Gianni Gilardi: esercitazioni a.a. 2016/2017

(aggiornamento* del 3 marzo 2017)

Queste pagine, aggiornate quando è necessario, raccolgono gli esercizi che si intendono proporre durante le esercitazioni dei corsi di Analisi Matematica 1 e Analisi Matematica 2. Essi, di solito, sono diversi da quelli del mio libro *Analisi Matematica di Base* (seconda edizione), del quale tendo a seguire le notazioni. Di fatto se ne eseguiranno anche altri: durante le lezioni, infatti, vari esercizi, eventualmente nella forma di esempi, vengono improvvisati. Inoltre, di solito, si coglie l'occasione per considerazioni di carattere generale, in particolare per esercizi più o meno analoghi. Degli esercizi più complessi e di alcuni presi a modello riporto una soluzione o qualche indicazione. Alcune formule sono numerate: la numerazione riparte da (1) in ogni esercizio.

1. Numeri complessi

1.1. Calcolare

$$i^{2010}\,, \quad \frac{1}{i}\,, \quad \frac{(2-3i)^2}{3+4i}\,, \quad \frac{2+i}{(1-i)^2}\,, \quad \Bigl(\frac{i}{1+i}\Bigr)^2\,, \quad \operatorname{Im}(3e^{2i})\,, \quad |e^{5i-4}|.$$

1.2. Calcolare, disegnare e capire

$$(1+i\sqrt{3})^n\,, \quad (1+i)^n\,, \quad \Bigl(\frac{1}{5}+\frac{i\sqrt{3}}{5}\Bigr)^n.$$

Si è passati per la forma esponenziale, che evidenzia comportamenti a spirale.

1.3. Trovare una formula di quintuplicazione per il coseno. Si è passati per $e^{5i\vartheta}=(e^{i\vartheta})^5$, ovviamente. Si è colta l'occasione per parlare di formula di Newton del binomio (in particolare di fattoriali e coefficienti binomiali) per introdurre i polinomi di Chebychev.

1.4. Descrivere in termini geometrici le applicazioni di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$

$$z \mapsto (1+i\sqrt{3})z+i \quad \text{e} \quad z \mapsto i\overline{z}.$$

1.5. Vari problemi di radice n-esima inventati sul momento.

1.6. Risolvere

$$z^2+z+1=0\,, \quad z^4+z^2+1=0\,, \quad z^2-(1+i)z+i=0\,, \quad z^{11}+z^3=0.$$

Si è parlato dell'equazione generica di secondo grado.

1.7. Trovare il polinomio $P(z)$ di grado minimo a coefficienti reali con cefficiente direttivo 1 tale che l'equazione $P(z)=0$ abbia le radici seguenti: 0 tripla, i doppia e $1+i$ semplice.

1.8. Dire quanti sono i numeri complessi z verificanti

$$z^2(z^2+4z+5)^3(z^2-4)(z^6+1)=0 \quad \text{e} \quad \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z > 0.$$

Si è osservato che le molteplicità sono irrilevanti. Si è parlato di interpretazione geometrica di disuguaglianze del tipo $y>f(x)$ ove $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è una funzione.

1.9. Calcolare $\sin i$ e $\cos i$. Valgono disuguaglianze del tipo $|\sin z|\le 1$?

1.10. Caratterizzare le coppie $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$ tali che $e^{z_1}=e^{z_2}$. Periodicità dell'esponenziale.

---

* Eventuali aggiornamenti successivi alla pagina: `http://www-dimat.unipv.it/gilardi/WEBGG/analisi#.htm` ove `#=1` oppure `#=2`

1.11. Risolvere $e^z = 1$ e $e^z = i$.

1.12. Risolvere $\sinh z = 0$ e $\cosh z = 0$.

1.13. Verificare che $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$.

I prossimi due esercizi riguardano applicazioni della teoria dei numeri complessi a problemi posti in ambiti diversi, anche apparentemente lontani. Diamo le soluzioni complete.

1.14. Esprimere, per x reale, $\cos 5x$ attraverso $\cos x$ e $\sin x$.
Si ha $\cos 5x = \operatorname{Re} e^{i5x}$. D'altra parte

$$\begin{aligned} e^{i5x} &= \left(e^{ix}\right)^5 = (\cos x + i \sin x)^5 \\ &= \cos^5 x + 5i \cos^4 x \sin x + 10i^2 \cos^3 x \sin^2 x + 10i^3 \cos^2 x \sin^3 x + 5i^4 \cos x \sin^4 x + i^5 \sin^5 x \\ &= \cos^5 x + 5i \cos^4 x \sin x - 10 \cos^3 x \sin^2 x - 10i \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos x \sin^4 x + i \sin^5 x. \end{aligned}$$

Abbiamo pertanto

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$$

e anche $\sin 5x = \operatorname{Im} e^{i5x} = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$ come sottoprodotto.

1.15. Siano $P(x)$, $Q(x)$ e $R(x)$ polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x tali che il polinomio $P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5)$ sia divisibile per $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Dimostrare che $P(x)$ è divisibile per $x - 1$.

L'ipotesi si esprime, con $S(x)$ polinomio opportuno, attraverso la formula

$$P(x^5) + xQ(x^5) + x^2R(x^5) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)S(x) \tag{1}$$

e la tesi equivale al fatto seguente: $x = 1$ risolve l'equazione $P(x) = 0$, cioè avviene che $P(1) = 0$. Siccome le scelte di x che forniscono $P(1)$ sono le stesse che forniscono $Q(1)$ e $R(1)$, i destini di questi tre numeri sono collegati. Dimostriamo che $P(1) = Q(1) = R(1) = 0$ scrivendo un sistema di tre equazioni nelle tre incognite $P(1)$, $Q(1)$ e $R(1)$. A tal fine usiamo le radici quinte complesse di 1. Poniamo per comodità $\alpha = e^{2\pi i/5}$, così che le cinque radici quinte sono α, α^2, α^3, α^4 e $\alpha^5 = 1$. Essendo le prime quattro diverse da 1, se x è una qualunque di esse, possiamo scrivere $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^5 - 1)/(x - 1) = 0$. Allora, scegliendo ciascuna di queste quattro radici come valore di x nella (1), otteniamo quattro uguaglianze, ma ne scriviamo solo tre, che ci bastano:

$$P(1) + \alpha Q(1) + \alpha^2 R(1) = 0, \quad P(1) + \alpha^2 Q(1) + \alpha^4 R(1) = 0, \quad P(1) + \alpha^3 Q(1) + \alpha^6 R(1) = 0.$$

Si intuisce che l'unica soluzione $(P(1), Q(1), R(1))$ del sistema è $(0,0,0)$, il che conclude il discorso. Per completezza dimostriamo anche questo fatto algebrico. Per confronto otteniamo

$$\alpha Q(1) + \alpha^2 R(1) = \alpha^2 Q(1) + \alpha^4 R(1) \quad \text{e} \quad \alpha Q(1) + \alpha^2 R(1) = \alpha^3 Q(1) + \alpha^6 R(1).$$

Usando $\alpha^6 = \alpha^5 \alpha = \alpha$ e semplificando, deduciamo successivamente

$$\begin{aligned} &(1-\alpha)Q(1) = (\alpha^3 - \alpha)R(1) && \text{e} && (1-\alpha^2)Q(1) = (1-\alpha)R(1) \\ &Q(1) = -\alpha(1+\alpha)R(1) && \text{e} && (1+\alpha)Q(1) = R(1) \\ &Q(1) = -\alpha(1+\alpha)R(1) && \text{e} && -\alpha(1+\alpha)^2 R(1) = R(1) \\ &Q(1) = -\alpha(\alpha+1)R(1) && \text{e} && (1 + \alpha + 2\alpha^2 + \alpha^3)R(1) = 0. \end{aligned}$$

Studiamo il numero $c = 1+\alpha+2\alpha^2+\alpha^3$. Osservato che $\alpha^3 = \alpha^{-2} = \overline{\alpha^2}$, abbiamo $\operatorname{Im} \alpha^3 = -\operatorname{Im} \alpha^2$. D'altra parte $\operatorname{Im} \alpha > 0$ e $\operatorname{Im} \alpha^2 > 0$. Segue che $\operatorname{Im} c = \operatorname{Im} \alpha + \operatorname{Im} \alpha^2 > 0$ da cui $c \neq 0$. Concludiamo che $R(1) = 0$ e, risalendo, che $Q(1) = 0$ e $P(1) = 0$.

2. Successioni

2.1. Confronti fra le definizioni standard di convergenza e di divergenza e definizioni modificate.

2.2. Verifiche di convergenze e di divergenze secondo le definizioni in casi semplicissimi.

2.3. Se $\{a_n\}$ converge a -5 e $\{b_n\}$ diverge a $+\infty$, allora $\{(a_n+b_n)\}$ diverge a $+\infty$. Più in generale, se $\{a_n\}$ è limitata e $\{b_n\}$ diverge a $+\infty$, allora $\{(a_n+b_n)\}$ diverge a $+\infty$.

2.4. La forma indeterminata $+\infty-\infty$: costruzione della casistica completa. Proposte le casistiche complete per $0\cdot\infty$, ∞/∞ e $0/0$.

2.5. Se $\{a_n\}$ converge a ℓ, allora converge a ℓ anche $\{b_k\}$ data da $b_k=a_{3k-20}$ per $k\geq 7$.

2.6. Le successioni reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ verificano $b_n=e^{a_n}-a_n$ per ogni n. Quali delle affermazioni seguenti sono vere? *a)* $b_n>0$ per ogni n (vera: dal grafico preciso dell'esponenziale); *b)* $b_n\geq 2a_n$ per n abbastanza grande (falsa); *c)* $\{b_n\}$ diverge se e solo se $\{a_n\}$ diverge (falsa: disegnare il grafico di $x\mapsto e^x-x$, $x\in\mathbb{R}$, per capire subito); *d)* $\{b_n\}$ è limitata (falsa).

2.7. La successione $\{a_n\}$ verifica $0\leq a_{n+4}\leq a_n$ per ogni n. Quali delle affermazioni seguenti sono vere? *a)* si ha $a_{n+1}\leq a_n$ per ogni n (falsa); *b)* $\{a_n\}$ non oscilla (falsa); *c)* se $\{a_n\}$ converge allora il limite è 0 (falsa); *d)* $\{a_n\}$ è limitata (vera).

2.8. Discutere l'affermazione: una successione complessa limitata $\{a_n\}$ oscilla se e solo se oscillano entrambe le successioni $\{\operatorname{Re}a_n\}$ e $\{\operatorname{Im}a_n\}$.

2.9. Discutere l'affermazione: una successione $\{x_n\}$ di vettori di $\mathbb{R}^N$ verifica $\lim_{n\to\infty}|x_n|=+\infty$ se e solo se $\lim_{n\to\infty}|x_{n,i}|=+\infty$ ($x_{n,i}=i$-esima coordinata di x_n) per almeno un i.

2.10. Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^3-n^2}\,,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+10^{10}\sqrt{n}}{4n^3+n}\,,\qquad \lim_{n\to\infty}\bigl(\sqrt{n^2+n}-n\bigr).$$

Per l'ultimo il calcolo è il seguente (in attesa di strumenti più generali ed efficienti)

$$\lim_{n\to\infty}\bigl(\sqrt{n^2+n}-n\bigr)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(1/n)}+1}=\frac{1}{2}\,.$$

Sarebbe stato corretto trascurare l'n sotto radice nell'ultimo limite proposto?

2.11. Calcolare i limiti delle successioni seguenti

$$\frac{\cos(1/n)\,\tanh n^2}{e^{2/n}+\sin^2 2^{-n}}\,,\qquad \ln(3n+2)-\ln(5n+4)\,,\qquad \frac{4n-3n^2+5\sqrt{n}}{n^2+1}$$
$$\frac{n-3n^2+5}{\sqrt{n^4+1}}\,,\qquad \frac{n\arctan^3 2n}{n+1+\sin^2 5n}\,,\qquad \frac{3n^4-2n\sin n+e^{1/n}}{2n^4\tanh n+\sqrt{n^2+1}}\,.$$

2.12. Studiare i limiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha\,n^\alpha+n+1}{(n+1)^\alpha}\,,\qquad \lim_{n\to\infty}(-1)^n n^{-\alpha}\sqrt{n^2+1}\,,\qquad \lim_{n\to\infty}e^{-n}\cosh\alpha n.$$

al variare di $\alpha>0$.

2.13. Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3in^2-5n+2i}{2n\sqrt{n^2+1}-e^{ni}}\,,\qquad \lim_{n\to\infty}\Bigl(\frac{3n+1}{\sqrt{n^2+5}},\sin\frac{\pi n-1}{6n+3},e^{1/n}\Bigr).$$

3. Serie numeriche

3.1. Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 - 10n + 1}{\sqrt{n^\alpha + 1}} \,, \quad \alpha > 0.$$

Si noti che il numeratore può assumere valori negativi. Disturba ciò?

3.2. Studiare la convergenza semplice/assoluta delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^2} \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos n\vartheta \quad (\vartheta \in \mathbb{R})$$

e calcolare la somma dell'ultima.

3.3. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{(\ln n^2)^n} \,, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\arctan n}{(\ln n)^n} \,, \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{\arctan n}{(\ln \ln n)^n} \,, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 \cos((n+1)/n)}{(\ln n)^n} \,.$$

3.4. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{n^3 + 5}{n!(n-3)} \,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n! \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n/2}\, n! \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2} (n!)^\alpha \quad (\alpha > 0).$$

3.5. Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n + 2^n}{n^2 + 3^n} \,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! + (2n)!}{(3n)!} \,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^\alpha}{(2n)!} \quad (\alpha > 0).$$

3.6. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini reali non negativi convergente. Fornire un esempio in cui $\{a_n\}$ non è monotona. Ma si può dedurre almeno che esiste m tale che la successione $\{a_n\}_{n \geq m}$ è monotona? Fornire dimostrazione o controesempio.

