / \operatorname{mis}_n T_n$.

2.41. Usare la funzione $x \mapsto x$, $x \in \mathbb{R}^n$.

2.43. Per porre bene il problema si può supporre che la funzione $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 con gradiente non nullo su Γ e ipotizzare che il raggio incidente intersechi Γ solo nel punto di rifrazione (ciò è ragionevole almeno se i punti x' e x'' di partenza e di arrivo sono abbastanza vicini a Γ). Inoltre vanno precisate le notazioni: se n' è il versore normale nel punto di incidenza rivolto verso il primo mezzo e $n'' = -n'$ (questo dunque rivolto verso il secondo mezzo), allora ϑ' e ϑ'' sono gli angoli *con segno* delle due coppie di vettori $(x' - x_0, n')$ e $(x'' - x_0, n'')$, una volta scelto un verso di rotazione degli angoli (uno qualunque dei due possibili e la formula da dimostrare non risente della scelta). Detto ciò, il cammino ottico si calcola facilmente e si intuisce una strategia naturale di risoluzione.

2.45. *b*) fissato x_0, anche i rapporti incrementali sono uniformemente continui in un intorno; *d*) anche i rapporti incrementali sono uniformemente continui.

2.47. Una sbarretta abbastanza lunga, per passare, è costretta a rasentare il vertice O l'angolo "interno" di C e il problema diventa un problema di minimo: fra i segmenti passanti per O e aventi i due estremi sui lati "esterni" di C determinare quello di lunghezza minima.

2.49. Per la descrizione delle soluzioni, conviene, per iniziare a capire, cercare di risolvere il problema di Cauchy $u(t_0) = u_0$ con $u_0 \in (0, \pi)$: si incappa in un integrale del tipo $\int_{u_0}^{z} |\sin y|^{-1/2}\, dy$ e occorre saper decidere che avviene per $z \to 0^+$ e per $z \to (\pi/2)^-$. Per questo si possono usare sviluppi del prim'ordine della funzione seno.

2.50. Per formulare congetture si può iniziare supponendo che f si annulli in un punto o in un intervallo.

2.54. Un'implicazione è immediata. Per l'altra osservare che la funzione continua f è uniformemente continua sui limitati.

2.55. La continuità è necessaria (prendere successioni di costanti). D'altra parte la funzione quadrato non verifica la condizione dell'enunciato (prendere $A = (0, +\infty)$ e $u_n(x) = (1/x) + (1/n) \ldots$).

2.58. Facile determinare il limite se si sa che esiste. Ma l'esistenza?

2.59. Semplificare il limite e tentare stime.

2.60. Vedere il comportamento all'infinito e la derivata del primo membro (ma il seno non dovrebbe essere di alcun aiuto, per cui forse lo si può buttare...).

5. Conclusioni (possibili)

La coppia di numeri richiama l'esercizio.

2.2. Non è sviluppabile.

2.4. Falsa in generale e vera per funzioni continue.

2.5. La risposta all'ultima domanda è affermativa.

2.7. Con la notazione del primo aiuto la formula è $u(x) = -\int_0^x \bigl(F(y)/c(y)\bigr)\,dy$, $x \in [0,\ell]$. La riscrittura della (2.1) è lecita se c è di classe C^1, il che implica che u è di classe C^2.

2.8. Il valore c^* del coefficiente costante è dato da $1/c^* = (1/T)\int_0^T \bigl(1/p(y)\bigr)\,dy$ ove $T > 0$ è un periodo di p. Dunque c^* non è la media di p, ma la cosiddetta media armonica di p.

2.9. *a*) e *d*) sono vere e *b*) e *c*) sono false.

2.10. Vera se $p > 1$, dubbia (probabilmente falsa) se $p \le 1$.

2.12. Vera.

2.14. Il resto è $O(|x - x_0|^{k+\alpha})$ per $x \to x_0$.

2.15. Denotata con φ la derivata prima o seconda nei due casi, la condizione necessaria e sufficiente richiesta è: $\varphi \ge 0$ e l'insieme degli zeri di φ ha interno vuoto.

