Una funzione-mostro

Gianni Gilardi

****

In queste pagine mostriamo che esiste una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biiettiva e con grafico denso in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La densità significa che ogni intorno di ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ contiene almeno un punto del grafico di f. Useremo l'analoga densità di $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$: ogni intorno di ogni numero reale contiene almeno un elemento dell'insieme $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

Come punto di partenza servono due successioni $\{x_n\}_{n\geq 0}$ e $\{p_n\}_{n\geq 1}$ particolari. Per costruire la prima vediamo $\mathbb{R}$ come spazio vettoriale sul campo $\mathbb{Q}$ dei razionali: siccome $\mathbb{Q}^N$ è numerabile per ogni $N \geq 1$ e $\mathbb{R}$ non è numerabile, lo spazio vettoriale ha dimensione infinita. Pertanto esiste una successione $\{x_n\}$ di numeri reali verificante

$$\{x_n\}_{n\geq 0} \text{ è } \textit{iniettiva, i suoi elementi sono linearmente indipendenti su } \mathbb{Q} \textit{ e } x_0 = 1. \tag{1}$$

L'indipendenza su $\mathbb{Q}$, naturalmente, significa che l'unica combinazione lineare finita di elementi x_n distinti con coefficienti razionali che è nulla è quella con tutti i coefficienti nulli. Per quanto riguarda l'altra successione richiediamo semplicemente che

$$\{p_n\}_{n\geq 1} \text{ è } \textit{una successione iniettiva avente come immagine } \mathbb{Q} \setminus \{0\}. \tag{2}$$

A questo punto conviene introdurre qualche notazione. Per $n \geq 1$ poniamo

$$A_n = x_n + \mathbb{Q} = \{x_n + q : \ q \in \mathbb{Q}\} \quad \text{e} \quad B_n = p_n A_n = \{p_n a : \ a \in A_n\} \tag{3}$$

e controlliamo che gli insiemi A_n sono a due a due disgiunti e che la stessa cosa avviene per gli insiemi B_n. Supponiamo dunque $n \neq m$ e, per assurdo, gli insiemi A_n e A_m abbiano un punto comune. Ciò significa che esistono $q', q'' \in \mathbb{Q}$ tali che $x_n + q' = x_m + q''$. Ma ciò implica $x_n - x_m + (q' - q'')x_0 = 0$ in quanto $x_0 = 1$. Siccome $n, m \geq 1$ e $n \neq m$, i tre elementi x_n, x_m e x_0 sono linearmente indipendenti su $\mathbb{Q}$. D'altra parte la combinazione lineare nulla trovata ha coefficienti razionali non tutti nulli, assurdo. Un discorso del tutto analogo per i B_n porta alla combinazione $p_n x_n - p_m x_m + (p_n q' - p_m q'')x_0$ che deve essere nulla pur avendo coefficienti razionali non tutti nulli (dato che i p_n sono razionali non nulli): anche in questo caso, dunque, si ha un assurdo. Stabilito ciò poniamo

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \tag{4}$$

e definiamo $f_1 : A \to \mathbb{R}$ ponendo per $x \in A$

$$f_1(x) = p_n x \quad \text{se } x \in A_n. \tag{5}$$

La funzione f_1 è ben definita proprio perché ogni $x \in A$ appartiene a uno e uno solo degli A_n in quanto gli A_n sono a due a due disgiunti. Mostriamo che essa è iniettiva. Supponiamo $x', x'' \in A$ e $f_1(x') = f_1(x'')$. Abbiamo allora

$$x' = x_n + q', \quad x'' = x_m + q'' \quad \text{e} \quad p_n x' = p_m x'' \quad \text{per certi } n, m \geq 1 \text{ e } q', q'' \in \mathbb{Q}.$$

Deduciamo che

$$p_n x_n - p_m x_m + (p_n q' - p_m q'') = 0. \tag{6}$$

Consideriamo il caso $n \neq m$. Allora la (6) è una combinazione lineare nulla a coefficienti razionali non tutti nulli dei tre elementi distinti x_n, x_m e x_0, contro l'indipendeza data dalla (1), assurdo. Dunque $n = m$ e l'uguaglianza (6) si riduce a $q' - q'' = 0$, da cui $q' = q''$ e $x' = x''$. Quindi f_1 è iniettiva.

Proseguiamo. Chiaramente risulta $f_1(A_n) = B_n$ per ogni n, da cui $f_1(A) = B$. L'idea è allora quella di completare la costruzione di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = f_1(x) \quad \text{se } x \in A \quad \text{e} \quad f(x) = f_2(x) \quad \text{se } x \notin A \tag{7}$$

ove $f_2 : \mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R}$ è una funzione verificante $f_2(\mathbb{R} \setminus A) = \mathbb{R} \setminus B$. Così facendo, infatti, otterremmo una funzione suriettiva, che è iniettiva se anche f_2 è iniettiva. Pertanto il tutto si riduce a mostrare l'esistenza di una funzione $\mathbb{R} \setminus A \to \mathbb{R} \setminus B$ biiettiva. Ebbene, pur non avendo spazio per costruirla esplicitamente, ne possiamo mostrare l'esistenza. Ci appoggiamo al risultato seguente di teoria degli insiemi: *se C è un sottoinsieme numerabile di $\mathbb{R}$, allora $\mathbb{R} \setminus C$ e $\mathbb{R}$ sono equipotenti* (due insiemi X e Y si dicono *equipotenti* quando esiste una funzione $X \to Y$ biiettiva). Nel nostro caso applichiamo questo risultato ai due insiemi A e B, che sono numerabili in quanto unioni di famiglie numerabili di insiemi numerabili, e vediamo che $\mathbb{R} \setminus A$ e $\mathbb{R} \setminus B$ sono entrambi equipotenti a $\mathbb{R}$, dunque equipotenti fra loro. Quindi la funzione biiettiva cercata effettivamente esiste e la definizione (7) può essere data per un'opportuna funzione f_2 ottenendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biiettiva.

Rimane da dimostrare che tale funzione f ha grafico denso in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Per questo fissiamo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Poniamo per comodità $z = x$ se $x \neq 0$ e $z = \varepsilon$ se $x = 0$ in modo che in ogni caso risulta

$$z \neq 0 \quad \text{e} \quad |x - z| \leq \varepsilon \tag{8}$$

Siccome vale la (2) e $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ è denso in $\mathbb{R}$, possiamo scegliere $n \geq 1$ tale che

$$\left| p_n - \frac{y}{z} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|z|}\,. \tag{9}$$

Ora che n è fissato, possiamo scegliere $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$|q - (z - x_n)| \leq \min\left\{ \frac{\varepsilon}{|p_n|}, \varepsilon \right\}. \tag{10}$$

Dico che $u = x_n + q$ è l'ascissa del punto cercato. Per le (10) e (8) abbiamo infatti

$$|u - x| \leq |u - z| + |z - x| = |q - (z - x_n)| + |z - x| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

D'altra parte $u \in A_n$, da cui $f(u) = f_1(u) = p_n u$. Dunque abbiamo anche

$$\begin{aligned} |f(u) - y| &= |p_n u - y| = |p_n(x_n + q - z) + p_n z - y| \\ &\leq |p_n|\,|x_n + q - z| + |z| \left| p_n - \frac{y}{z} \right| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

grazie alle (10) e (9), il che conclude la dimostrazione.

Gianni Gilardi