Esponenziali e logaritmi: possibili introduzioni

Gianni Gilardi

In queste pagine diamo possibili introduzioni delle funzioni esponenziali e logaritmiche: a partire dalle potenze a esponente reale, con l'uso delle equazioni differenziali, mediante la teoria dell'integrazione. In ciascuno dei casi arriviamo a definire la costante e di Nepero e le funzioni exp e ln, *esponenziale* e *logaritmo* per antonomasia, in modo estremamente naturale: sono la costante e le funzioni che meglio semplificano le formule dell'Analisi.

1. A partire dalle potenze a esponenze reale

Gli strumenti usati nella strada che stiamo per intraprendere sono le potenze a esponente reale, le proprietà usuali delle funzioni continue e monotone e il calcolo differenziale di base. Iniziamo con una ricapitolazione succinta sulle potenze a esponente reale. Siccome nell'ultimo stadio della costruzione dovremo supporre la base positiva, facciamo questa ipotesi sin dall'inizio.

Definizione 1.1. *Sia $a > 0$. La potenza a^n con $n \geq 0$ intero è definita dalle condizioni*

$$a^0 = 1 \quad e \quad a^{n+1} = a^n \cdot a \quad per\ n = 0, 1, 2, \ldots . \ \blacksquare \tag{1.1}$$

Si verificano le usuali proprietà delle potenze, proprietà che sono anche la base per l'estensione successiva al caso dell'esponente razionale. Occorre però un risultato di esistenza e unicità della radice n-esima. Eccolo.

Teorema 1.2. *Siano $a > 0$ e $n > 0$ intero. Allora l'equazione $x^n = a$ ha nei reali positivi una e una sola soluzione.* $\blacksquare$

Dimostrazione. La soluzione è unica in quanto da $0 < x < y$ segue $x^n < y^n$. Per quanto riguarda l'esistenza diamo solo la traccia. Sia A l'insieme dei razionali $x > 0$ tali che $x^n \leq a$ e verifichiamo che A è non vuoto e superiormente limitato. Se $a \geq 1$ allora $1^n = 1 \leq a$ e $1 \in A$; se $a < 1$, scelto $x \in (0, a)$ razionale (e tale x esiste), si ha $x^n < a^n < a < 1$ per cui $x \in A$. Dunque A è non vuoto. Sia ora x razionale > 1 e $> a$. Allora $x^n \geq x > a$, da cui $x \notin A$. Ciò mostra che ogni $x \in A$ verifica $x \leq \max\{1, a\}$ per cui A è limitato superiormente. Dunque ha senso definire $\bar{x} = \sup A$ e si ottiene un numero reale positivo. A questo punto si controlla che $\bar{x}$ risolve l'equazione $x^n = a$. $\blacksquare$

Naturalmente si introduce la notazione $\sqrt[n]{a}$ per la soluzione data dal teorema (abbreviata in $\sqrt{a}$ se $n = 2$). Conviene però accettare la notazione anche quando $n = 1$: in tal caso la soluzione x dell'equazione $x^n = a$ è a per cui $\sqrt[1]{a} = a$. Segue l'usuale teoria dei radicali. In particolare si dimostra che $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$ per ogni terna di interi positivi m, n, p. Da ciò si deduce facilmente il risultato enunciato di seguito.

Proposizione 1.3. *Sia $a > 0$ e siano m', n', m'', n'' interi positivi.*

$$se \ \frac{m'}{n'} = \frac{m''}{n''} \ \ allora\ risulta \quad \sqrt[n']{a^{m'}} = \sqrt[n'']{a^{m''}}. \ \blacksquare \tag{1.2}$$

Dunque il valore del radicale non dipende tanto dall'esponente di a e dall'indice di radice, ma solo dal loro rapporto e risulta giustificata la definizione data di seguito.