2.16. Nelle ipotesi su f' dell'aiuto l'affermazione è vera.

2.17. Esistono esattamente due tangenti.

2.18. Esistenza se C è chiuso.

2.19. Ogni punto di C ha un intorno per ogni punto del quale il problema di minimo ha una e una sola soluzione.

2.20. Per quanto riguarda condizioni sufficienti per la $(*)$, l'ipotesi che f sia di classe C^1 non basta, e non basta nemmeno che f sia, in un intorno di x_0', di classe $C^{1,\alpha}$ per un certo $\alpha < 1$, né di classe $C^{1,\alpha}$ per ogni $\alpha < 1$, come mostrano funzioni che vicino all'origine si comportano come $|x'|^{1+\alpha}$ o come $|x'|^2 \ln|x'|$, con la notazione $x = (x', x_n)$. L'ipotesi C^2 è sufficiente. Più in generale la $(*)$ vale nell'ipotesi $C^{1,1}$ vicino a x_0'. Una condizione sufficiente per il rafforzamento della $(*)$ è che f sia C^2 con derivate prime e seconde limitate o, più in generale, che sia di classe $C^{1,1}$ in tutto $\mathbb{R}$.

2.21. Il raccordo esiste. Nel caso analitico, invece, di solito il raccordo non esiste.

2.22. $\varepsilon_n = -\frac{e}{2n}$.

2.26. In entrambi i casi sono tutti e soli i poligoni regolari.

2.27. Il limite è sempre la media geometrica $\bigl(\prod_{k=1}^n x_k\bigr)^{1/n}$ ed è nullo se qualche x_k lo è.

2.28. I due limiti valgono $\max_k x_k$ e $\min_k x_k$ rispettivamente.

2.30. Se $g(x)$ è la media geometrica, si ha $m_{-p}(x) \le g(x) \le m_p(x)$ per $p > 0$.

2.31. Il limite $\lim_{p\to 0} m_p(u)$, che vale $\exp\bigl[(1/|K|)\int_K \ln u\,dx\bigr]$. Si può estendere il tutto a uno spazio di misura Ω e a una misura m su Ω completamente generali, pur di imporre a u di essere integrabile secondo Riemann e di soddisfare la condizione $\inf u > 0$, il che garantisce l'integrabilità di $\ln u$. La definizione diventa $\exp\bigl[(1/m(\Omega))\int_\Omega \ln u\,dm\bigr]$, ma occorre giustificare con cura il passaggio al limite. Se si vuole estendere il tutto alla teoria dell'integrazione secondo Lebesgue, si può prendere, per semplificare, il solo limite destro per $p\to 0$ e supporre u e $\ln u$ integrabili, il che giustifica i calcoli. Per la sola definizione basta l'integrabilità del logaritmo.

2.33. Vera se $n=1$. Per n qualunque l'implicazione è vera se f è di classe C^n.

2.35. Falsa in generale e vera se f è convessa.

2.38. Sono tutte e sole quelle uniformemente continue.

2.39. Gli estremi superiori valgono $1/2$ e $1/4$ e non sono massimi.

2.40. Il rapporto vale $1/(n+1)$ e la misura vale $1/n!$.

2.41. Il rapporto fra le due misure è r/n.

2.42. La convergenza della serie implica l'esistenza del limite finito. Il viceversa è falso in generale (prendere una serie di tipo geometrico), vero se i coefficienti sono positivi.

2.46. Il risultato si estende al caso hölderiano senza ipotesi aggiuntive e non aiuta né guasta, in generale, prendere $m=1$. Nell'ipotesi della continuità uniforme il risultato è falso senza ipotesi su Ω: esso è vero nel caso $n=1$ se Ω è un intervallo e, più in generale con $n\geq 1$, se Ω è convesso, ma ancora falso nella sola ipotesi che Ω sia connesso.

2.47. La lunghezza massima che può avere la sbarretta è $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$.

2.48. La gittata è v^2/g ove g è l'intensità dell'accelerazione di gravità; l'inclinazione da usare è di $\pi/4$.

2.49. Se u è una soluzione qualunque, ogni restrizione di u che sia massimale fra quelle prive di tratti costanti tocca due rette orizzontali aventi come quote due multipli consecutivi di π e arriva a quelle quote con derivata nulla. Segue che tali restrizioni possono essere semplicemente "incollate" l'una all'altra oppure intercalate da tratti costanti di lunghezza arbitraria; oppure ancora si possono prendere in considerazione solo alcune di quelle restrizioni, variamente incollate e intercalate come detto e poi proseguire con una costante; infine anche la funzione nulla è una soluzione. Questa è la minima delle soluzioni; la massima è quella priva di tratti costanti; l'unione dei grafici di tutte le soluzioni è la regione avente come frontiera l'unione dei due grafici delle soluzioni minima e massima e dunque, come deve essere, si verifica il fenomeno di Peano: per un punto qualunque di quella regione passa il grafico di una soluzione.