3.7. Se la serie reale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge assolutamente allora esiste una costante $M \geq 0$ tale che $|a_n| \leq M/n$ per ogni n. Vero o falso? Fornire dimostrazione o controesempio.

3.8. Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ove

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \text{se } n \text{ è pari} \quad \text{e} \quad a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{se } n \text{ è dispari.}$$

Si può applicare il Criterio di Leibniz?

3.9. Sia $\{a_n\}$ una successione reale strettamente positiva. Discutere la validità delle affermazioni seguenti: *i)* la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge se e solo se la successione $\{a_n\}$ è infinitesima; *ii)* la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge se e solo se la successione $\{a_n\}$ è infinitesima e monotona. Fornire dimostrazioni o controesempi.

3.10. Studiare al variare di $\alpha > 0$ la convergenza semplice/assoluta delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi/2}{n^\alpha} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n n}{n^\alpha} \,.$$

3.11. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie complessa. Discutere le affermazioni seguenti: *i*) la serie data converge assolutamente se e solo se entrambe le serie $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ convergono assolutamente; *ii*) la serie data converge semplicemente se e solo se entrambe le serie $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ convergono semplicemente; *iii*) la serie data converge semplicemente se e solo se essa converge e almeno una delle serie $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ converge semplicemente. Fornire dimostrazioni o controesempi.

3.12. Studiare la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ove

$$a_n = \frac{2}{n} \quad \text{se } n \text{ è pari} \quad \text{e} \quad a_n = \frac{1}{n} \quad \text{se } n \text{ è dispari.}$$

La facile congettura è che la serie diverge a $+\infty$, ma dare un dimostrazione completamente rigorosa di questo fatto potrebbe offrire qualche difficoltà. Ad esempio è scorretto considerare la serie $(-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \ldots$ senza sapere a priori che la serie data non oscilla, dato che le ridotte della nuova serie costituiscono solo una sottosuccessione della successione delle ridotte della serie data. L'inserimento delle parentesi, che può tornare utile per dimostrare la tesi, può essere fatto solo a livello delle ridotte. Ma vi è una via che viene facile dopo aver pensato la strategia: si rappresenta a_n come $a_n = b_n + c_n$ ove $b_n = 1/n$ per ogni $n \geq 1$ e si studiano le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_n$. Dopo di che si conclude facilmente.

3.13. Sia $\{a_n\}_{n \geq 1}$ la successione data dalle formule

$$a_n = \frac{1}{n^{1/2}} \quad \text{se } n \text{ è pari} \quad \text{e} \quad a_n = \frac{1}{n^{1/2} + n^{1/4}} \quad \text{se } n \text{ è dispari.}$$

Dimostrare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ diverge a $+\infty$ imitando l'Esercizio 3.12.

3.14. Discutere la validità del seguente "Criterio del confronto asintotico" (virgolette d'obbligo): se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono successioni reali strettamente positive tali che il limite $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n$ esista finito e non nullo, allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge se e solo se converge la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ (esercizio non per tutti).

3.15. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie reale. Discutere i legami fra la convergenza della serie data e la convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ nei due casi seguenti: *i*) nell'ipotesi aggiuntiva $a_n \geq 0$ per ogni n; *ii*) senza ipotesi sul segno degli a_n. Fornire dimostrazioni o controesempi.

3.16. Sia $\{a_n\}$ una successione reale positiva. Se $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Vero o falso? Fornire dimostrazione o controesempio.

3.17. Sia $\{a_n\}$ una successione reale, o complessa, o di vettori euclidei. Dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq \Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \Bigr)^2 \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \leq \Bigl(\sup_{n \geq 0} |a_n| \Bigr) \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

ove somme ed estremo superiore possono assumere il valore $+\infty$ (esercizio non per tutti).

3.18. Sia $c > 0$. Dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n c^{-n}}{n!} = 0 \quad \text{per ogni } c > e \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^n c^{-n}}{n!} = +\infty \quad \text{per ogni } c < e$$

studiando la convergenza delle due serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n^n c^{-n})/n!$ e $\sum_{n=1}^{\infty} n!/(n^n c^{-n})$ con il Criterio del rapporto. Nello studio di entrambe le serie resta escluso il caso $c = e$, che porta a un problema difficile. Segnaliamo a questo proposito la formula di tipo asintotico ma molto precisa

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}\, \bigl(1 + \varepsilon_n\bigr) \quad \text{ove } \{\varepsilon_n\} \text{ è una successione infinitesima} \tag{1}$$

detta *formula di Stirling*.

4. Limiti e continuità

4.1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in 0. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x)| \le 1/\delta$ per $|x| < \delta$. Vero o falso? Fornire dimostrazione o controesempio.

4.2. Le stesse richieste dell'Esercizio 4.1, ora con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

4.3. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua in 0 con $f(0) \neq 0$. Dimostrare che esiste $\delta > 0$ tale che $\frac{1}{2}|f(0)| \le |f(x)| \le 2|f(0)|$ per $|x| < \delta$. L'ipotesi $f(0) \neq 0$ è essenziale?

4.4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in 0. Allora esiste un intorno di 0 in ogni punto del quale f è continua. Vero o falso? Fornire dimostrazione o controesempio.

4.5. Costruire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ discontinua in tutti gli interi e continua altrove.

4.6. Costruire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ discontinua in tutti i punti a coordinate intere e continua altrove.

4.7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data dalle formule

$$f(x) = \alpha \cos 2x \quad \text{se } x < 0\,, \qquad f(0) = \beta \quad \text{e} \quad f(x) = \gamma e^{3x-1} \quad \text{se } x > 0$$

ove α, β, γ sono parametri reali. Determinare per quali valori di detti parametri si verificano le condizioni seguenti: *i*) la funzione f è continua; *ii*) la funzione f ha una discontinuità eliminabile; *iii*) la funzione f ha un salto.

4.8. Determinare le discontinuità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalle formule $f(x) = \sin(\pi x/2)$ se x non è intero e $f(n) = 2n/(n^2+1)$ se $n \in \mathbb{Z}$.

4.9. Costruire il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R} \setminus \{0,1,2,3\}$ e avente limite 0 per $x \to -\infty$, limite $-\infty$ per $x \to +\infty$, le discontinuità elencate di seguito: una discontinuità eliminabile in 0, un salto in 1, limite $+\infty$ per $x \to 2$, limite $-\infty$ per $x \to 3$.

4.10. Riprendere l'Esercizio 4.9 e costruire una funzione f nelle condizioni richieste che sia elementare a tratti, vale a dire tale che si possa presentare $\mathbb{R}$ come unione di un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali f sia data da una formula del tipo $f(x) = aE(b(x-x_0)) + c$ con certi numeri reali a, b, c, x_0 e E funzione elementare fondamentale (seno, esponenziale, eccetera).

4.11. Sia I un intervallo. Esiste $f : I \to \mathbb{R}$ monotona con almeno una discontinuità eliminabile?

4.12. Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ non decrescente. Costruire $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua verificante $g(x) \ge f(x)$ per ogni $x \ge 0$. Si riesce a richiedere in aggiunta che anche g sia non decrescente? Che accade se si lascia cadere l'ipotesi di monotonia?

4.13. Costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con la proprietà seguente: per ogni intervallo I non ridotto a un punto $f|_I$ non è monotona. Domanda non per tutti: è vero o falso che ogni funzione di questo tipo è discontinua in tutti i punti?

4.14. Costruire $f, g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{(\ln x)^\sigma} = 0 \quad \text{per ogni } \sigma > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{e^{\sigma x}} = 0 \quad \text{per ogni } \sigma > 0\,.$$

4.15. Costruire $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha} = +\infty \quad \text{per ogni } \alpha > 1\,.$$

4.16. Sia data una successione $\{f_n\}$ di funzioni $f_n : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ tutte strettamente positive. Si definisca $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ mediante

$$f(x) = k \max\{f_0(x), \ldots, f_k(x)\} \quad \text{se } x \in (k, k+1]\,, \; k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Si dimostri che per ogni n (chi non riesce al primo colpo prenda dapprima $n = 0$, poi $n = 1$, eccetera, proseguendo finché non riesce a intuire) risulta $f(x) \geq n f_n(x)$ per $x > n$ e si deduca che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{f_n(x)} = +\infty \quad \text{per ogni } n\,.$$

Si noti che la situazione comprende quella della successione definita dalle condizioni

$$f_0(x) = x \quad \text{per } x > 0 \quad \text{e} \quad f_{n+1}(x) = e^{f_n(x)} \quad \text{per } x > 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

e si mediti.

4.17. Questo è un esercizio per tutti. Mostrare che i limiti dati di seguito non esistono.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{|x|+|y|}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^{1/2}}{|x|+|y|}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^{1/2}}{|x|+y^2}\,.$$

4.18. Questo è un po' più difficile. Mostrare che i limiti dati di seguito sono nulli.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^{3/2}}{x^2+y^2}\,, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|+y^2}\,.$$

4.19. Questo esercizio non è banale. Posto

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; |y| < x^2\} \quad \text{e} \quad A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; |y-x| < x^2\}$$

si definiscano $f_i : A_i \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ mediante

$$f_i(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{per } (x,y) \in A_i\,.$$

Si dimostri che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \frac{1}{2}\,.$$

4.20. Nemmeno questo è banale. Sia $p \in (0,+\infty)$. Si definiscano $A \subset \mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$ mediante

$$A = \{(x,y) : \; 0 < y \leq px\} \quad \text{e} \quad f(x,y) = x^y.$$

Si dimostri che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$. Suggerimento: considerare $\ln f(x,y)$ con $x < 1$.

5. Differenziabilità, calcolo delle derivate, applicazioni

5.1. Calcolare le derivate nel generico $x \in \mathbb{R}$ di ciascuna delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il cui valore $f(x)$ è espresso dalle formule date di volta in volta

$$x^2 e^{-x^2} \sin 3x\,, \qquad \ln\ln(2+x^2)\,, \qquad \sin^2(1+e^x)$$
$$(1+x^2)^{1+x^2}\,, \qquad \cosh\sqrt{\ln(4+e^{\cos 2x})}\,, \qquad \frac{\cos^4 \ln(1+x^2)}{1+(1+x^2)^{3/2}}\,.$$

5.2. Determinare gli eventuali punti di non differenziabilità di ciascuna delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il cui valore $f(x)$ è espresso dalle formule date di volta in volta

$$\sin^2|x|\,, \quad |x-1|^{2/3}|\sin \pi x|\,, \quad \left|\ln\frac{x^2+1}{x^4+1}\right|, \quad \arctan(|x|-|\sin x|).$$

Nei punti di non differenziabilità, calcolare, se esistono, le derivate destra e sinistra.

5.3. Di ciascuna delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il cui valore $f(x)$ è, per $x \neq 0$, espresso dalle formule

$$x\sin^2\frac{1}{x}\,, \quad x^2\sin\frac{1}{x}\,, \quad |x|^\alpha \sin|x|^{-\beta} \quad (\alpha,\beta>0)\,, \quad (1-\cos x)\sin|x|^{-1/2}$$

rispettivamente si sa che $f(0)=0$. Mostrare la differenziabilità in ogni $x \neq 0$ e calcolare la derivata corrispondente. Decidere inoltre la continuità e la differenziabilità o meno nell'origine. Calcolare ciascuno dei limiti $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x)$ (se esistono) e, nel caso in cui f sia differenziabile in 0 (così che f' è una funzione con dominio $\mathbb{R}$), decidere se f' è continua in 0 o meno.

5.4. Si sa che la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è differenziabile e verifica $u(0)=0$ e, per ogni $x \in \mathbb{R}$, quanto prescritto di volta in volta. Calcolare $u'(0)$.

$$u^2(x)+(x^3+1)u(x) = 2x^6+x^3\,, \quad e^{2u(x)-x}+2e^{u(x)} = 3e^x\,, \quad \bigl(u(x)+1\bigr)^3 - e^{4x}u(x) = e^{4x}.$$

5.5. Costruire il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile in $\mathbb{R}\setminus\{0,1,2,3\}$ e avente in $0,1,2,3$ rispettivamente un punto privo di derivata destra, un punto angoloso, una cuspide, un flesso a tangente verticale. Cercare poi una funzione elementare a tratti in queste condizioni.

5.6. Determinare i valori, se esistono, del parametro λ che rendono differenziabili anche in 0 le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date di volta in volta.

$$\begin{array}{llcll}
f(x) = x\sin\lambda x & \text{se } x \le 0 & \text{e} & f(x) = 1-\cosh 2x & \text{se } x > 0 \\
f(x) = \cos^2 3x + \lambda x & \text{se } x \le 0 & \text{e} & f(x) = \lambda\sinh\lambda x & \text{se } x > 0 \\
f(x) = 1+x^2 & \text{se } x \le 0 & \text{e} & f(x) = \lambda + x & \text{se } x > 0 \\
f(x) = \lambda x + \sin^2 3x & \text{se } x \le 0 & \text{e} & f(x) = \ln(1+x) & \text{se } x > 0 \\
f(x) = \ln(1+x^2) & \text{se } x \le 0 & \text{e} & f(x) = \lambda + \sin 2x & \text{se } x > 0 \\
f(x) = \ln(1+x^2) & \text{se } x \le 0 & \text{e} & f(x) = \lambda + \cos 2x & \text{se } x > 0 \\
f(x) = \lambda\bigl(1-\exp(-x^2)\bigr) & \text{se } x \le 0 & \text{e} & f(x) = x^\lambda \sin(1/x) & \text{se } x > 0\,.
\end{array}$$

5.7. Discutere la convergenza (semplice e assoluta) delle serie

$$\sum_{n=1}^\infty n\sin^3 n^{-1/2}\,, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{1-e^{-2/n^3}}{\sinh(1/n)}\,, \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{n\sinh(1/n)}{\sqrt{1+n^4}}$$
$$\sum_{n=1}^\infty \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\,, \qquad \sum_{n=1}^\infty \left(\sqrt[3]{1+n^3}-n\right)\,, \qquad \sum_{n=1}^\infty (-1)^n n\sin\frac{1}{n^2}\,.$$

usando gli sviluppi del prim'ordine delle funzioni elementari.