Definizione 1.4. *Siano $a > 0$ e x razionale positivo. Poniamo*

$$a^x = \sqrt[n]{a^m} \quad \textit{ove } m, n \textit{ sono interi positivi tali che } x = m/n. \tag{1.3}$$

Poniamo inoltre $a^{-x} = 1/a^x$. ∎

Osservazione 1.5. Naturalmente a^m nella (1.3) è la potenza a esponente intero già definita. Nel caso in cui x sia intero positivo, si può prendere $n = x$ e $m = 1$. Allora la definizione di a^x fornisce $a^x = \sqrt[1]{a^n} = a^n$, ove, anche in questo caso, a^n è la potenza a esponente intero già definita. Dunque la definizione di potenza con esponente razionale estende (e non stravolge) quella di potenza con esponente intero positivo. ∎

A questo punto si dimostra che le proprietà usuali delle potenze continuano a valere anche nel caso degli esponenti razionali: ogni verifica si appoggia a un risultato della teoria dei radicali. Ciò che ci preme sottolineare sono i fatti seguenti, nei quali resta inteso che x e y sono numeri razionali:

$$\text{se } a = 1 \text{ allora } a^x = 1 \text{ per ogni } x \tag{1.4}$$
$$\text{se } a > 1 \text{ e } x < y \text{ allora } a^x < a^y \tag{1.5}$$
$$\text{se } a < 1 \text{ e } x < y \text{ allora } a^x > a^y. \tag{1.6}$$

Questi sono la base della definizione che segue, mediante la quale si vuole estendere la nozione di potenza conservando la proprietà di monotonia.

Definizione 1.6. *Siano $a > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Poniamo*

$$\begin{aligned} &a^x = 1 \quad \textit{se } a = 1 \\ &a^x = \sup\{a^y : y \textit{ razionale } \le x\} \quad \textit{se } a > 1 \\ &a^x = \inf\{a^y : y \textit{ razionale } \le x\} \quad \textit{se } a < 1. \end{aligned}$$ ∎

Osservazione 1.7. Dalla definizione segue facilmente che, se x è razionale, la nuova definizione di a^x fornisce di nuovo il valore già definito, vale a dire la definizione di potenza a esponente reale estende quella di potenza a esponente razionale. Si dimostra poi che anche nel caso degli esponenti reali continuano a valere le usuali proprietà delle potenze, la più importante delle quali è

$$a^{x+y} = a^x\, a^y \quad \text{per ogni } a > 0 \text{ e } x, y \in \mathbb{R} \tag{1.7}$$

e le proprietà (1.5)–(1.6) di monotonia. ∎

A questo punto introduciamo la nozione di funzione esponenziale.

Definizione 1.8. *Se $a > 0$ la funzione $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, detta funzione esponenziale di base a (o esponenziale di base a), è definita da $\exp_a x = a^x$.* ∎

Osservazione 1.9. Chiaramente la funzione $\exp_1$ è la costante 1. Se $a \neq 1$, la funzione $\exp_a$ è strettamente monotona, grazie all'Osservazione 1.7. Precisamente essa è strettamente crescente se $a > 1$ e strettamente decrescente se $a < 1$. In entrambi i casi, inoltre, la funzione $\exp_a$ è strettamente positiva e la sua reciproca è $\exp_{1/a}$, che coincide anche con la funzione $x \mapsto \exp_a(-x)$.

Proposizione 1.10. *Se $a > 0$, la funzione $\exp_a$ è continua.* ■

Dimostrazione. Sia dapprima $a > 1$. Poniamo $\varepsilon_n = a^{1/n} - 1$. Allora $\varepsilon_n > 0$ e risulta

$$a = (1 + \varepsilon_n)^n = 1 + n\varepsilon_n + \ldots > 1 + n\varepsilon_n \quad \text{da cui} \quad \varepsilon_n < \frac{a-1}{n}.$$

Dunque ε_n tende a 0 e $a^{1/n}$ tende a 1. D'altra parte, siccome $\exp_a$ è monotona, il limite destro $\exp_a(0^+)$ esiste. Dunque esso vale $1 = \exp_a 0$ e resta garantita la continuità a destra in 0. La continuità a sinistra segue da quella appena dimostrata e dall'identità $\exp_a x = 1/(\exp_a(-x))$. Se ora $x \in \mathbb{R}$, la continuità in x segue subito dalla continuità in 0 e dalla formula $a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$. Sia ora $a \in (0,1)$. Allora $a^x = 1/(1/a)^x$ e $1/a > 1$ per cui si conclude. Se infine $a = 1$ allora $\exp_a$ è costante. ■

Proposizione 1.11. *Se $a > 0$ e $\neq 1$ l'immagine della funzione $\exp_a$ è $(0, +\infty)$.* ■