2.50. Una e una sola soluzione globale.

2.51. Falsa.

2.52. Falsa. Vera se si aggiunge l'ipotesi che $\{u_n'\}$ converga uniformemente a u', ma basterebbe anche meno, precisamente $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 |u_n'-u'|\,dx = 0$. L'applicazione $\mathcal{L}$ da considerare ha come dominio l'insieme delle funzioni di classe C^1 in $[0,1]$. Essa non è continua rispetto alla metrica del massimo, mentre lo è rispetto alle metriche d_1 e d_2 date dalle formule

$$d_1(u,v) = \max|u-v| + \max|u'-v'| \quad \text{e} \quad d_2(u,v) = \max|u-v| + \int_0^1 |u'-v'|\,dx$$

ma anche rispetto a metriche date da formule diverse per il primo addendo.

2.53. Falsa senza ipotesi di convergenza sui gradienti.

2.55. Sono tutte e sole le funzioni uniformemente continue.

2.56. Converge se $x \le 1$ e diverge se $x > 1$.

2.58. Vale 0.

2.59. $+\infty$ se $\alpha \le 1$; 0 se $\alpha > 1$.

6. Aiuti ulteriori

La coppia di numeri richiama l'esercizio.

2.1. I due membri delle formule si estendono a funzioni olomorfe che coincidono per ipotesi sull'asse reale.

2.2. Con metodi di variabile reale: per il Teorema di Rolle...... da cui $f^{(k)}(0) = 0$ per ogni k. Con metodi di variabile complessa: se fosse sviluppabile.... Esempio: $f(x) = e^{1/x}$ se $x < 0$, $f(x) = e^{-1/x}\sin(\pi/x)$ se $x > 0$ e $f(0) = 0$.

2.4. La funzione di Dirichlet è periodica di ogni periodo razionale. Più in generale, se S è un sottogruppo additivo di $\mathbb{R}$ non ridotto allo zero, la funzione caratteristica di S è periodica e l'insieme dei suoi periodi è esattamente S privato dello zero (il caso della funzione di Dirichlet corrisponde al sottogruppo dei razionali). La differenza di due periodi diversi è ancora un periodo. Segue che, se non esiste il periodo minimo, l'estremo inferiore dell'insieme dei periodi positivi è 0. Fissati comunque $x, y \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, l'intervallo $(y - \delta, y + \delta)$ contiene almeno un punto del tipo $x + kT$ con $T \in (0, \delta)$ periodo di f e $k \in \mathbb{Z}$. Se f è continua, segue $f(y) = f(x)$.

2.5. Per il caso discontinuo occorre estendere il Teorema di cambiamento di variabile, ma basta un caso molto particolare...

2.16. Nelle ipotesi più restrittive dell'aiuto l'equazione è $\varphi(z) = 0$, ove $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è data da $\varphi(z) = f(z) - zf'(z)$, e ha esattamente due soluzioni, una positiva e una negativa, come si vede studiando il segno di φ' e il comportamento di φ all'infinito. Per quest'ultimo si scriva la disuguaglianza $f(x) \geq f(z) + f'(z)(x - z)$, che vale per ogni z e x, scegliendo valori opportuni di x.

2.17. Un retta che sta sotto il grafico di f è data dall'equazione $y = xf'(0)$, mentre rette che intersecano il grafico di f sono date dalle equazioni $y = \pm xf(\pm 1)$. Allora l'insieme $\mathcal{P}$ dei p reali verificanti $px \leq f(x)$ per ogni x non è vuoto ed è incluso in $[-f(-1), f(1)]$, per cui si possono considerare $p_+ = \sup \mathcal{P}$ e $p_- = \inf \mathcal{P}$...