Studiamo le ultime due serie. La prima delle due è a termini positivi. Usando lo sviluppo del prim'ordine $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ cioè $(1+x)^\alpha - 1 = x(\alpha + o(1))$ per $x \to 0$, abbiamo

$$\sqrt[3]{1+n^3} - n = n\left(\left(\frac{1}{n^3}+1\right)^{1/3} - 1\right) = n \cdot \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{3} + o(1)\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{3} + o(1)\right)$$

per cui la serie converge per il Criterio del confronto asintotico.

Studiamo ora l'ultima serie, che è a segni alterni dato che il seno è positivo per argomenti positivi piccoli. Per vedere la convergenza assoluta usiamo lo sviluppo $\sin x = x + o(x) = x\bigl(1+o(1)\bigr)$ per $x \to 0$. Deduciamo

$$n \sin\frac{1}{n^2} = n \cdot \frac{1}{n^2}\bigl(1+o(1)\bigr) = \frac{1}{n}\bigl(1+o(1)\bigr)$$

per cui la serie dei moduli diverge per il Criterio del confronto asintotico. Per vedere la convergenza semplice cerchiamo di applicare il Criterio di Leibniz. Il calcolo fatto mostra che la successione che dobbiamo considerare, cioè $\{n\sin(1/n^2)\}$, è infinitesima. La sua monotonia non è ovvia: infatti il fattore n cresce mentre il fattore $\sin(1/n^2)$ decresce. Di fatto è sufficiente verificare che la successione in questione è monotona almeno a partire da un certo indice. Usiamo il calcolo differenziale per controllare ciò, e lo facciamo in due modi: entrambi usano il teorema che afferma la monotonia crescente (decrescente) di una funzione differenziabile in un intervallo con derivata positiva (negativa). Prima possibilità. Introduciamo la funzione $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ data dalla formula $f(x) = x\sin(1/x^2)$, per cui $n\sin(1/n^2) = f(n)$, e controlliamo che essa è decrescente almeno in un intervallo del tipo $(x_0,+\infty)$ con un certo $x_0 > 0$. La funzione è differenziabile e la sua derivata vale

$$f'(x) = \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$$

per cui l'esistenza di x_0 nelle condizioni dette equivale all'esistenza di $\delta > 0$ tale che risulti $\sin t - 2t\cos t < 0$ per ogni $t \in (0,\delta)$. Definiamo allora $\varphi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ mediante la formula $\varphi(t) = \sin t - 2t\cos t$ e cerchiamo $\delta > 0$ tale che $\varphi(t) < 0$ per $0 < t < \delta$. Essendo $\varphi(0) = 0$, l'esistenza di δ nelle condizioni dette è garantita dalla disuguaglianza $\varphi'(0) < 0$. Ma un calcolo immediato mostra che $\varphi'(0) = -1$ per cui concludiamo. Secondo modo (collegato al precedente). Definiamo $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ mediante $g(x) = (1/x)\sin x^2$ (dunque $g(x) = f(1/x)$) per cui $n\sin(1/n^2) = g(1/n)$. Allora basta controllare che g è monotona in un intorno destro di $x = 0$. Abbiamo, per $x \to 0^+$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin x^2 + \frac{1}{x}\,2x\cos x^2 = -\frac{x^2(1+o(1))}{x^2} + 2(1+o(1)) = 1 + o(1).$$

Dunque g' ha limite destro 1 e resta positiva in un intorno destro, diciamo in $(0,\delta)$, per il Teorema della permanenza del segno. Allora g cresce in tale intorno.

6. Derivata nulla, segno della derivata, massimi e minimi in una variabile

Diamo esercizi di vari tipi. Alcuni sono di carattere teorico, altri di costruzione di situazioni critiche, altri ancora di calcolo. Di quelli veramente complessi forniamo una possibile soluzione.

6.1. Dimostrare le formule

$$\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x \quad \text{se } x > 0 \quad \text{e} \quad \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} - \arctan x \quad \text{se } x < 0$$

usando il Teorema della derivata nulla.

6.2. Due funzioni differenziabili $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verificano

$$x'(t) = -y(t) \quad \text{e} \quad y'(t) = x(t) \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare che il vettore $\bigl(x(t), y(t)\bigr)$ ha lunghezza indipendente da t.

6.3. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ un aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile avente in ogni punto di A un punto di minimo locale per f. Si può dedurre che f è costante? Fornire controesempio in caso di deduzione scorretta e ipotesi aggiuntive come rimedio. Rivedere il problema assumendo che A sia l'intervallo chiuso $[0,1]$ anziché un sottoinsieme aperto.

6.4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 0$ se $x \le 0$ e $f(x) = 1$ se $x > 0$. Trovare tutti i punti di minimo locale per f.

6.5. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile avente in 0 e in 1 due punti di minimo locale. Dimostrare che $f'(0) \ge 0$ e $f'(1) \le 0$.

6.6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione avente in 0 un punto di minimo locale. Supponendo che le derivate unilatere $f'_\pm(0)$ esistano, finite o meno, si dimostri che $f'_-(0) \le 0$ e $f'_+(0) \ge 0$. Inoltre, per ogni coppia di valori $\lambda_- \in [-\infty, 0]$ e $\lambda_+ \in [0, +\infty]$, si costruisca una funzione f, elementare separatamente in $(-\infty, 0]$ e in $[0, +\infty)$ e nelle condizioni dette, che verifica $f'_\pm(0) = \lambda_\pm$.

6.7. Costruire una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, avente in 0 un punto di minimo locale e priva di almeno una delle derivate unilatere $f'_\pm(0)$ o di entrambe.

6.8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione avente in 0 una discontinuità eliminabile. Dimostrare che 0 è un punto di massimo locale o un punto di minimo locale.

6.9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari (cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni x) e differenziabile. Discutere le affermazioni seguenti: *a*) risulta $f'(0) = 0$; *b*) f ha in 0 un punto di massimo locale oppure un punto di minimo locale. Fornire dimostrazioni o controesempi.

6.10. Tracciare i grafici qualitativi, corretti per quanto riguarda gli intervalli di monotonia e la localizzazione degli eventuali punti di massimo e minimo locale, delle funzioni reali seguenti:

$$x \mapsto x + \frac{1}{x},\ x > 0\,, \qquad x \mapsto xe^x,\ x \in \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x^{1/2}e^{-2x},\ x \ge 0$$
$$x \mapsto x^3 \ln^5 x,\ x > 0\,, \qquad x \mapsto x^x,\ x > 0\,, \qquad x \mapsto \frac{x}{x^4+1}\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

6.11. Tracciare i grafici qualitativi, corretti per quanto riguarda gli intervalli di monotonia e la localizzazione degli eventuali punti di massimo e minimo locale e dei punti a derivata nulla, nonché del comportamento negli eventuali punti di non differenziabilità, delle funzioni reali seguenti:

$$x \mapsto \sqrt{x} - \frac{1}{x+1},\ x \ge 0\,, \qquad x \mapsto |x| \tanh x,\ x \in \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto |x|^{1/2}e^{-|x|},\ x \in \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x\sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]\,, \qquad x \mapsto \frac{x}{\ln|x|}\,,\ 0 < |x| < 1\,, \qquad x \mapsto \frac{|x|}{x^2+1}\,,\ x \in \mathbb{R}.$$

6.12. Trovare: fra i rettangoli di perimetro assegnato quelli di area massima; fra i rettangoli di area assegnata quelli di perimetro minimo; fra i rombi di perimetro assegnato quelli di area massima; fra i rombi di area assegnata quelli di perimetro minimo.

6.13. Trovare le dimensioni della pentola cilindrica (senza coperchio) di capacità V assegnata la cui realizzazione utilizzi il minimo consumo di materiale scelto. Si supponga che il materiale sia omogeneo e che gli spessori laterale e di base siano dati da s e κs rispettivamente (è bene che la base, che sta sul fuoco, sia più solida; inoltre i manici costituiscono, nota la capacità V, un costo fisso, per cui è inutile considerarli). Determinare poi la situazione limite per $s \to 0$ e interpretarla.

Questo esercizio è piuttosto complesso: ne diamo la soluzione, ma invitiamo il lettore a cercare di procedere da solo e di guardare la soluzione pian piano, per prendere spunti, in caso di difficoltà.

Detto R il raggio interno, l'altezza interna è $h = V/(\pi R^2)$ e possiamo calcolare il volume $v_s(R)$ di materiale usato (la sua massa o il suo peso sarebbero semplicemente proporzionali al volume e i parametri che minimizzano avrebbero lo stesso valore). Abbiamo

$$v_s(R) = \pi(R+s)^2(h+\kappa s) - V = \pi(R+s)^2\Big(\frac{V}{\pi R^2} + \kappa s\Big) - V. \tag{1}$$

Si deve pertanto minimizzare la funzione $v_s : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ data dalla formula scritta. Si ha

$$v_s'(R) = 2\pi(R+s)\Big(\frac{V}{\pi R^2} + \kappa s\Big) + \pi(R+s)^2\Big(-\frac{2V}{\pi R^3}\Big) = \ldots = 2s\,\frac{R+s}{R^3}\,(\kappa\pi R^3 - V).$$

Siccome $(0,+\infty)$ è un intervallo aperto e v_s è differenziabile, se un punto di minimo c'è, esso deve risolvere l'equazione $v_s'(R) = 0$. Dunque

$$R = \Big(\frac{V}{\kappa\pi}\Big)^{1/3} \quad \text{e, di conseguenza,} \quad \frac{h}{R} = \frac{V}{\pi R^2}\,\frac{1}{R} = \frac{V}{\pi}\,R^3 = \frac{V}{\pi}\,\frac{\kappa\pi}{V} = \kappa, \quad \text{cioè} \quad h = \kappa R. \tag{2}$$

Il valore di R trovato, che chiamiamo R_0, effettivamente realizza il minimo, in quanto v_s è una funzione continua in R_0, decrescente in $(0,R_0)$ e crescente in $(R_0,+\infty)$ dato che $v_s'(R) < 0$ per $R < R_0$ e $v_s'(R) > 0$ per $R > R_0$. Essendo la coppia (R,h) trovata indipendente da s, essa risolve anche il problema limite. Quale sia tale problema, tuttavia, non è ovvio: infatti è inefficace prendere il limite $\lim_{s\to 0} v_s(R)$ dato che esso è nullo per ogni R. Si intuisce che è meglio rivedere il tutto dal punto di vista della densità superficiale di materiale usato: si divide il volume per uno dei due spessori e il più semplice è s. Calcoliamo dunque, per $R > 0$ fissato, il limite $\lim_{s\to 0} v_s(R)/s$.

Così facendo troveremo un limite non banale, ma conviene aprire una parentesi e osservare un fatto: ciò che qui andrà liscio funziona anche per una vasta classe di problemi ma non ha affatto validità generale, e spiego ciò conservando le notazioni sulle variabili. Supponiamo di avere una famiglia di funzioni $f_s : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ (dipendenti da un parametro $s > 0$ come sopra), ciascuna delle quali ha esattamente un punto di minimo R_s, e supponiamo che, per ogni $R > 0$ fissato, esista finito il limite $\lim_{s\to 0} f_s(R)$. Chiamato $f_*(R)$ tale limite, resta definita una funzione $f_* : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Supponiamo che anche f_* abbia esattamente un punto di minimo R_*. Ebbene in generale non è detto che R_s tenda a R_* né che $f_s(R_s)$ tenda a $f_*(R_*)$ per $s \to 0$.

Chiusa la parentesi, torniamo al caso in esame. Per semplificare il calcolo algebrico conviene porre $u_R(s) = v_s(R)$ e definire $u_R(0)$ accettando anche il valore $s = 0$ nella (1). Osservato allora che $u_R(0) = 0$, abbiamo

$$\lim_{s\to 0} \frac{v_s(R)}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{u_R(s)}{s} = u_R'(0) = 2\pi R\,\frac{V}{\pi R^2} + \pi R^2 \cdot \kappa = \frac{2V}{R} + \kappa\pi R^2.$$

Ciò che sembra plausibile battezzare problema limite è allora quello di minimizzare la funzione ottenuta, che chiamiamo a, cioè $a : R \mapsto (2V/R) + \kappa\pi R^2$, $R > 0$. Calcoliamone la derivata:

$$a'(R) = -\frac{2V}{R^2} + 2\kappa\pi R, \quad \text{per cui} \quad a'(R) = 0 \quad \text{per} \quad R = \Bigl(\frac{V}{\kappa\pi}\Bigr)^{1/3}.$$

Quindi si trova proprio il valore R dato dalla (2). Per vedere il significato di a conviene introdurre l'altezza h legata a V come è stato detto, cioè $\pi R^2 h = V$. Si ha $a(R) = 2\pi Rh + \kappa\pi R^2$. Dunque $a(R)$ è la somma dell'area laterale del cilindro interno della pentola e di κ volte la sua area di base. Vediamo allora che il problema limite ricorda il rapporto 1 a κ degli spessori.

6.14. Trovare la lunghezza massima di una sbarra di sezione trascurabile che "riesce a passare" in un corridoio infinito "a elle" di larghezze a e b.

Anche questo esercizio è complesso: ne diamo la soluzione e consigliamo al lettore di procedere seguendo le indicazioni date a proposito dell'Esercizio 6.13.