Dimostrazione. Consideriamo il caso $a > 1$, nel quale $\exp_a$ è strettamente crescente. Ciò implica che $\exp_a x$ ha limite per $x \to +\infty$ e ora dimostriamo che esso vale $+\infty$. A questo scopo basta vedere che accade lungo una successione divergente a $+\infty$. Scritto $a = 1 + \sigma$, si ha $\sigma > 0$. Sia ora n intero positivo. Allora risulta

$$a^n = (1 + \sigma)^n = 1 + n\sigma + \ldots \geq 1 + n\sigma \quad \text{da cui} \quad \lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

Ciò dimostra che a^x diverge a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Essendo $a^x = 1/a^{-x}$, deduciamo che a^x è infinitesima per $x \to -\infty$. Siccome $\exp_a$ è continua e monotona, segue la tesi. Il caso $a \in (0,1)$ si riconduce al precedente, dato che $1/a > 1$ e $a^x = (1/a)^{-x}$. ■

Se $a > 0$ e $\neq 1$, grazie ai due risultati precedenti e all'Osservazione 1.9, la funzione $\exp_a$ ha inversa e questa è definita e continua nell'intervallo $(0, +\infty)$. In tale intervallo essa è anche strettamente monotona, con lo stesso tipo di monotonia di $\exp_a$.

Definizione 1.12. *Se $a > 0$ e $\neq 1$, il simbolo $\log_a$ denota l'inversa di $\exp_a$ e, se $x > 0$, il numero reale $\log_a x$ si chiama logaritmo in base a di x.* ■

Dalle proprietà elementari delle potenze a esponente reale seguono immediatamente le proprietà abituali dei logaritmi. Il prossimo obiettivo è la convessità degli esponenziali: questo consentirà una verifica più semplice della loro differenziabilità.

Lemma 1.13. *Siano m, n interi con $1 \leq m \leq n$. Allora*

$$n(\tau^m - 1) \leq m(\tau^n - 1) \quad \textit{per ogni } \tau > 0. \ \blacksquare \tag{1.8}$$

Dimostrazione. Sia $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(\tau) = n(\tau^m - 1) - m(\tau^n - 1)$. Allora risulta $\varphi'(\tau) = mn(\tau^{m-1} - \tau^{n-1})$. Siccome $m \leq n$ abbiamo che $\varphi'(\tau) \geq 0$ se $\tau < 1$ e

$\varphi'(\tau) \le 0$ se $\tau > 1$. Dunque 1 è punto di massimo assoluto per φ, da cui $\varphi(\tau) \le \varphi(1) = 0$ per ogni τ, cioè la tesi. ∎

Lemma 1.14. *Sia $\vartheta \in (0,1)$. Allora*

$$t^\vartheta - 1 \le \vartheta(t-1) \quad \textit{per ogni } t > 0. \ \blacksquare \tag{1.9}$$

Dimostrazione. Sia dapprima ϑ razionale. Allora $\vartheta = m/n$ con m, n nelle condizioni del Lemma 1.13, il quale, applicato con $\tau = t^{1/n}$, fornisce $n(t^{m/n} - 1) \le m(t-1)$, cioè la tesi nel caso in questione. Sia ora $\vartheta \in (0,1)$ generico. Allora esiste una successione $\{\vartheta_k\}$ di numeri razionali dell'intervallo $(0,1)$ che converge a ϑ. Scritta la (1.8) con ϑ_k al posto di ϑ, prendiamo il limite per $k \to \infty$ con $t > 0$ fissato. Siccome $\exp_t$ è una funzione continua per la Proposizione 1.10, otteniamo la (1.9). ∎

Teorema 1.15. *La funzione $\exp_a$ è convessa.* ∎

Dimostrazione. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $\vartheta \in (0,1)$. Scrivendo la (1.9) con $t = a^{y-x}$ otteniamo

$$(a^{y-x})^\vartheta - 1 \le \vartheta(a^{y-x} - 1) \quad \text{cioè} \quad a^{\vartheta(y-x)} \le 1 + \vartheta(a^{y-x} - 1).$$

Moltiplicando per a^x abbiamo la disuguaglianza di convessità richiesta. ∎

Da questo risultato deduciamo facilmente la differenziabilità degli esponenziali e dei logaritmi e, anzi, la loro regolarità C^∞.