2.18. Il quadrato della minima distanza è il valore minimo della funzione $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data dalla formula $\psi(t) = |(t, |t|^\alpha) - (0, \xi)|^2$ e la tesi equivale al fatto che $t = 0$ non sia punto di minimo per ψ. Siccome $\psi'(0) = 0$ e $\psi''(0^+) = -\infty$ dato che $\alpha \in (1, 2)$, il punto $t = 0$ è stazionario per ψ e ψ è strettamente concava vicino a $t = 0$, per cui è impossibile che $t = 0$ sia punto di minimo locale.

2.19. Seguendo le indicazioni del primo aiuto si trova l'equazione $F(x, y, \lambda) = (0, 0)$ ove $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ è data da

$$F(x, y, \lambda) = \big(y - x - \lambda \nabla g(y), g(y)\big).$$

Si vede che, prendendo come incognite il punto di minimo y e il moltiplicatore λ, fissato $x_0 \in C$, si può applicare il Teorema del Dini a partire dal punto $(x_0, x_0, 0)$, zero di F. La jacobiana della funzione $(y, \lambda) \mapsto F(x, y, \lambda)$, infatti, è data da

$$D_{(y,\lambda)} F(x, y, \lambda) = \begin{bmatrix} 1 - \lambda D_{11} g(y) & -\lambda D_{12} g(y) & -D_1 g(y) \\ -\lambda D_{21} g(y) & 1 - \lambda D_{22} g(y) & -D_2 g(y) \\ D_1 g(y) & D_2 g(y) & 0 \end{bmatrix}$$

e risulta $\det D_{(y,\lambda)}F(x_0,x_0,0) = |\nabla g(x_0)|^2 > 0$.

2.20. Nell'ipotesi della regolarità C^2 e supponendo $|x' - x'_0| \le 1$, si scrive la formula di Taylor nella forma di Lagrange con derivate seconde nel resto e si trova

$$f(x) = f(x'_0) + \nabla f(x'_0)\cdot(x'-x'_0) + R(x') \quad \text{e} \quad R(x') = \frac{1}{2}\,(x'-x'_0)^t D^2 f(z')(x'-x'_0)$$

per un certo z' del segmento di estremi x'_0 e x'. Essendo $|z' - x'_0| \le 1$ esiste una costante M tale che $|R(x')| \le M|x'-x'_0|^2$ per ogni x' ammesso e si può scegliere $c = M$ nella definizione del paraboloide p. Se le derivate prime e seconde di f sono anche limitate, non è necessaria alcuna ipotesi su $|x'-x'_0|$ e sia δ sia M possono essere scelti indipendentemente dal punto x_0. Allora la stessa cosa vale per il raggio r. Se l'ipotesi C^2 è indebolita in $C^{1,1}$ (in un intorno oppure globale, ciò se si vuole il raggio indipendente dal punto), si scrive la formula di Taylor con le derivate prime nel resto, si aggiunge e toglie quanto serve e si usa la lipschitzianità delle derivate.

2.26. Si può supporre 1 il raggio della circonferenza. Con le notazioni del primo aiuto, il perimetro e l'area del poligono associato alla n-upla $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ valgono rispettivamente

$$P(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = 2\sum_{k=1}^n \sin(\alpha_k/2) \quad \text{e} \quad A(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \sin\alpha_k \qquad (*)$$

e il vincolo sugli angoli è dato dalle condizioni

$$\alpha_k \in (0,\pi) \quad \text{per ogni } k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 2\pi$$

la prima delle due in quanto il centro è interno al poligono. Allora si può usare il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Si interpretano le $(*)$ come definizioni di due funzioni $P, A : (0,\pi)^n \to \mathbb{R}$ e la condizione data dal teorema diventa

$$\big(\cos(\alpha_1/2),\dots,\cos(\alpha_n/2)\big) = \lambda(1,\dots,1) \quad \text{e} \quad \frac{1}{2}\big(\cos\alpha_1,\dots,\cos\alpha_n\big) = \mu(1,\dots,1)$$

per certi $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ rispettivamente, per cui si ottiene subito $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n$, cioè $\alpha_k = 2\pi/n$ per ogni k, in entrambi i casi. Resta da vedere che questa n-upla corrisponde al massimo. Per far questo si può estendere la definizione di P e di A al cubo chiuso $C = [0,\pi]^n$ (fermo restando l'altro vincolo per il problema di massimo e di minimo), il che garantisce esistenza di massimo e minimo. Ma nessun punto di frontiera di C corrisponde a un massimo.
Per usare la disuguaglianza di Jensen come suggerito nell'aiuto, moltiplicare e dividere per n nelle definizioni di P e di A e considerare la restrizione della funzione seno a $[0,\pi]$, che è una funzione concava. Si trova subito anche che solo i poligoni regolari risolvono entrambi i problemi.