Descriviamo la geometria in un riferimento cartesiano. Denotiamo con C il corridoio e con V il "vertice interno" del corridoio, precisamente

$$C = \bigl([0,a] \times [0,+\infty)\bigr) \cup \bigl([0,+\infty) \times [0,b]\bigr) \quad \text{e} \quad V = (a,b).$$

Chiamiamo inoltre lati esterni del corridoio quelli coincidenti con i semiassi $x \ge 0 = y$ e $y \ge 0 = x$. Descriviamo infine la sbarra mediante un segmento mobile. Se S è una posizione ammessa della sbarra, si deve avere $S \subset C$. Consideriamo ora una posizione S ammessa della sbarra e sia R la retta che include S. Se R non passa per V, si vede che, pur di spostare di poco la sbarra ruotandola o traslandola, anche una sbarra di poco più lunga non avrebbe problemi. Ciò mostra che la lunghezza ℓ di una sbarra che riescie a passare deve realizzare la condizione seguente: $\ell \le \ell'$ ove ℓ' è la lunghezza di uno qualunque dei segmenti passanti per V e aventi gli estremi sui lati esterni del corridoio. Descriviamo il generico di tali segmenti mediante l'angolo $\vartheta \in (0, \pi/2)$ che esso forma con il lato interno orizzontale, descritto dalle condizioni $x \ge a$ e $y = b$, e denotiamo con $\lambda(\vartheta)$ la sua lunghezza. Allora una sbarra di lunghezza ℓ riesce a passare se e solo se

$$\ell \le \lambda(\vartheta) \quad \text{per ogni } \vartheta \in (0,\pi/2), \quad \text{cioè} \quad \ell \le \min_{\vartheta\in(0,\pi/2)} \lambda(\vartheta).$$

Concludiamo che la sbarra di lunghezza massima cercata è quella la cui lunghezza vale esattamente tale minimo (il problema di massimo iniziale è stato perciò trasformato in un problema di minimo). Cerchiamo pertanto un'espressione di $\lambda(\vartheta)$ per ogni $\vartheta \in (0, \pi/2)$. Calcolando, con semplici considerazioni geometriche relative a triangoli, le lunghezze delle due parti in cui il segmento associato a ϑ è diviso da V, otteniamo facilmente

$$\lambda(\vartheta) = \frac{a}{\cos\vartheta} + \frac{b}{\sin\vartheta}\,. \tag{1}$$

Dobbiamo pertanto considerare la funzione $\lambda : (0, \pi/2) \to \mathbb{R}$ definita dalla (1). Abbiamo

$$\lambda'(\vartheta) = \frac{a\sin\vartheta}{\cos^2\vartheta} - \frac{b\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} = \frac{a\sin^3\vartheta - b\cos^3\vartheta}{\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta} = \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\,(a\tan^3\vartheta - b)\,.$$

Siccome il segno di λ' si studia facilmente, si conclude che il minimo si ottiene dall'unico valore $\vartheta = \vartheta_0$ che annulla λ' e che la lunghezza massima cercata è il valore $\lambda(\vartheta_0)$ corrispondente:

$$\vartheta_0 = \arctan\bigl((b/a)^{1/3}\bigr) \quad \text{e} \quad \lambda(\vartheta_0) = \bigl(a^{2/3} + b^{2/3}\bigr)^{3/2}.$$

Per ottenere l'espressione finale di $\lambda(\vartheta_0)$ conviene prima esprimere seno e coseno per mezzo della tangente nella (1) e poi sostituire $\vartheta = \vartheta_0$. Notiamo che, nel caso $a = b$, si ha $\vartheta_0 = \pi/4$ e $\lambda(\vartheta_0) = 2^{3/2}a = 2a\sqrt{2}$, il che era chiaro senza calcoli.

6.15. L'esercizio che si sta proponendo riguarda le serie e parte della sua risoluzione usa il calcolo differenziale, in particolare il segno della derivata. Al variare di $a \in (0,+\infty)$ si discuta la convergenza, semplice o assoluta, della serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^7(\tanh(an^{-5}))^a$.

La convergenza assoluta equivale alla convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^7(\tanh(an^{-5}))^a$ e l'uso del Criterio del confronto asintotico ci consente di liberarci della tangente iperbolica: essendo infatti $\tanh x = x + o(x) = x(1+o(1))$ per $x \to 0$, risulta $\tanh(an^{-5}) = an^{-5}(1+o(1))$ per $n \to \infty$, da cui $(\tanh(an^{-5}))^a = n^{-5a}c_n$ ove $\{c_n\}$ è una certa successione che converge ad a^a, che è un limite finito e non nullo. Dunque la serie data converge assolutamente se e solo se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^7 n^{-5a} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{7-5a}$, e questa converge se e solo se $7-5a < -1$, cioè quando $a > 8/5$.

L'indagine sulla convergenza, necessariamente semplice, della serie data per altri valori di a è più delicata. Vediamo per quali a è infinitesima la successione $\{n^7(\tanh(an^{-5}))^a\}$ connessa con quella che genera la serie. Lo stesso calcolo fatto sopra porta a concludere che questa è una successione infinitesima se e solo se $7-5a < 0$, cioè quando $a > 7/5$. Dunque la serie data non converge se $a \le 7/5$ e il problema della convergenza rimane aperto per $7/5 < a \le 8/5$. Tentiamo la via del Criterio di Leibniz: cerchiamo allora per quali $a > 0$ la successione $\{n^7(\tanh(an^{-5}))^a\}$ è non crescente. In realtà è sufficiente che sia non crescente la successione $\{n^7(\tanh(an^{-5}))^a\}_{n\ge m}$ ove m è un numero naturale qualunque ≥ 1. Osservato che $n^7 = (n^{-5})^{-7/5}$, vediamo che gioca lo stesso ruolo la successione $\{(n^{-5})^{-7/(5a)}\tanh(an^{-5})\}_{n\ge m}$ in quanto la funzione $t \mapsto t^a$, $t > 0$, cresce. Ora, perché esista m che rende non crescente la successione in questione è sufficiente che esista $\delta > 0$ tale che la funzione $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $f(x) = x^{-7/(5a)}\tanh ax$ sia non decrescente nell'intervallo $(0,\delta)$. Infatti, se ciò avviene, risulta non crescente la successione $\{f(n^{-5})\}_{n\ge m}$ se m è scelto in modo che $m^{-5} < \delta$, cioè la successione che stiamo considerando. Siamo dunque ricondotti a cercare $\delta > 0$ tale che $f'(x) > 0$ per $x \in (0,\delta)$. Per $x > 0$ si ha

$$f'(x) = -\frac{7}{5a}\,x^{-\frac{7}{5a}-1}\tanh ax + x^{-\frac{7}{5a}}\,\frac{a}{\cosh^2 ax} = x^{-\frac{7}{5a}}\Bigl(-\frac{7}{5a}\,\frac{\tanh ax}{x} + \frac{a}{\cosh^2 ax}\Bigr)$$

e perché risulti $f'(x) > 0$ è necessario e sufficiente che sia > 0 la quantità entro parentesi tonde. Perché ciò avvenga per tutti gli x di un certo intervallo $(0,\delta)$ è sufficiente che sia > 0 il limite per $x \to 0^+$. Eseguiamo dunque il calcolo del limite. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+}\Bigl(-\frac{7}{5a}\,\frac{\tanh ax}{x} + \frac{a}{\cosh^2 ax}\Bigr) = \lim_{x\to 0^+}\Bigl(-\frac{7}{5a}\,\frac{ax(1+o(1))}{x} + \frac{a}{\cosh^2 ax}\Bigr) = -\frac{7}{5} + a$$

e tale limite è > 0 se e solo se $a > 7/5$. Concludendo, se $a > 7/5$ il limite è positivo, per cui esiste $\delta > 0$ nelle condizioni desiderate e, di conseguenza, esiste m che rende monotona la successione che dovevamo studiare. Ma per questi stessi valori di a la successione in questione è anche infinitesima, come abbiamo visto, per cui è effettivamente applicabile il Criterio di Leibniz e la serie in esame risulta convergente. Ricapitolando, se $0 < a \le 7/5$ la serie data non converge; se $7/5 < a \le 8/5$ essa converge semplicemente; se $a > 8/5$ essa converge assolutamente.

7. Derivate parziali e direzionali e funzioni composte

7.1. Calcolare le derivate parziali nel punto generico delle funzioni seguenti

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad f(x,y)=\frac{xy^2}{1+x^2y^4}\,,\qquad\qquad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\qquad f(x,y)=\bigl(\cos(x^2y),e^{-x},y^2\bigr)$$
$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\qquad f(x,y,z)=\sin^2(x^4y^3z)\,,\qquad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\quad f(x,y,z)=\left(\sin(x^2z),\frac{yz^2}{1+x^2}\right).$$

Costruire la jacobiana nel punto generico di ciascuna delle funzioni considerate.

7.2. Riprendere le funzioni dell'Esercizio 7.1 e calcolare le derivate nelle direzioni e nei punti indicati di seguito: nei primi due casi la direzione è il versore del vettore $(1,-1)$ e il punto è $(2,1)$; negli altri due casi la direzione è il versore del vettore $(1,0,1)$ e il punto è $(1,2,1)$.

7.3. Esprimere tramite le derivate della funzione f, della quale sono dati solo dominio, codominio e l'ipotesi di differenziabilità e non l'espressione esplicita, le derivate ordinarie oppure parziali delle funzioni reali o vettoriali definite dalle condizioni seguenti:

$$\begin{array}{lll}
t\mapsto f(2t,\cos t,\sinh t^2)\,,\quad t\in\mathbb{R}, & & \text{ove}\quad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\\
t\mapsto f(\cosh t^2,t^4)\,,\quad t\in\mathbb{R}, & & \text{ove}\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\\
(x,y)\mapsto f(2xy,\cos(x^2y),\sinh y^2)\,,\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2, & & \text{ove}\quad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}\\
(x,y,z)\mapsto f(xyz^2,\arctan(xy^2z))\,,\quad t\in\mathbb{R}, & & \text{ove}\quad f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4.
\end{array}$$

7.4. Di una funzione differenziabile $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sono note le derivate direzionali

$$D_r(0,0)=5\quad\text{e}\quad D_{r'}(0,0)=-3$$

ove r e r' sono i versori dei vettori $(1,1)$ e $(-1,2)$ rispettivamente. Quanto vale la derivata di f in $(0,0)$ nella direzione del vettore $(1,2)$? Organizzare una procedura di calcolo (eventualmente senza portarla a termine).

7.5. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data dalle formule

$$f(x)=|x|^2\sin\frac{1}{|x|}\quad\text{se }x\neq(0,0)\quad\text{e}\quad f(0,0)=0.$$

Dimostrare che f è differenziabile ma non di classe C^1. Cercare di "capire" il grafico di f.

7.6. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ data dalle formule

$$\begin{array}{ll}
f(x,y)=x^2y & \text{se}\quad y\le 0\\
f(x,y)=\sin(x^2y) & \text{se}\quad y>0.
\end{array}$$

Dimostrare che f è differenziabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. Cercare la via più veloce.

7.7. Sia $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ data dalle formule

$$\begin{array}{ll}
f(x,y)=\Bigl(1,\sin(xy),e^{y-x^2}\Bigr) & \text{se}\quad x>0\quad\text{e}\quad y>0\\
f(x,y)=(\cos(xy),0,e^y) & \text{altrimenti.}
\end{array}$$

Discutere la differenziabilità di f e delle sue componenti in ogni punto di $\mathbb{R}^2$.

7.8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data dalle formule

$$f(x,y) = 0 \quad \text{se } y \neq x^2 \quad \text{e} \quad f(x,y) = x \quad \text{se } y = x^2 .$$

Discutere continuità, differenziabilità ed esistenza delle derivate direzionali di f nell'origine.

7.9. Quali difficoltà concettuali si incontrerebbero nel definire le derivate direzionali, direttamente come limiti di rapporti incrementali, di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ ove $A = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \leq 1\}$? E se il dominio A fosse dato dalla formula $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ x^2 \leq y \leq 2x^2\}$?

7.10. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica. Mostrare che la formula

$$f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \rho\varphi(\vartheta) \quad \text{per } \rho \geq 0 \text{ e } \vartheta \in \mathbb{R}$$

definisce correttamente una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dimostrare che f possiede la derivate nell'origine di $\mathbb{R}^2$ nella direzione $r = (\cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0)$ se e solo se $\varphi(\vartheta_0+\pi) = -\varphi(\vartheta_0)$. Suggerimento: nel calcolo del limite del rapporto incrementale distinguere i limiti destro e sinistro.

7.11. Esercizio più difficile: *a*) caratterizzare le funzioni f costruite nell'Esercizio 7.10 che risultano differenziabili nell'origine; *b*) costruire φ tale che la corrispondente f possegga tutte le derivate direzionali in $(0,0)$ e, ciò nonostante, non sia limitata in alcun intorno dell'origine.

7.12. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biiettiva e differenziabile con l'inversa $g = f^{-1}$. Sapendo che $f(2) = 3$ e che $f'(2) = 4$ calcolare $g'(3)$.

7.13. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data dalla formula $f(x) = x + x^3$. Si assuma senza dimostrarlo che f è biiettiva con inversa differenziabile (ma si tracci il grafico qualitativo di f per convincersi che l'affermazione è vera). Detta g l'inversa di f, si calcolino $g'(2)$ e $g'(10)$.

7.14. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ biiettiva e differenziabile con l'inversa $g = f^{-1}$. Sapendo che

$$f(2,1) = (-1,3), \quad D_1 f(2,1) = (5,4) \quad \text{e} \quad D_2 f(2,1) = (-6,7)$$

calcolare $D_2\, g(-1,3)$. Eventualmente organizzare il calcolo senza portarlo a termine.

7.15. Una funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ verifica $3u^2(x,y) - 2x^2 y\, u(x,y) = x^4 y^2$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $u(1,1) = 1$ ed è differenziabile. Calcolare la derivata $D_r u(1,1)$ nella direzione del vettore $(-1,1)$.