Teorema 1.16. *Sia $a > 0$. Allora la funzione $\exp_a$ è differenziabile e vale la formula*

$$\exp_a'(x) = \exp_a x \cdot \exp_a'(0) \quad \textit{per ogni } x. \ \blacksquare \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Poniamo per comodità $f = \exp_a$ e consideriamo dapprima l'origine. Per il Teorema 1.15, le derivate destra e sinistra esistono finite e basta dimostrare che esse coincidono. Abbiamo

$$f_-'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{a^{-h}}{h} = \lim_{h\to 0^+} a^{-h}\,\frac{a^h - 1}{h} = f_+'(0).$$

Se ora $x \in \mathbb{R}$, basta scrivere

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} a^x\,\frac{a^h - 1}{h} = a^x f'(0). \ \blacksquare$$

Osservazione 1.17. Se $\exp_a'(0) = 0$ allora $\exp_a'$ è identicamente nulla e $\exp_a$ è costante, per cui $a = 1$. Se $\exp_a'(0) > 0$, allora $\exp_a'$ è strettamente positiva, per cui $\exp_a$ è strettamente crescente e $a > 1$. Infine, se $\exp_a'(0) < 0$, vediamo che $a < 1$. In particolare, se $a \ne 1$, la derivata di $\exp_a$ non è mai nulla, il che implica la differenziabilità dell'inversa $\log_a$ in ogni $x > 0$ e la formula

$$\log_a'(x) = \frac{1}{\exp_a'(\log_a x)} = \frac{1}{\exp_a(\log_a x)\cdot \exp_a'(0)} = \frac{1}{x \exp_a'(0)}\,. \tag{1.11}$$

Corollario 1.18. *Se $a > 0$ la funzione $\exp_a$ è di classe C^∞ e vale la formula*

$$\exp_a^{(n)}(x) = \exp_a x \cdot (\exp_a'(0))^n \quad \textit{per ogni } x \textit{ e } n = 1, 2, \ldots . \tag{1.12}$$

In particolare, se $a \neq 1$, la funzione $\exp_a$ è strettamente convessa e la funzione $\log_a$ è pure di classe C^∞. ■

Dimostrazione. Per dimostrare la prima parte basta applicare il Teorema 1.16 iterativamente. Per la stretta convessità basta osservare che $\exp_a''$ è strettamente positiva. Infine la regolarità di $\log_a$ segue banalmente. ■

Introduciamo ora la costante di Nepero, ma non direttamente come nelle impostazioni tradizionali. Cerchiamo piuttosto, risolvendo rispetto ad a l'equazione $\exp_a'(0) = 1$, la base che semplifica, più di ogni altra, tutte le formule dell'Analisi matematica.

Lemma 1.19. *Siano $a, b > 0$. Allora vale la formula*

$$\exp_a'(0) = \exp_b'(0) \cdot \log_b a. \ ■ \tag{1.13}$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\exp_a x = \exp_b(\log_b a^x) = \exp_b(x \log_b a)$, da cui subito la (1.13) grazie al Teorema di derivazione della funzione composta. ■

Teorema 1.20. *Esiste uno e un solo $a > 0$ tale che $\exp_a'(0) = 1$.* ■

Dimostrazione. Fissiamo $b > 1$. Allora $\exp_b'(0) > 0$ e la formula (1.13) e il fatto che $\log_b = \exp_b^{-1}$ assicurano che la funzione $a \mapsto \exp_a'(0)$ e continua e strettamente crescente e ha tutto $\mathbb{R}$ come immagine. Dunque segue la tesi. ■

Definizione 1.21. *L'unico valore di a dato dal Teorema 1.20 è detto costante di Nepero e viene denotato con e. Si pone inoltre $\exp = \exp_e$ e $\ln = \log_e$.* ■

Osservazione 1.22. Le funzioni exp e ln sono dette *esponenziale* e *logaritmo* per antonomasia. La seconda, denotata talora con log, è detta anche *logaritmo naturale*, il che giustifica la scelta del simbolo ln. Si noti che $\exp 1 = \exp_e 1 = e^1 = e$. Dunque si ha anche $\ln e = 1$. Con l'uso di queste funzioni le formule già ottenute diventano

$$\exp^{(n)}(x) = \exp x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e } n = 1, 2, \ldots \quad \text{e} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{per ogni } x > 0$$

e dunque si semplificano notevolmente. Per questi motivi conviene in genere usare la base e anche per potenze e logaritmi in altre basi e scrivere

$$a^x = \exp(x \ln a) \quad \text{e} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \ ■ \tag{1.14}$$

Ora vediamo come e è legato a certi limiti, limiti che più spesso vengono usati per la definizione stessa di e.