2.33. Per il risultato positivo scrivere le formule di Taylor di f e di f'.

2.34. Primo controesempio dell'aiuto. Per $x \to 0$ si ha $f(x) = O(x^{n+\sigma}) = o(x^n)$, ma solo $f'(x) = O(x^{n-1})$ e niente di meglio. La funzione f è di classe C^{n-1} se $\sigma < \frac{1}{n-1}$. Per controllare il comportamento delle derivate conviene procedere come segue: introdurre l'insieme F delle combinazioni lineari delle funzioni cos e sin e dimostrare per induzione che, a partire da una funzione $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data dalla formula $f(x) = x^\alpha \varphi(x^{-\sigma})$ con $\varphi \in F$, per ogni k risulta $f^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^k x^{\alpha-k-i\sigma} \varphi_{k,i}(x^{-\sigma})$ con certe $\varphi_{k,i} \in F$.
Secondo controesempio dell'aiuto. Si può imporre come uguaglianza la prima condizione suggerita e cercare ψ imponendo la seconda condizione richiesta. Ciò porta a condizioni su ψ' e a un problema di primitive.

2.35. Nell'ipotesi di convessità, legare i tre valori $f'(x)$, $f(x)$ e $f(2x)$.

2.42. Per l'implicazione vera applicare il Teorema di Abel.

2.43. Usiamo le notazioni del primo aiuto. Per $x \in \Gamma$ vicino a x_0 il cammino ottico è data dalla formula

$$f(x) = \frac{|x - x'|}{v'} + \frac{|x - x''|}{v''}, \quad \text{per } x \in \Gamma \cap B_r(x_0)$$

ove $r > 0$ è scelto in modo da soddisfare la condizione di intersezione unica, e il problema si può risolvere con il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Prolungata la definizione di f a tutta la palla $B_r(x_0)$ e denotato ancora con f il prolungamento, si deve avere $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$ per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$, cioè

$$\frac{x_0 - x'}{v'|x_0 - x'|} + \frac{x_0 - x''}{v''|x_0 - x''|} = \lambda \nabla g(x_0). \qquad (*)$$

Ciò già mostra la complanarità richiesta (dato che $\lambda \nabla g(x_0)$ è un vettore normale a Γ) e anche che i vettori $x_0 - x'$ e $x_0 - x''$ sono entrambi normali oppure entrambi non normali. Nel primo caso si ha $\vartheta' = \vartheta'' = 0$ e non c'è nulla da dimostare. Nel secondo caso fissiamo un piano $\mathcal{P}$ (che potrebbe non essere unico, come deve avvenire se $v' = v''$) contenente i tre vettori e in esso un verso di rotazione degli angoli. Denotiamo con t' il versore di $\mathcal{P}$ ottenuto da n' per rotazione di $\pi/2$ e consideriamo il riferimento polare con semiasse polare parallelo e concorde con n'. Allora ϑ' è la coordinata angolare del vettore $x' - x_0$, mentre quella del vettore $x'' - x_0$ è $\vartheta'' + \pi$. Dunque

$$\frac{x' - x_0}{|x' - x_0|} = n' \cos\vartheta' + t' \sin\vartheta' \quad \text{e} \quad \frac{x'' - x_0}{|x'' - x_0|} = n' \cos(\vartheta'' + \pi) + t' \sin(\vartheta'' + \pi)$$

e la formula desiderata si ottiene moltiplicando la $(*)$ scalarmente per t'.