8. Vettori tangenti e normali

8.1. Trovare i coni tangenti in $(0,0)$ ai grafici delle funzioni (non differenziabili)

$$\begin{aligned} &x \mapsto |x| + x^2\,, && x \in \mathbb{R} \\ &x \mapsto x + \sqrt{x}\,, && x \geq 0 \\ &x \mapsto x^2 + \sqrt[3]{x} && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bastano risposte intuitive. Trovare di conseguenza gli spazi normali.

8.2. Trovare il cono tangente e lo spazio normale in $(0,0)$ al grafico della funzione

$$x \mapsto x \sin \frac{1}{x}\,, \quad x > 0.$$

Risposta: i vettori tangenti sono i vettori $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ verificanti $|v_2| \leq v_1$ e l'unico vettore normale è nullo.

8.3. Trovare il cono tangente e lo spazio normale in $(0,0)$ al grafico della funzione

$$x \mapsto x^{1/2} \sin \frac{1}{x}\,, \quad x > 0.$$

Risposta: i vettori tangenti sono i $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ verificanti $v_1 \geq 0$ e l'unico vettore normale è nullo.

8.4. Mostrare applicando la definizione che il vettore $(2,0)$ è tangente in $(0,0)$ all'insieme

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 = x^3\}.$$

Disegnare poi S e trovare l'intero cono tangente e lo spazio normale.

8.5. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabili e tali che $f(1) = g(1) = 2$. Determinare il cono tangente in $(1,2)$ all'unione dei due grafici di f e di g. Descrivere anche lo spazio normale (per il quale occorrerà distinguere due casi).

8.6. Data la curva parametrica (parabola cubica gobba) di equazioni

$$x = t\,, \quad y = t^2\,, \quad z = t^3$$

e fissato $t_0 \in \mathbb{R}$ si chiede il significato delle parametrizzazioni seguenti:

$$\begin{aligned} &x = t_0 + h\,, && y = t_0^2 + 2t_0 h + h^2\,, && z = t_0^3 + 3t_0^2 h + 3t_0 h^2 + h^3 \\ &x = t_0 + h\,, && y = t_0^2 + 2t_0 h\,, && z = t_0^3 + 3t_0^2 h\,. \end{aligned}$$

Soluzione: la prima è semplicemente una riparametrizzazione della curva (si è scritto $t = t_0 + h$ in quella data); la seconda è la tangente in (t_0, t_0^2, t_0^3) espressa in forma parametrica. Infatti, detta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la parametrizzazione data, cioè $f(t) = (t, t^2, t^3)$, si è scritto dapprima $f(t_0 + h) = f(t_0) + vh + hq(h)$ con un certo $v \in \mathbb{R}^3$ e una certa funzione q infinitesima (per $h \to 0$), da cui si legge $v = f'(t_0) = (1, 2t_0, 3t_0^2)$. Dunque l'ultima parametrizzazione fornisce la retta per $f(t_0)$ che ha la direzione dei vettori tangenti. Questo grazie al risultato generale, che è effettivamente applicabile in quanto f è (banalmente) iniettiva, ha differenziale iniettivo (dato che $f'(t_0) \neq (0,0,0)$) e inversa continua (data dalla restrizione alla curva dell'applicazione $(x,y,z) \mapsto x$).

8.7. Scrivere l'equazione del piano normale alla parabola cubica gobba nel suo punto generico, cioè il piano passante per il punto considerato parallelo a tutti i vettori normali.

Soluzione. Mantenute le notazioni dell'Esercizio 8.6 e fissato t_0, il vettore $f'(t_0)$ genera lo spazio tangente, per cui lo il piano normale ha equazione

$$f'(t_0) \cdot \bigl((x,y,z) - f(t_0)\bigr) = 0 \quad \text{cioè} \quad x - t_0 + 2t_0(y - t_0^2) + 3t_0^2(z - t_0^3) = 0.$$

8.8. Fissato $R > 0$ si consideri la superficie parametrica

$$f : (\vartheta, \varphi) \mapsto (x,y,z) \quad \text{ove} \quad x = R\cos\vartheta\cos\varphi\,, \quad y = R\sin\vartheta\cos\varphi\,, \quad z = R\sin\varphi$$

intendendo che (ϑ, φ) possa variare, almeno per ora, in tutto $\mathbb{R}^2$. Interpretare le due derivate parziali f_ϑ e f_φ nel punto generico (ϑ, φ) e mostrare che esse sono ortogonali.

Soluzione. Per i risultati generali le derivate da considerare sono vettori tangenti alla superficie (immagine di f) nel punto $f(\vartheta, \varphi)$. Esse sono date dalle formule

$$f_\vartheta(\vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} -R\sin\vartheta\cos\varphi \\ R\cos\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f_\varphi(\vartheta, \varphi) = \begin{bmatrix} -R\cos\vartheta\sin\varphi \\ -R\sin\vartheta\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{bmatrix}$$

ed è immediato controllare che $f_\vartheta \cdot f_\varphi = 0$. La superficie parametrizzata è la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio R e i significati dei parametri ϑ e φ sono quelli di longitudine e latitudine del punto (x,y,z) corrispondente (se lasciassimo variare anche R otterremmo le coordinate sferiche nello spazio: con R fissato abbiamo le coordinate sferiche sulla sfera). Per quanto riguarda un significato più preciso delle derivate appena calcolate, osserviamo che f_ϑ è la derivata della funzione $\vartheta \mapsto f(\vartheta, \varphi)$ la quale, a φ fissato, descrive un "parallelo" della sfera, per cui f_ϑ è tangente a tale parallelo; analogamente, per ϑ fissato, al variare di φ si ottiene un "meridiano" (meglio: un meridiano e il suo opposto se non si impongono limitazioni a φ) e f_φ è tangente a tale meridiano. Allora è chiara l'ortogonalità dei due vettori. Se lasciamo variare (ϑ, φ) in tutto $\mathbb{R}^2$ non otteniamo una funzione iniettiva. Resta invece iniettiva la restrizione ottenuta imponendo le condizioni $\vartheta \in [0, 2\pi)$ e $|\varphi| < \pi/2$. In tal caso si parametrizza la sfera privata dei poli. I poli sono punti singolari della parametrizzazione: si ha infatti $f_\varphi(\vartheta, \pm\pi/2) = (0,0,0)$ per ogni ϑ. Se si escludono i poli appunto le derivate generano lo spazio (bidimensionale) tangente.

8.9. Esprimere in forma cartesiana il piano tangente alla sfera dell'Esercizio 8.8 in un punto qualunque del suo emisfero superiore ("equatore" escluso).

Soluzione. L'equazione cartesiana della sfera è $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ e l'emisfero in questione è il grafico della funzione $g : D \to \mathbb{R}$ data dalle formule

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < R^2\} \quad \text{e} \quad g(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Dunque il piano tangente nel generico punto (x_0, y_0, z_0) dell'emisfero (per cui $z_0 = g(x_0, y_0)$) è

$$z = g(x_0, y_0) + dg_{(x_0, y_0)}\bigl((x,y) - (x_0, y_0)\bigr)$$

cioè quanto si ottiene scrivendo $z = g(x,y)$, esprimendo $g(x,y)$ con il suo sviluppo del prim'ordine intorno a (x_0, y_0) e trascurando poi il resto, vale a dire

$$z = g(x_0, y_0) + D_x g(x_0, y_0)\,(x - x_0) + D_y g(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

e un semplice calcolo porta all'espressione definitiva

$$z = r_0 - \frac{x - x_0}{r_0} - \frac{y - y_0}{r_0} \quad \text{ove} \quad r_0 = \sqrt{R^2 - x_0^2 - y_0^2}\,.$$

8.10. Considerare la parabola $\mathcal{P}$ del piano $y = x^2$ sia nella forma cartesiana scritta sia nella forma parametrica $x = t$ e $y = t^2$. Descrivere la retta tangente nel punto generico di $\mathcal{P}$ sia in forma cartesiana sia in forma parametrica e confrontare i risultati ottenuti. Idem per la retta normale.

9. Integrali e misure

9.1. Per ogni intervallo limitato $E \subset \mathbb{R}$ si ponga $m(E) = \int_E (4-x^2)^+ \, dx + 3\,\#(E \cap \mathbb{N})$, ove $\#$ significa "numero dei punti di". Calcolare l'integrale $I = \int_{\mathbb{R}} f \, dm$ ove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è data da

$$f(x) = 3 \quad \text{se } x \in [-6,0], \quad f(x) = -4 \quad \text{se } x \in [2,3], \quad f(x) = 0 \quad \text{altrimenti.}$$

Soluzione. Risulta $I = 3\,m[-6,0] - 4\,m[2,3]$. Calcoliamo le due misure.

$$\begin{aligned} m[-6,0] &= \int_{[-6,0]} (4-x^2)^+ \, dx + 3\,\#([-6,0] \cap \mathbb{N}) = \int_{[-2,0]} (4-x^2) \, dx + 3 \cdot 1 \\ &= 4 \cdot 2 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=-2}^{x=0} + 3 = 8 - \frac{8}{3} + 3 = 11 - \frac{8}{3} \\ m[1,2] &= \int_{[2,3]} (4-x^2)^+ \, dx + 3\,\#(\{2,3\}) = \int_{[2,3]} 0 \, dx + 3 \cdot 2 = 6. \end{aligned}$$

Dunque $I = 33 - 8 - 24 = 1$.

9.2. Calcolare l'integrale dell'Esercizio 9.1 con la seguente diversa definizione di m:

$$m(E) = \int_{E \cap (-3/2,2)} \bigl(\ln(x+2) \bigr)^+ \, dx.$$

9.3. Per ogni intervallo limitato $E \subset \mathbb{R}$ si ponga $m(E) = \int_E (\sin x)^+ \, dx$. Calcolare $\int_{\mathbb{R}} f \, dm$ ove f è la funzione caratteristica dell'intervallo $[0,\alpha]$, $\alpha > 0$. Chi si sente in difficoltà prenda prima $\alpha \in [0,\pi]$, poi $\alpha \in [\pi, 2\pi]$, poi $\alpha \in [2\pi, 3\pi]$, eccetera.

9.4. Non per tutti. Dimostrare che il limite $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \exp(-y^2) \, dy$ esiste finito. Suggerimento: vedere monotonia e limitatezza; per la limitatezza usare il Teorema del confronto con una funzione integrale che si sappia effettivamente calcolare.

9.5. Disegnare il grafico della funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $F(x) = \int_0^x \chi(y) \, dy$ ove χ è la funzione caratteristica di $(0,1)$. Successivamente calcolare il valore $F(x)$ per ogni x.

9.6. Calcolare per ogni $x \in \mathbb{R}$ l'integrale $F(x) = \int_0^x (1 - |y|)^+ \, dy$. Disegnare il grafico di F.

9.7. Disegnare il grafico della funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $F(x) = \int_0^x f(y) \, dy$ ove $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è data dalle formule

$$f(x) = x^2 - 1 \quad \text{se } |x| < 2 \quad \text{e} \quad f(x) = x - 5 \operatorname{sign} x \quad \text{altrimenti.}$$

9.8. Posto $f(x) = \int_{2x}^{x^2} \exp(-y^2) \, dy$ per $x \in \mathbb{R}$, calcolare f' in ogni punto. Suggerimento: si introduca la funzione integrale $G(x) = \int_c^x \exp(-y^2) \, dy$, $x \in \mathbb{R}$, con c a scelta.

9.9. Posto $f(x) = \int_{\sin x}^{\cos^2 x} \ln(1+y^2) \, dy$ per $x \in \mathbb{R}$, calcolare f' in ogni punto.

9.10. Trovare il valore minimo della funzione data da $f(x) = \int_2^x \min\{e^y - 1, e - 1\} \, dy$, $x \in \mathbb{R}$.

9.11. Tracciare il grafico della funzione $x \mapsto x - 2\int_0^x e^{-y^2} \, dy$, $x \in \mathbb{R}$.

9.12. Calcolare le aree dei sottoinsiemi costituiti dai punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ verificanti rispettivamente le condizioni: $x \in [1,2]$ e $-x \le y \le (\ln x)/x$; $x^2 \le y \le 5x - 6$; $x \in [1,2]$ e $e^{-x^2} \le y/x \le 1 + (1/x^2)$.

10. Tecniche di integrazione in una variabile

10.1. Usando qualche semplice formula di trigonometria calcolare gli integrali

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^5 2x\,dx, \quad \int_0^{\pi/4} \sin^2 2x \cos^3 2x\,dx, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^3 x\,dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx, \quad \int_0^{\pi/3} \sin^4 3x\,dx, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^2 x\,dx, \quad \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^4 x\,dx.$$

10.2. Integrando per parti calcolare gli integrali

$$\int_0^1 (3x^2 - 2x + 5)e^{-4x}\,dx, \quad \int_0^1 x^2 \cosh 2x\,dx, \quad \int_0^1 (x-1)\sin 3x\,dx$$

$$\int_1^2 (x^3 - 4x)\ln x\,dx, \quad \int_1^2 (x-1)\ln^3 x\,dx, \quad \int_0^1 (3x^2+1)\arctan x\,dx.$$

10.3. Risolvere le equazioni differenziali di incognita $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1

$$u'(x) = xe^x\,, \quad u'(x) = e^x \sin x\,, \quad u'(x) = \arctan x.$$

Soluzione delle prime due equazioni. Una soluzione della prima è data dalla formula (che, precisamente, fornisce la soluzione nulla nell'origine)

$$u(x) = \int_0^x ye^y\,dy = \big[ye^y\big]_{y=0}^{y=x} - \int_0^x e^y\,dy = \big[ye^y - e^y\big]_{y=0}^{y=x} = (x-1)e^x + \ldots$$

dove i puntini stanno per il valore in $y = 0$ di $(y-1)e^y$, che è perfettamente inutile calcolare. Sostituendo questo, con una qualunque altra costante, infatti, si ottiene comunque una soluzione (non più nulla in 0). Tutte le soluzioni, poi, si ottengono da una di esse aggiungendo una costante arbitraria. La formula risolutiva è pertanto $u(x) = (x-1)e^x + c$, ove $c \in \mathbb{R}$ è arbitrario.