Proposizione 1.23. *Risulta*

$$e = \lim_{|x| \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \ ■ \tag{1.15}$$

Dimostrazione. Basta dimostrare la prima uguaglianza. Abbiamo per $x \neq 0$

$$\ln\Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr)^x = x\ln\Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr).$$

Con il cambiamento di variabile $y = 1/x$ otteniamo allora

$$\lim_{|x|\to+\infty} \ln\Bigl(1+\frac{1}{x}\Bigr)^x = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\ln(1+y) = \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)-\ln 1}{y} = \ln'(1) = 1.$$

Siccome exp è una funzione continua, deduciamo l'uguaglianza desiderata. ∎

2. Con l'uso delle equazioni differenziali

Come si vede la via intrapresa nel paragrafo precedente è stata lunga. Ancora più laboriosa sarebbe stata la trattazione se non avessimo usato la convessità per dimostrare la differenziabilità. Questa alternativa, tuttavia, avrebbe consentito un uso più limitato dell'Analisi matematica (pur di disporre di dimostrazioni ad hoc per soli esponenziali e logaritmi di risultati generali, come il Teorema dei valori intermedi) e si sarebbe prestata a un'introduzione delle funzioni in questione senza l'utilizzo di troppi prerequisiti.

In questo paragrafo e nel successivo, invece, facciamo largo uso dell'Analisi matematica, ma come contropartita otteniamo una trattazione più snella. Dunque ripartiamo daccapo e vediamo una diversa possibile introduzione della funzione exp. Le altre funzioni esponenziali e logaritmiche vengono definite di conseguenza. Tuttavia procediamo speditamente. Anche se è possibile utilizzare risultati meno generali, ci appoggiamo a un risultato classico sul problema di Cauchy:

Teorema 2.1. *Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e $L > 0$ tali che*

$$|f(t,x) - f(t,y)| \le L|x-y| \quad \textit{per ogni } t,x,y \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Allora, per ogni $(t_0,u_0) \in \mathbb{R}^2$, esiste una e una sola $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 che verifica

$$u'(t) = f(t,u(t)) \quad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R} \quad \textit{e} \quad u(t_0) = u_0. \ \blacksquare \tag{2.2}$$

Osservazione 2.2. Tuttavia, per poter definire l'esponenziale per questa via, occorre saper dimostrare questo risultato senza usare l'esponenziale. Ebbene una dimostrazione di questo tipo esiste e ora ne diamo un cenno. Per quanto riguarda l'esistenza si può ripercorrere una dimostrazione classica basata sulle approssimazioni di Peano-Picard senza usare l'esponenziale. Il punto cruciale è l'unicità. Per semplificare le notazioni supponiamo $t_0 = 0$ e consideriamo solo il problema di Cauchy in avanti. Siano u_1 e u_2 due soluzioni e sia $u = u_1 - u_2$: dobbiamo dimostrare che $u = 0$. A tale scopo fissiamo $T > 0$ ad arbitrio e dimostriamo che $u(t) = 0$ per ogni $t \in [0,T]$. Grazie alle ipotesi abbiamo facilmente

$$|u(t)| = \Bigl|\int_0^t f(s,u_1(s))\,ds - \int_0^t f(s,u_2(s))\,ds\Bigr| \le L\int_0^t |u(s)|\,ds. \tag{2.3}$$

Ora il resto della dimostrazione non può passare attraverso il Lemma di Gronwall, che utilizza l'esponenziale. Dimostriamo invece una stima. Per il Teorema di Weierstrass possiamo scegliere $M > 0$ verificante $|u(t)| \le M$ per ogni $t \in [0, T]$. Dalla (2.3) abbiamo allora $|u(t)| \le MLt$ per ogni $t \in [0, T]$. Usando ciò e riutilizzando la (2.3), otteniamo

$$|u(t)| \le L \int_0^t MLs\,ds = ML^2 \frac{t^2}{2} \quad \text{per ogni } t \in [0, T]$$

e si capisce che, procedendo per induzione, arriviamo alla stima

$$|u(t)| \le ML^n \frac{t^n}{n!} = M \frac{(Lt)^n}{n!} \quad \text{per ogni } t \in [0, T] \text{ e } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Siccome $\lim_{n\to\infty} x^n/n! = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, concludiamo che u è nulla in $[0, T]$. ∎

A questo punto è giustificata la definizione data di seguito: infatti il problema di Cauchy che viene preso in considerazione è chiaramente caso particolare del Teorema 2.1.