2.46. Nel caso hölderiano con esponente $\alpha \in (0,1)$ basta osservare che esiste una costante c tale che $|x|^\alpha \le c(1 + |x|)$ per ogni x. Per trattare il caso uniformemente continuo supponiamo Ω convesso. Ci si riconduce al caso in cui $0 \in \Omega$. Sia $\delta > 0$ dato dalla continuità uniforme con $\varepsilon = 1$: allora, per ogni versore r, si ha $|f(tr) - f(n\delta r)| \le 1$ se $n\delta \le t \le (n+1)\delta$ e $tr \in \Omega$ (da cui $sr \in \Omega$ per $s \in [0,t]$). Segue $|f(tr)| \le |f(0)| + n + 1$ per t come detto, da cui $|f(tr)| \le |f(0)| + (t/\delta) + 1$ per ogni $t > 0$ tale che $tr \in \Omega$. Ma ciò significa $|f(x)| \le |f(0)| + (|x|/\delta) + 1$ per ogni $x \in \Omega$. Per costruire un controesempio nella sola ipotesi di connessione, si può considerare una spirale S con spire vagamente a distanza unitaria e come Ω un aperto di spessore vagamente $1/2$ intorno a S. Se si costruisce f regolare con gradiente unitario e tangente alla spirale, si vede che, dopo n spire, f è aumentata della lunghezza della spirale fino al punto considerato. Ma l'ordine di grandezza di tale lunghezza è $\sum_{k=1}^n k$, cioè vagamente n^2, mentre il punto ha distanza circa n dall'origine. Abbiamo pertanto solo la stima non migliorabile $f(x) = O(|x|^2)$.

2.47. Si studi il problema di minimo dell'aiuto e lo si risolva: sia ℓ_0 la lunghezza minima trovata. Si descriva il moto della sbarretta mediante il moto della coppia dei suoi estremi: $t \mapsto (x(t), y(t))$. Nel caso della lunghezza $L \le \ell_0$ della sbarretta, si esibisca un moto possibile che raggiunge lo scopo. Nel caso opposto $L > \ell_0$ si mostri che il moto non esiste considerando l'angolo $\vartheta(t)$ di inclinazione della sbarretta all'istante t.

2.50. Per l'esistenza globale cercare una stima di u^2 in termini della sua funzione integrale e applicare il Lemma di Gronwall. Per l'unicità, scrivere il problema per due soluzioni u e v, sottrarre membro a membro, moltiplicare per $u - v$ e sfruttare la monotonia di f: siccome $u - v$ è nulla in 0, si deduce che $u = v$. Nel caso, non prospettato nell'esercizio, in cui $u(0)$ e $v(0)$ sono generici, lo stesso calcolo fornisce un risultato di dipendenza continua globale dal dato iniziale.

2.51. La derivata è monotona e un'eventuale sua discontinuità è...

2.52. Se $\{u'_n\}$ converge uniformemente a u', allora $\left\{(1 + (u'_n)^2)^{1/2}\right\}$ converge uniformemente a $(1+(u')^2)^{1/2}$, come si vede sfruttando una proprietà opportuna $(\dots)$ della funzione $s \mapsto (1 + s^2)^{1/2}$, $s \in \mathbb{R}$. Ma sfruttando questa stessa proprietà si vede che basta supporre che $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |u'_n - u'|\, dx = 0$.

2.55. Per vedere la necessità della continuità uniforme si può ragionare per assurdo: esistono $\varepsilon_0 > 0$ e due successioni reali $\{y_k\}$ e $\{z_k\}$ tali che $y_k - z_k| \le 1/k$ e $f(y_k) - f(z_k)| \ge \varepsilon_0$ per ogni k. In tali condizioni si può scegliere come A un insieme numerabile $\{x_1, x_2, \dots\}$ e $u, u_n : A \to \mathbb{R}$ definite come segue:

$$u(x_k) = y_k \quad \text{per ogni } k; \quad u_n(x_k) = y_k \quad \text{se } k \ne n \quad \text{e} \quad u_n(x_n) = z_n\,.$$

Allora...

2.58. Per vedere l'esistenza del limite si studi il rapporto x_{n+1}/x_n.

7. Risposte alle domande a bruciapelo

La coppia di numeri richiama la domanda.

3.1. falso. **3.2.** vero. **3.3.** vero. **3.4.** vero. **3.5.** falso. **3.6.** vero. **3.7.** falso. **3.8.** vero. **3.9.** falso. **3.10.** vero. **3.11.** falso. **3.12.** falso. **3.13.** falso. **3.14.** falso. **3.15.** vero. **3.16.** vero. **3.17.** falso. **3.18.** vero. **3.19.** falso. **3.20.** vero. **3.21.** falso. **3.22.** falso. **3.23.** vero. **3.24.** vero. **3.25.** vero.