Risolvere la seconda è meno banale e diamo due possibili vie. In ogni caso, anche, qui, basta trovare una soluzione: tutte le altre si ottengono aggiungendo una costante arbitraria. Prima via. Poniamo $u(x) = \int_0^x e^y \sin y\,dy$ (il che fornisce una soluzione) e calcoliamo il valore $u(x)$ cercando un'equazione algebrica che ha $u(x)$ come soluzione; per far ciò integriamo per parti due volte.

$$\begin{aligned}
u(x) &= \big[e^y \sin y\big]_{y=0}^{y=x} - \int_0^x e^y \cos y\,dy \\
&= \big[e^y \sin y\big]_{y=0}^{y=x} - \left(\big[e^y \cos y\big]_{y=0}^{y=x} - \int_0^x e^y(-\sin y)\,dy \right) \\
&= \big[e^y \sin y - e^y \cos y\big]_{y=0}^{y=x} - u(x) \quad \text{da cui} \\
2u(x) &= \big[e^y \sin y - e^y \cos y\big]_{y=0}^{y=x} \quad \text{e quindi} \quad u(x) = \frac{1}{2}\big[e^y \sin y - e^y \cos y\big]_{y=0}^{y=x}.
\end{aligned}$$

Pertanto tutte le soluzioni sono date dalla formula $u(x) = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c$ ove $c \in \mathbb{R}$ è una costante arbitraria. La seconda via consiste nel calcolare la stessa funzione integrale passando all'ambito dei valori complessi e osservando che anche per funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ di classe C^1 continua a valere il Teorema fondamentale del calcolo e che $\frac{d}{dx}\exp(\lambda x) = \lambda \exp(\lambda x)$ anche con λ complesso:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_0^x e^y \sin y\,dy = \int_0^x e^y\,\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}\,dy = \frac{1}{2i}\int_0^x e^{(1+i)y}\,dy - \frac{1}{2i}\int_0^x e^{(1-i)y}\,dy \\
&= \frac{1}{2i(1+i)}\big[e^{(1+i)y}\big]_{y=0}^{y=x} - \frac{1}{2i(1-i)}\big[e^{(1-i)y}\big]_{y=0}^{y=x} = \ldots
\end{aligned}$$

dove i puntini stanno per un calcolo laborioso ma privo di difficoltà. In realtà, siccome il valore $u(x)$ deve essere reale, è sufficiente badare alla parte reale di ciò che si sta calcolando: tutti i contributi alla parte immaginaria, in modo solo apparentemente miracoloso, si elideranno a vicenda.

10.4. Integrando per sostituzione ridurre gli integrali dati a integrali elementari

$$\int_0^1 x^2 \exp(-5x^3)\,dx\,, \quad \int_0^1 \frac{x}{4x^2+1}\,dx\,, \quad \int_0^1 \frac{x}{9x^4+1}\,dx.$$

Attenzione a scrivere correttamente i nuovi estremi di integrazione.

10.5. Con opportune sostituzioni ridurre a integrali calcolabili per parti gli integrali seguenti

$$\int_0^1 x^5 \exp(-x^3)\,dx\,, \quad \int_0^1 x(4x^2+1)\sin(4x^2+1)\,dx\,, \quad \int_{\pi^3}^{8\pi^3} x^{-1/3}\sin(x^{1/3})\,dx.$$

10.6. Con opportune sostituzioni ridurre a integrali di funzioni razionali gli integrali seguenti

$$\begin{array}{lllll}
\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}\,, & \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx\,, & \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\sin^4 x+1}\,dx\,, & \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sinh x}\,, & \displaystyle\int_0^2 \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+1}\,dx \\
\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}\,, & \displaystyle\int_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx\,, & \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,, & \displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx\,, & \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} \\
\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}\,, & \displaystyle\int_0^1 \frac{x+x^2}{\sqrt{4+x}}\,dx\,, & \displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^{1/2}+x^{1/3}}\,dx\,, & \displaystyle\int_1^4 \frac{x^{1/4}-2}{x^{1/8}+1}\,dx\,, & \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{\pi-1}}{x^\pi+1}\,dx\,.
\end{array}$$

10.7. Ridurre a integrali elementari gli integrali seguenti

$$\begin{array}{llll}
\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx\,, & \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4+x^2+1}{x^2+1}\,dx\,, & \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2-5x+6}\,, & \displaystyle\int_4^5 \frac{dx}{x^3-5x^2+6x} \\
\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^4-x^3}\,, & \displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2-5x+6)^2}\,, & \displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+x+1}\,, & \displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x^4+x^3+x^2}\,.
\end{array}$$

10.8. Calcolare gli integrali

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}\,, \quad \int_0^1 \frac{x+1}{(x^2+1)^2}\,dx\,, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+4)^2}\,, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^3}\,.$$

10.9. Trovare l'espressione analitica delle soluzioni positive e non costanti della logistica

$$u'(t) = u(t) - u^2(t) \qquad \text{per } t \ge 0 \tag{1}$$

dimostrando preliminarmente che, per le soluzioni in questione, la (1) può essere riscritta nella forma

$$t = \int_0^t \frac{u'(s)}{u(s)-u^2(s)}\,ds \qquad \text{per } t \ge 0\,. \tag{2}$$

L'equazione generale, che ha interesse nella dinamica delle popolazioni, sarebbe $u' = au - bu^2$, con $a, b > 0$ generici. La scelta $a = b = 1$ fatta in (1) non cambia nulla nella sostanza, ma minimizza i calcoli. In tal caso le soluzioni costanti assumono i valori 0 e 1 e tutte le soluzioni u positive verificano $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 1$. Inoltre, posto $u_0 = u(0)$, avviene che: *i)* se $u_0 \in (0,1)$, allora $u(t) \in (0,1)$ per ogni $t \ge 0$; *ii)* se $u_0 > 1$, allora $u(t) > 1$ per ogni $t \ge 0$. In particolare, in ciascuno dei due casi, il secondo membro della (1) non si annulla, per cui l'equazione (1) stessa può essere messa nella forma equivalente

$$1 = \frac{u'(t)}{u(t) - u^2(t)} \qquad \text{per } t \geq 0 . \tag{3}$$

Scritto ciò nel generico istante $s \geq 0$ e poi integrati i due membri rispetto ad s sull'intervallo $[0,t]$ ove $t \geq 0$ è arbitrario, otteniamo la (2). Viceversa, derivando l'uguaglianza (2) si riottiene la (3). Dunque l'equazione di partenza (1) è equivalente, bene inteso nelle ipotesi *i)* o *ii)*, all'uguaglianza (2), della quale occorre calcolare il secondo membro. Usiamo prima la sostituzione $y = u(t)$ e poi la tecnica di integrazione delle funzioni razionali. Per ogni $t \geq 0$ abbiamo

$$\int_0^t \frac{u'(s)}{u(s) - u^2(s)}\, ds = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{dy}{y - y^2} = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dy}{y - y^2} = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{dy}{y(1-y)} = \int_{u_0}^{u(t)} \Bigl(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y} \Bigr)\, dy$$

e ora distinguiamo i due casi *i)* e *ii)*. Supponiamo $u_0 \in (0,1)$. Allora $u(t) \in (0,1)$ e tutti i valori della variabile y di integrazione appartengono a $(0,1)$. Se invece $u_0 > 1$, abbiamo $u(t) > 1$ e $y > 1$ per tutti gli y che intevengono. L'integrale vale pertanto

$$\Bigl[\ln y - \ln(1-y) \Bigr]_{y=u_0}^{y=u(t)} \quad \text{e} \quad \Bigl[\ln y - \ln(y-1) \Bigr]_{y=u_0}^{y=u(t)} \quad \text{rispettivamente nei due casi}$$

e, per la (2), tale integrale deve essere uguale a t. Ora proseguiamo nel caso *i)*. Otteniamo

$$t = \Bigl[\ln y - \ln(1-y) \Bigr]_{y=u_0}^{y=u(t)} = \ln u(t) - \ln\bigl(1 - u(t)\bigr) - \ln u_0 + \ln(1-u_0) = \ln \frac{(1-u_0)u(t)}{u_0\bigl(1-u(t)\bigr)}$$

e possiamo ricavare $u(t)$ dall'uguaglianza ottenuta confrontando il primo e l'ultimo membro. Posto per comodità $v_0 = u_0/(1-u_0)$ abbiamo

$$t = \ln \frac{u(t)}{v_0\bigl(1-u(t)\bigr)} \quad \text{cioè} \quad \frac{u(t)}{v_0\bigl(1-u(t)\bigr)} = e^t \quad \text{cioè} \quad \frac{u(t)}{1-u(t)} = v_0 e^t \quad \text{cioè} \quad u(t) = \frac{v_0 e^t}{1 + v_0 e^t} .$$

Il caso *ii)* è perfettamente analogo: procedendo nello stesso modo si ottiene

$$u(t) = \frac{w_0 e^t}{w_0 e^t - 1} \quad \text{ove} \quad w_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} .$$

Notiamo che, con semplici calcoli algebrici, i due casi si riuniscono nella formula

$$u(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-u_0}{u_0}\, e^{-t}} \qquad \text{per } t \geq 0 \tag{4}$$

e che la stessa formula fornisce correttamente $u(t) = 1$ nel caso, non considerato ma ugualmente significativo per la (1), $u_0 = 1$. Al contrario, nel caso $u_0 = 0$, si ha $u(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$ mentre la formula (4) è insensata. Infine, anche se la cosa non ha alcuna interpretazione nella dinamica delle popolazioni, se si volesserero calcolare le soluzioni negative della (1), si porrebbe un problema: non è noto a priori per quali $t > 0$ il valore $u(t)$ effettivamente esiste. Tuttavia la stessa procedura, adottata nell'insieme incognito dei valori di t ammessi, condurrebbe ancora alla formula (4), ma con una restrizione sui valori di t. Infatti, osservato che $(u_0 - 1)/u_0 > 1$ in quanto $u_0 < 0$, il numero $t_* = \ln\bigl((u_0 - 1)/u_0\bigr)$ è ben definito e verifica $t_* > 0$. Ebbene la restrizione in questione è data da $t < t_*$. Si noti che $u(t_*^-) = -\infty$, per cui nessuna soluzione negativa dell'equazione (1) riesce ad essere definita in tutto l'intervallo $[0, +\infty)$.

10.10. Imitando il procedimento usato nell'Esercizio 10.9, trovare l'espressione analitica delle soluzioni positive e non costanti dell'equazione differenziale

$$u'(t) = u(t) - \bigl(u(t)\bigr)^{3/2} \qquad \text{per } t \geq 0 .$$

Si assuma senza dimostrarlo che, ancora, valgono le affermazioni *i)* e *ii)* dell'esercizio citato.

11. Continuità globale, continuità uniforme, lipschitzianità

11.1. Ogni polinomio a coefficienti reali di grado pari in una indeterminata definisce una funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dotata o di minimo assoluto o di massimo assoluto.

11.2. Ogni equazione algebrica a coefficienti reali di grado dispari in una indeterminata ha almeno una soluzione reale. Dimostrare questa affermazione senza usare il Teorema fondamentale dell'algebra: dedurla sia dall'Esercizio 11.1 sia dal Teorema di Bolzano.

11.3. Sia Γ una curva del piano $\mathbb{R}^2$. Si discuta l'affermazione seguente: per ogni $p_0 \in \mathbb{R}^2$, esiste almeno un punto $x_0 \in \Gamma$ tale che $|x_0 - p_0| \le |x - p_0|$ per ogni $x \in \Gamma$. Si trattino in dettaglio i casi in cui Γ è: una circonferenza; una parabola (con asse non necessariamente parallelo all'asse delle ordinate); il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua.

11.4. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ differenziabile e tale che: $f(0) = f(1) = 0$, $f(x) > 0$ per ogni $x \in (0,1)$, l'equazione $f'(x) = 0$ ha in $(0,1)$ una e una sola soluzione x_0. Si dimostri che x_0 è punto di massimo assoluto per f. Se invece l'equazione $f'(x) = 0$ ha in $(0,1)$ esattamente due soluzioni x_1 e x_2, che avviene di tali punti?

11.5. Siano $C \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso per archi, cioè tale che per ogni coppia di punti $x, y \in C$ esista una funzione $\varphi : [0,1] \to C$ continua tale che $\varphi(0) = x$ e $\varphi(1) = y$, e $f : C \to \mathbb{R}$ un funzione continua. Dimostrare che $f(C)$ è un intervallo. Suggerimento: se così non fosse esisterebbero $x, y \in C$ tali che... e dunque una funzione $\varphi : [0,1] \to C \ldots$ e considerando $f \circ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \ldots$

11.6. Dedurre dall'Esercizio 11.5 il seguente Teorema della media: siano $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio di misura fine, C un sottoinsieme di A misurabile, chiuso, limitato e connesso per archi e $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $c \in B$ tale che $⨍_C f\,dm = f(c)$.

11.7. Controllare che le ipotesi fatte sullo spazio e su C nell'Esercizio 11.6 sono soddisfatte in ciascuno dei casi seguenti: i) lo spazio è lo spazio eulideo con la misura ordinaria e C è una palla chiusa; ii) lo spazio e C sono una circonferenza oppure un cilindro oppure una sfera, ciascuno con l'ordinaria misura mono o bidimensionale.

11.8. Controllare che le ipotesi fatte sullo spazio e su C nell'Esercizio 11.6 sono soddisfatte anche nel caso seguente, ove $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ è una funzione continua fissata: $A = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}$ è la famiglia dei rettangoli; la misura del generico $E \in \mathcal{E}$ è definita dalla formula $m(E) = \int_E \rho(x)\,dx$; C è un elemento di $\mathcal{E}$ chiuso. In tal caso si dimostra (ma ciò è decisamente più difficile) che vale la formula $\int_C f(x)\,dm = \int_C f(x)\rho(x)\,dx$ se $f : C \to \mathbb{R}$ è continua. Tenendo conto di ciò, verificare che la formula finale dell'Esercizio 11.6 diventa $\int_C f(x)\rho(x)\,dx = f(c) \int_C \rho(x)\,dx$.