Definizione 2.3. *Chiamiamo funzione esponenziale, o semplicemente esponenziale, l'unica funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 che verifica*

$$u'(t) = u(t) \quad \textit{per ogni } t \in \mathbb{R} \quad \textit{e} \quad u(0) = 1. \tag{2.4}$$

Denotiamo la funzione esponenziale con $\exp$ *e poniamo* $e = \exp 1$. ∎

Teorema 2.4. *La funzione esponenziale è di classe C^∞, strettamente positiva, strettamente crescente e strettamente convessa e verifica*

$$\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y \quad \textit{per ogni } x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Dimostrazione. La regolarità C^∞ è chiara. Siccome la funzione nulla risolve l'equazione differenziale $u' = u$ e ogni problema di Cauchy per tale equazione ha soluzione unica per il Teorema 2.1, l'esponenziale non si può annullare. Essendo $\exp 0 = 1 > 0$ si ha necessariamente $\exp t > 0$ per ogni t. Allora si ha anche $\exp'(t) = \exp''(t) = \exp t > 0$ per ogni t, da cui le altre due proprietà enunciate. Per dimostrare la (2.5), fissiamo x e consideriamo il problema di Cauchy (pure caso particolare del Teorema 2.1)

$$u'(t) = u(t) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad u(0) = \exp x.$$

Due soluzioni sono date dalle formule

$$u_1(t) = \exp(x + t) \quad \text{e} \quad u_2(t) = \exp x \cdot \exp t.$$

Per l'unicità esse coincidono, da cui la (2.5). ∎

Osservazione 2.5. Apriamo una brevissima parentesi: d'ora in poi non utilizzeremo più il Teorema 2.1. Ciò significa che come prerequisito basterebbe saper trattare il problema di Cauchy per la sola equazione $u' = u$, ma sempre con t_0 e u_0 arbitrari.

Osservazione 2.6. Riprendiamo il discorso. Altre proprietà dell'esponenziale si dimostrano facilmente. Ad esempio, dalla convessità si deduce subito che

$$\exp x \geq \exp 0 + x \exp'(0) = 1 + x \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \tag{2.6}$$

per cui $\exp x$ diverge a $+\infty$ per $x \to +\infty$. Siccome la positività e la (2.5) implicano $\exp(-x) = 1/\exp x$ per ogni x, si deduce anche che $\exp x$ è infinitesima per $x \to -\infty$. ∎

Per l'osservazione 2.6, in particolare, la funzione exp è biiettiva da $\mathbb{R}$ su $(0, +\infty)$, per cui è giustificata l'introduzione delle funzioni correlate data di seguito.

Definizione 2.7. *Poniamo* $\ln = \exp^{-1}$, *la funzione inversa di* exp. *Per* $a > 0$ *definiamo inoltre* $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e, se* $a \neq 1$, $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *mediante le formule*

$$\exp_a x = \exp(x \ln a) \quad \textit{per } x \in \mathbb{R} \quad \textit{e} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad \textit{per } x > 0. \ \blacksquare \tag{2.7}$$

Naturalmente si introduce anche la notazione a^x in alternativa a $\exp_a x$, per cui le (2.7) concordano con le (1.14). Notiamo poi che $e^x = \exp_e x = \exp(x \ln e) = \exp x$ (dato che, per definizione, ln è l'inversa di exp e $\ln e = 1$ in quanto $\exp 1 = e$) e osserviamo che $a^1 = \exp(1 \cdot \ln a) = \exp(\ln a) = a$ per ogni $a > 0$. Inoltre $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ per $x, y > 0$, come diretta conseguenza della definizione di ln e della (2.5). Più in generale si eseguono tutti i controlli necessari a garantire che ciò che si sta facendo è coerente con le altre impostazioni. Verifichiamo qualcuna delle proprietà, in primis la (1.7) (da cui anche la (1.1) in quanto $a^1 = a$ come si è osservato). Si ha per $x, y \in \mathbb{R}$ e $a, b > 0$

$$\begin{aligned}
&a^{x+y} = \exp((x+y)\ln a) = \exp(x \ln a + y \ln a) = \exp(x \ln a) \cdot \exp(y \ln a) = a^x a^y \\
&(a^x)^y = \exp(y \ln a^x) = \exp(y \ln(\exp(x \ln a))) = \exp(yx \ln a) = a^{xy} \\
&(ab)^x = \exp(x \ln(ab)) = \exp(x \ln a + x \ln b) = \exp(x \ln a) \cdot \exp(x \ln b) = a^x b^x.
\end{aligned}$$