11.9. Dedurre dal Teorema della media o dall'Esercizio 11.8 che, per ogni funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, esistono punti $c_i \in [0,1]$ tali che, posto per brevità $\kappa = 1 - e^{-1}$, valgano le formule

$$\int_0^1 x f(x)\,dx = c_1 f(c_1), \qquad \int_0^1 e^x f(x)\,dx = e^{c_2} f(c_2), \qquad \int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{1}{2}\, f(c_3)$$
$$\int_0^1 e^{-x} f(x)\,dx = \kappa f(c_4), \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \kappa e^{c_5} f(c_5), \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{3}{2}\,\frac{f(c_6)}{c_6 + 1}\,.$$

11.10. In ogni istante e su ogni meridiano ci sono due punti antipodali con la stessa temperatura. Soluzione: fissati l'istante e il meridiano con il suo simmetrico, usiamo un angolo ϑ come coordinata sull'intera circonferenza. La temperatura è $f(\vartheta)$ con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e 2π-periodica e il problema è annullare la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(\vartheta) = f(\vartheta) - f(\vartheta + \pi)$. Ma φ verifica $\varphi(\pi) = -\varphi(0)$, per cui si può applicare il Teorema di Bolzano su $[0, \pi]$.

11.11. Si assuma come noto il risultato seguente: se $A = \mathbb{R}^n$ oppure A è un intervallo e la funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$ è differenziabile, allora f è lipschitziana se e solo se le sue derivate parziali sono limitate. Discutere la lipschitzianità e la continuità uniforme delle funzioni seguenti:

$$\begin{array}{lll} x \mapsto \arctan \dfrac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, & x \mapsto \tanh x^2, \quad x \in \mathbb{R}, & \dfrac{1}{x} \sin x^3, \quad x > 1 \\ x \mapsto e^{-x^2} \sin x^5, \quad x \in \mathbb{R}, & x \mapsto e^{-x} \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, & x \mapsto \sin |x|^2, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto \sqrt{x} \sin \dfrac{1}{x}, \quad x > 0, & x \mapsto \sin \sqrt{x}, \quad x \geq 0, & x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{y^2}{1 + |y|^3}\, dy, \quad x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

11.12. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua tale che $\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0$. Dimostrare che f è uniformemente continua. Rivedere alcune delle funzioni dell'Esercizio 11.11 alla luce di questo risultato.

11.13. Siano $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} (2n, 2n+1)$ e $\{c_n\}$ una successione reale. Si controlli che la formula

$$f(x) = c_n \quad \text{se } x \in (2n, 2n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

effettivamente definisce una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ e si dimostri che f è uniformemente continua. Trattare il caso analogo in cui l'intervallo $(2n, 2n+1)$ è sostituito da $(2n, 2n+\ell_n)$, ove $\ell_n \in (0,2)$ per ogni n, nell'ipotesi che $\sup_n \ell_n < 2$. Che avviene invece se $\sup_n \ell_n = 2$?

11.14. Dimostrare che, se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è uniformemente continua, allora esiste $c > 0$ tale che $|f(x) - f(0)| \leq 1 + c|x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Soluzione. Trattiamo il caso generale. Il lettore specializzi la dimostrazione nel caso particolare $n = m = 1$. Per ipotesi esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq 1$ per ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ verificanti $|x - y| \leq \delta$. Mostriamo che la formula dell'enunciato vale con $c = 1/\delta$. Se $|x| \leq \delta$ la cosa è chiara: basta prendere $y = 0$ nella disuguaglianza appena ottenuta. Si ha infatti $|f(x) - f(0)| \leq 1 \leq 1 + c|x|$. Supponiamo ora $\delta \leq |x| \leq 2\delta$. Scelto $y = \delta x/|x|$ abbiamo

$$x - y = |x| \frac{x}{|x|} - \delta \frac{x}{|x|} \quad \text{da cui} \quad |x - y| = \big| |x| - \delta \big| = |x| - \delta \leq \delta.$$

Segue che $|f(x) - f(y)| \leq 1$ e quindi, essendo $|y| = \delta \leq \delta$ e $1 \leq c|x|$, anche

$$|f(x) - f(0)| \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(0)| \leq 1 + 1 \leq 1 + c|x|.$$

Nel passo successivo si considera il caso $2\delta \leq |x| \leq 3\delta$ e si sceglie $y = 2\delta x/|x|$: allora $|x - y| \leq \delta$ e $|y| = 2\delta$, per cui ancora si conclude. Passo passo, ogni $x \in \mathbb{R}^n$ è preso in considerazione. Il ragionamento competamente rigoroso, tuttavia, andrebbe fatto per induzione: se $k \geq 1$ è intero e la disuguaglianza vale per ogni x verificante $(k-1)\delta \leq |x| \leq k\delta$, allora essa vale anche per ogni x verificante $k\delta \leq |x| \leq (k+1)\delta$.

11.15. Dedurre dall'Esercizio 11.14 che nessun polinomio in n variabili di grado > 1 definisce una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ uniformente continua.

11.16. Precisare e dimostrare i risultati seguenti: la composizione di due funzioni f e g uniformemente continue (rispettivamente lipschitziane) è uniformemente continua (rispettivamente lipschitziana). Usare ciò per dedurre la continuità uniforme della funzione $x \mapsto \sin^2 \sqrt{1 + |x|}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Che avviene se f e g sono hölderiane di esponenti α e β rispettivamente?

12. Integrali dipendenti da parametri e Teoremi di De l'Hôpital

12.1. Posto $I_n = n\int_0^{1/n} e^{-z^2}\,dz$ calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Soluzione. L'analisi offre molti strumenti. Primo. Essendo $n\int_0^{1/n} = \fint_{[0,1/n]}$, per il Teorema della convergenza delle medie abbiamo $\lim_{n\to\infty} I_n = e^{-z^2}|_{z=0} = 1$. Secondo. Con la sostituzione $nz = y$ abbiamo $I_n = \int_0^1 e^{-y^2/n^2}\,dy$ e possiamo usare il risultato di continuità degli integrali dipendenti da parametri leggendo I_n in una delle forme (ma queste sono solo due delle possibili)

$$I_n = \int_0^1 f(1/n^2, y)\,dy \quad \text{con} \quad f(x,y) = e^{-xy^2}, \qquad I_n = \int_0^1 f(1/n, y)\,dy \quad \text{con} \quad f(x,y) = e^{-x^2y^2}.$$

In entrambi i casi è inteso che f sia la funzione $f : \mathbb{R}\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definita rispettivamente dalle formule specificate sopra. In entrambi i casi abbiamo $\lim_{n\to\infty} I_n = \int_0^1 f(0,y)\,dy = 1$. Terzo. Possiamo considerare i limiti (che coincidono con $\lim_{n\to\infty} I_n$ non appena esistono)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{-z^2}\,dz}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{1/x} e^{-z^2}\,dz}{1/x}\,.$$

Il primo limite è il limite del rapporto incrementale $\bigl(F(x) - F(0)\bigr)/x$ della funzione integrale $x \mapsto F(x) = \int_0^x e^{-z^2}\,dz$ e dunque vale $F'(0)$ se tale derivata esiste; ma $F'(0)$ esiste e vale $e^{-0^2} = 1$ dato che la funzione integranda è continua in 0. Entrambi i limiti, infine, possono essere trattati con il Teorema di De l'Hôpital per la "forma indeterminata $0/0$". Otteniamo rispettivamente

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{1} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-(1/x)^2}(-1/x^2)}{-1/x^2} = 1.$$

12.2. Calcolare il limite

$$\ell = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^{\pi x} e^{-z} \sin^2 \frac{z}{x}\,dz.$$

Soluzione. Con la sostituzione $z = xy$ (le due variabili della sostituzione sono z e y) abbiamo

$$\ell = \lim_{x\to 0} \int_0^{\pi} e^{-xy} \sin^2 y\,dy = \lim_{x\to 0} \int_0^{\pi} f(x,y)\,dy$$

ove $f : \mathbb{R}\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$ è data da $f(x,y) = e^{-xy}\sin^2 y$. Siccome f è continua abbiamo subito $\ell = \int_0 \pi f(0,y)\,dy = \int_0^\pi \sin^2 y\,dy = \pi/2$.

12.3. Date le funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ e $r : \mathbb{R}^n \to (0,+\infty)$, si definisca $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante

$$g(x) = \int_{\Gamma(x)} f(x,y)\,ds(y) \quad \text{ove } \Gamma(x) \subset \mathbb{R}^2 \text{ è la circonferenza di centro } c(x) \text{ e raggio } r(x).$$

Si dimostri che g è continua. Si consiglia di scrivere l'integrale come un integrale su $[0,2\pi]$.

12.4. Supponendo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua calcolare il limite $\lim_{n\to\infty} n\int_0^{1/n} e^{-ny}\varphi(y)\,dy$.

12.5. Scrivere gli sviluppi del prim'ordine vicino all'origine delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date di seguito derivando sotto il segno di integrale per calcolare le derivate

$$x \mapsto \int_0^1 e^{-xy^2}\,dy\,, \qquad x \mapsto \int_0^\pi \cos(xy^2)\,dy\,, \qquad x \mapsto \int_0^1 \ln(1+xy^2)\,dy.$$

12.6. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, si definisca $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante

$$g(x) = \int_{\Gamma(x)} f \, ds$$

ove $\Gamma(x) \subset \mathbb{R}^2$ è la circonferenza descitta nei due casi seguenti: $a)$ il centro è $c(x)$ ove $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è di classe C^1 e il e raggio è $r > 0$ fissato; $b)$ il centro è l'origine e il e raggio è $r(x)$ ove $r : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ è di classe C^1. Dimostrare che g è di classe C^1 e trovare una formula per $g'(x)$ che coinvolga ancora integrali su $\Gamma(x)$.

Soluzione. Nei due casi abbiamo

$$g(x) = \int_0^{2\pi} f\bigl(c(x) + r(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\bigr)\, r \, d\vartheta \quad \text{e} \quad g(x) = \int_0^{2\pi} f\bigl(r(x)(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\bigr)\, r(x) \, d\vartheta$$

e si può derivare sotto il segno di integrale. A conti fatti si ottengono le formule

$$g'(x) = c'(x) \cdot \int_{\Gamma(x)} \nabla f \, ds \qquad \text{e} \qquad g'(x) = r'(x) \int_{\Gamma(x)} \nabla f \cdot n \, ds + \frac{r'(x)}{r(x)} \int_{\Gamma(x)} f \, ds$$

ove, nel secondo caso, $n : \Gamma(x) \to \mathbb{R}^2$ è la funzione $y \mapsto y/|y|$, cioè la funzione che al generico punto $y \in \Gamma(x)$ assegna il versore normale a $\Gamma(x)$ nel punto y orientato verso l'esterno del disco delimitato da $\Gamma(x)$.

12.7. Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\sin x}\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^{\lambda x})}{\sqrt{1+x^2}}\,, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sinh x}{x^3}$$

ove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\lambda > 0$, usando, eventualmente iterativamente, i teoremi di De l'Hôpital. Nei primi due casi usare anche gli sviluppi del prim'ordine delle funzioni elementari; nel terzo osservare che, al contrario, questo strumento è inefficace.

12.8. Sono date $u, v : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ di classe C^1 tali che

$$u' = v\,, \quad v' = u\,, \quad u(0^+) = 0\,, \quad v(0^+) = 1.$$

Studiare il limite $\lim_{x\to+\infty}\bigl(u(x)/v(x)\bigr)$. Si dia per noto che $\lim_{x\to+\infty} u(x) = \lim_{x\to+\infty} v(x) = +\infty$.

Soluzione. Il Teorema di De l'Hôpital fornisce

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{u'(x)}{v'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{v(x)}{u(x)}$$

non appena il secondo (cioè il terzo) limite esiste. Confrontando primo ed ultimo membro deduciamo che esistono tutti i limiti e valgono le uguaglianze scritte non appena uno dei limiti esiste e che, detto ℓ il primo di essi, deve risultare $\ell = 1/\ell$, cioè $\ell = \pm 1$, da cui $\ell = 1$ dati i segni delle funzioni. Per vedere che ℓ esiste, studiamo il segno della derivata. Abbiamo

$$(u/v)' = (uv' - vu')/v^2 = (u^2 - v^2)/v^2.$$

Ma $(u^2 - v^2)' = 2uu' - 2vv' = 2uv - 2vu = 0$ per cui $u^2 - v^2$ è costante. Essendo 1 il suo limite destro in 0, concludiamo che $u^2 - v^2 \equiv 1$ per cui $(u/v)' = 1/v^2 > 0$ e ℓ esiste. Dunque $\ell = 1$.

Due funzioni u e v verificanti le ipotesi sono $\sinh$ e $\cosh$. Di fatto, come si potrebbe dimostrare, queste costituiscono l'unica coppia ammessa. La funzione u/v è pertanto la funzione $\tanh$.

12.9. Studiare il comportamento all'infinito della funzione $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ data dalla formula $f(x) = \int_0^x y^\lambda \tanh y \, dy$, ove $\lambda > 0$.