Vediamo infine che $\log_a = \exp_a^{-1}$ e la formula di derivazione del logaritmo naturale. Si ha

$$\begin{aligned}
&\exp_a(\log_a x) = \exp((\log_a x)\ln a) = \exp(\ln x) = x \qquad \text{per } x > 0 \\
&\log_a(\exp_a x) = \frac{\ln(\exp_a x)}{\ln a} = \frac{\ln(\exp(x \ln a))}{\ln a} = \frac{x \ln a}{\ln a} = x \qquad \text{per } x \in \mathbb{R} \\
&\ln'(x) = (\exp^{-1})'(x) = \frac{1}{\exp'(\exp^{-1}(x))} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x} \qquad \text{per } x > 0.
\end{aligned}$$

Come si vede tutti controlli sono facili. Grazie all'ultima formula, poi, la Proposizione 1.23 si ridimostra come nel paragrafo precedente.

3. Prima il logaritmo naturale

L'ultima introduzione che proponiamo definisce il logaritmo usando la teoria elementare dell'integrazione. L'esponenziale e la costante di Nepero vengono definiti di conseguenza. Ancora procediamo speditamente.

Definizione 3.1. *Definiamo* $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *mediante la formula*

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \textit{per } x > 0 \,. \blacksquare \tag{3.1}$$

Osservazione 3.2. La definizione ha senso data la continuità (o la monotonia) della funzione integranda e fornisce una funzione di classe C^∞ che verifica $\ln'(x) = 1/x$ per ogni $x > 0$. Seguono la stretta monotonia crescente e la stretta concavità di $\ln$. Proprietà che sono conseguenze meno ovvie della definizione sono date dai risultati che seguono.

Teorema 3.3. *La funzione* $\ln$ *verifica*

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \textit{per ogni } x, y > 0 \,. \blacksquare \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Fissiamo x e y. Con il cambiamento di variabile $t = xs$ abbiamo

$$\ln(xy) - \ln x = \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{x\,ds}{xs} = \int_1^y \frac{ds}{s} = \ln y. \blacksquare$$

Proposizione 3.4. *L'immagine di* $\ln$ *è tutto* $\mathbb{R}$. $\blacksquare$

Dimostrazione. Studiamo il comportamento di $\ln x$ per $x \to +\infty$. Dalla monotonia di $\ln$ già osservata segue che il limite esiste e dimostriamo che esso è $+\infty$. Per assurdo sia esso un numero reale λ, dunque finito. Abbiamo

$$\lim_{x \to +\infty} \bigl(\ln(2x) - \ln x\bigr) = \lambda - \lambda = 0.$$

D'altra parte per ogni $x > 0$ abbiamo dalla (3.2)

$$\ln(2x) - \ln x = \ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t} \ge \int_1^2 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}$$

e otteniamo una contraddizione. Dunque $\ln x$ diverge per $x \to +\infty$. Per vedere il comportamento all'origine osserviamo che la (3.2) implica $\ln(1/x) = -\ln x$ per ogni $x > 0$. Abbiamo pertanto

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = \lim_{y \to +\infty} \ln \frac{1}{y} = \lim_{y \to +\infty} (-\ln y) = -\infty.$$

La tesi segue allora dal Teorema dei valori intermedi per le funzioni continue. $\blacksquare$

Essendo $\mathbb{R}$ l'immagine di $\ln$ ed essendo $\ln$ anche strettamente crescente, la funzione inversa $\ln^{-1}$ di $\ln$ è ben definita in $\mathbb{R}$.

Definizione 3.5. *Definiamo* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mediante* $\exp = \ln^{-1}$ *e poniamo* $e = \exp 1$. $\blacksquare$

Seguono le proprietà usuali dell'esponenziale e la formula per la sua derivata. A questo punto, esponenziali e logaritmi in altre basi possono essere definiti ancora mediante la (2.7) e la verifica delle proprietà abituali non offre difficoltà.