Soluzione. Siccome $f'(x) = x^\lambda \tanh x$ per ogni x, vediamo che $f' > 0$ per cui f cresce e ha limite all'infinito: sia esso ℓ. Siccome f' ha limite ma non è infinitesima, il Teorema dell'asintonto esclude che ℓ sia finito. Dunque $\ell = +\infty$. Siccome $\tanh$ ha limite 1, si congettura che f abbia un comportamento analogo a quello della funzione $g : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ data dalla formula $g(x) = \int_0^x y^\lambda \, dy$, funzione che pure ha limite infinito. Studiamo allora il limite di f/g usando il Teorema di De l'Hôpital. Siccome il secondo limite che scriviamo esiste abbiamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\lambda \tanh x}{x^\lambda} = 1 \quad \text{da cui} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = 1 + o(1).$$

Essendo $g(x) = x^{\lambda+1}/(\lambda+1)$ concludiamo che $f(x) = x^{\lambda+1}/(\lambda+1) + o(x^{\lambda+1})$ e siamo indotti a trovare uno sviluppo per la differenza (positiva) $x^{\lambda+1}/(\lambda+1) - f(x)$. Abbiamo

$$\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} - f(x) = \int_0^x y^\lambda (1 - \tanh y) \, dy$$

e il secondo membro cresce dato che la sua derivata, che è la funzione integranda, è positiva. Dunque la differenza cui siamo interessati ha limite all'infinito: sia esso c e ora vediamo che c è finito. Infatti $1 - \tanh y = O(e^{-2y})$ e $y^\lambda = O(e^y)$ per $y \to +\infty$, per cui troviamo una costante $M > 0$ e un numero reale $a > 0$ tali che $y^\lambda (1 - \tanh y) \le M e^{-y}$ per $y \ge a$. Deduciamo per $x > a$

$$\frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1} - f(x) = \int_0^a y^\lambda (1-\tanh y) \, dy + \int_a^x y^\lambda (1-\tanh y) \, dy \le c_0 + M \int_a^x e^{-y} \, dy = c_0 + M(e^{-a} - e^{-x})$$

ove c_0 è il primo integrale del secondo membro. Siccome l'ultimo membro si mantiene limitato concludiamo che c è finito e che $f(x) = x^{\lambda+1}/(\lambda+1) - c + o(1)$. Notiamo che il significato di c è chiaro nell'ambito di una teoria dell'integrazione più generale che accetti intervalli illimitati:

$$c = \int_0^{+\infty} y^\lambda (1 - \tanh y) \, dy.$$

12.10. Siano $x_1, \dots, x_n \in (0,+\infty)$ e p reale non nullo. Il numero reale

$$M_p(x_1, \dots, x_n) = \Bigl(\frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{n} \Bigr)^{1/p} \tag{1}$$

si chiama media di ordine p di $x_1, \dots, x_n$. Il nome "media" è giustificato dai fatti seguenti: $M_p(x_1, \dots, x_n)$ è compreso fra il minimo e il massimo degli x_k; se gli x_k sono tutti uguali ad un numero reale x, anche la media vale x. Notiamo che per $p = 1$ si ottiene la media aritmetica; le medie di ordini 2 e -1 si chiamano media quadratica e media armonica. Calcolare il limite

$$\lim_{p\to 0} M_p(x_1, \dots, x_n).$$

Soluzione. Notiamo che tutti i termini della sommatoria della (1) tendono a 1, per cui il rapporto entro parentesi tende a 1 e il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞. Quindi conviene considerare il limite del logaritmo. Si ha

$$\ln M_p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{p} \ln \frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{n} = \frac{\ln \frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{n}}{p}$$

e ora il limite presenta la forma indeterminata $0/0$. Usiamo il Teorema di De l'Hôpital. Il limite del rapporto delle derivate vale

$$\lim_{p\to 0} \frac{d}{dp} \ln \frac{\sum_{k=1}^n x_k^p}{n} = \lim_{p\to 0} \frac{d}{dp} \ln \sum_{k=1}^n x_k^p = \lim_{p\to 0} \frac{\sum_{k=1}^n x_k^p \ln x_k}{\sum_{k=1}^n x_k^p} = \frac{\sum_{k=1}^n \ln x_k}{n} .$$

Abbiamo pertanto

$$\lim_{p\to 0} M_p(x_1, \dots, x_n) = \exp\Bigl(\frac{\sum_{k=1}^n \ln x_k}{n} \Bigr) = \exp\Bigl(\frac{1}{n} \ln \prod_{k=1}^n x_k \Bigr) = \Bigl(\prod_{k=1}^n x_k \Bigr)^{1/n}$$

cioè il limite vale la media geometrica degli x_k.

12.11. Con le ipotesi e le notazioni dell'Esercizio 12.10 si può dimostrare che, fissati $x_1, \dots, x_n$, la funzione $p \mapsto M_p(x_1, \dots, x_n)$ è non decrescente e che

$$\lim_{p\to -\infty} M_p(x_1, \dots, x_n) = \min\{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{e} \quad \lim_{p\to +\infty} M_p(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Il lettore giustifichi tali limiti (esercizio non per tutti). Si consiglia di ricondurre il primo al secondo con il cambiamento di variabile $p = -q$ e di dimostrare il secondo come segue: detto μ il massimo degli x_k, scrivere ogni x_k nella forma $x_k = \mu\vartheta_k$ con $0 < \vartheta_k \le 1$; allora alcuni ϑ_k (tutti nel caso banale, altrimenti solo alcuni) valgono 1 e i rimanenti sono < 1...

12.12. In riferimento all'Esercizio 12.10, considerare il caso in cui solo $m \ge 1$ degli x_k siano positivi e i restanti siano nulli. In tal caso ha senso la definizione di media solo per $p > 0$. Si calcoli il limite della media per $p \to 0^+$. Si consiglia di ricondurre il calcolo al risultato già dimostrato.

13. Derivate successive e formule di Taylor in una variabile

13.1. Intuire una formula per $f^{(n)}(x)$ nel caso $x \mapsto f(x) = e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, e dimostrarla per induzione su n.

13.2. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $u(x) = \sin x^2$. Dimostrare che esistono due successioni $\{P_n\}$ e $\{Q_n\}$ di polinomi tali che $u^{(n)}(x) = P_n(x)\sin x^2 + Q_n(x)\cos x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \geq 0$. Ragionare per induzione su n.

13.3. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = e^{-1/x}$. Ragionando per induzione su n dimostrare che per ogni $n \geq 0$ esiste un polinomio P_n tale che $f^{(n)}(x) = e^{-1/x}P_n(1/x)$ per ogni $x > 0$. Dedurre che il prolungamento di f a tutto $\mathbb{R}$ nullo in $(-\infty, 0]$ è di classe C^∞.

13.4. Costruire $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $f^{(n)}(0) = n$ per $n = 0, \ldots, 10$ e tale che la corrispondente serie di Taylor converga al valore $f(x)$ solo per $x = 0$.

13.5. Che significa, per una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞, che i suoi polinomi di Taylor di centro 3 e ordini 4 e 7 sono gli stessi?

13.6. Trovare i polinomi di Taylor di centro 5 di ogni ordine della funzione $x \mapsto \ln(2+x)$, $x > -2$. Procedere sia con il calcolo effettivo di tutte le derivate successive sia usando il cambiamento di variabile $x = 5 + h$ e appoggiandosi a sviluppi già noti.

13.7. Scrivere gli sviluppi di Taylor della funzione $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ di centro in 0 e di ordine k nei casi specificati di volta in volta:

$$f(x) = \sin(2x^3)\,, \quad k = 17\,, \quad f(x) = 1 - x^2 - e^{-x^2}\,, \quad k = 8\,, \quad f(x) = \ln(1 - x^2)\,, \quad k = 7.$$

Conviene, anziché eseguire il calcolo diretto, usare gli sviluppi delle funzioni elementari fondamentali e il risultato di unicità del polinomio di Taylor.

Soluzione del primo. Usiamo gli sviluppi di $\sin t$ per $t \to 0$ e sostituiamo $t = 2x^3$: occorre arrivare a una formula del tipo $\sin(2x^3) = P(x) + o(x^{17})$ con P polinomio di grado ≤ 17. Siccome f è di classe C^{17}, il polinomio trovato sarà il polinomio di Taylor. Lo sviluppo adatto è

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^6)$$

cioè quello di ordine 6, che fornisce

$$\sin(2x^3) = 2x^3 - \frac{(2x^3)^3}{3!} + \frac{(2x^3)^5}{5!} + o(x^{18}) = 2x^3 - \frac{(2x^3)^3}{3!} + \frac{(2x^3)^5}{5!} + o(x^{17}).$$

Notiamo che il polinomio trovato è quello di ordini 15, 16, 17 e 18. Di fatto esso è anche quello di ordini 19 e 20. Partendo infatti dallo sviluppo di $\sin t$ di ordine 7, si vede che nel polinomio di f di ordine 21 hanno coefficienti nulli i termini di grado 19 e 20. Dalla formula trovata ricaviamo il valore di alcune derivate successive di f, ad esempio $f^{(5)}(0) = 0$ e $2^5/5! = f^{(15)}(0)/15!$.

13.8. Trovare l'ordine minimo del polinomio di Taylor di centro 0 non identicamente nullo per la funzione $x \mapsto 2x^9 - x^4\sin(2x^5)$, $x \in \mathbb{R}$.

13.9. Determinare gli interi positivi n che rendono finiti e non nulli i limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos 2x + 4\cosh x - 5}{x^n}\,, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x + x\sinh x - e^{2x^2} + 1}{x^n}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cosh\sqrt{x} + \sqrt{1-x} - 2}{x^n}\,.$$

13.10. Calcolare i limiti (ove α è un parametro reale positivo)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-\sin^3 x}{x^\alpha}\,,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^6-\sin^6 x}{x^8}\,,\ \lim_{x\to 0^+}\Bigl(\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}-\cos x\Bigr)\,x^{-\alpha},\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(\pi/2)-\arctan x}{x^{-\alpha}}$$

usando gli strumenti più adatti.

Soluzione del terzo. Usiamo uno sviluppo di $(1+t)^\alpha$ per $t\to 0$ con $\alpha=-1/2$ e sostituiamo $t=\sin^2 x$; quindi usiamo uno sviluppo di $\sin x$ per $x\to 0$. Contemporaneamente pensiamo a uno sviluppo di $\cos x$ per $x\to 0$ e cerchiamo gli ordini di tutti gli sviluppi in modo che nella differenza rimanga un termine significativo e, nello stesso tempo, i calcoli non siano inutilmente complessi. Tentiamo con lo sviluppo del second'ordine di $(1+t)^\alpha$, che fornisce

$$(1+\sin^2 x)^{-1/2}=1+\alpha\sin^2 x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(\sin^2 x)^2+o(x^4)$$

e contemporaneamente pensiamo allo sviluppo del quart'ordine di $\cos x$. Nella speranza che nella differenza il termine x^4 non abbia il coefficiente nullo, scriviamo tutti i resti che compariranno nella forma $o(x^4)$ dato che una maggiore precisione sarebbe lavoro sprecato. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&(1+\sin^2 x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{3}{8}\sin^4 x+o(x^4)\\
&=1-\frac{1}{2}\Bigl(x-\frac{x^3}{3!}\bigl(1+o(1)\bigr)\Bigr)^2+\frac{3}{8}\bigl(x(1+o(1))\bigr)^4+o(x^4)\\
&=1-\frac{1}{2}\Bigl(x^2-\frac{2}{3!}\,x^4\bigl(1+o(1)\bigr)+o(x^4)\Bigr)+\frac{3}{8}\,x^4\bigl(1+o(1)\bigr)+o(x^4)\\
&=1-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x^4+o(x^4)+\frac{3}{8}\,x^4+o(x^4)
\end{aligned}$$

e sottraendo lo sviluppo del quart'ordine di $\cos x$ otteniamo

$$\begin{aligned}
&(1+\sin^2 x)^{-1/2}-\cos x\\
&=1-\frac{1}{2}\,x^2+\frac{1}{6}\,x^4+\frac{3}{8}\,x^4+o(x^4)-1+\frac{1}{2}\,x^2-\frac{1}{4!}\,x^4+o(x^4)=\frac{1}{2}\,x^4+o(x^4).
\end{aligned}$$

Il limite da calcolare diventa pertanto

$$\lim_{x\to 0^+}\Bigl(\frac{1}{2}\,x^4+o(x^4)\Bigr)x^{-\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\,x^{4-\alpha}\bigl(1+o(1)\bigr)$$

e vale 0, $1/2$, $+\infty$ a seconda che $\alpha<4$, $\alpha=4$, $\alpha>4$.

13.11. Siano $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\alpha\in(0,+\infty)$ e $c\in\mathbb{R}$ non nullo tali che $f(x)=cx^\alpha+o(x^\alpha)$ per $x\to 0^+$. Dimostrare che, se f è di classe C^∞, allora α è intero. Per quali interi k basta l'ipotesi che f sia di classe C^k per trarre la stessa conclusione?

13.12. Siano $k\ge 0$ intero e $\varphi,\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ di classe C^k e si consideri la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data dalle formule $f(x)=\varphi(x)$ se $x\le 0$ e $f(x)=\psi(x)$ se $x>0$. Si dimostri che f è di classe C^k se e solo se i polinomi di Taylor di φ e di ψ di centro 0 e ordine k sono gli stessi.

13.13. Determinare i $k\in\mathbb{N}$ tali che siano di classe C^k le funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite dalle coppie di formule date di volta in volta (ove α è un parametro reale). Si consiglia di usare l'Esercizio 13.12.

$$\begin{aligned}
&f(x)=\sin^2 x \quad \text{se } x\le 0\,, && f(x)=\alpha x^2 \quad \text{se } x>0\\
&f(x)=1-\cosh^2 x^2 \quad \text{se } x\le 0\,, && f(x)=0 \quad \text{se } x>0\\
&f(x)=1-e^{x^2}+\alpha x^3 \quad \text{se } x\le 0\,, && f(x)=\ln(1+\alpha x^2) \quad \text{se } x>0
\end{aligned}$$

Soluzione del primo. Siccome, in prima approssimazione, $\sin x \approx x$ da cui $\sin^2 x \approx x^2$, è chiaro che dobbiamo distinguere i due casi $\alpha \neq 1$ e $\alpha = 1$. Supponiamo $\alpha \neq 1$. Abbiamo

$$\sin^2 x = \bigl(x + o(x^2)\bigr)^2 = x^2 + o(x^2) \quad \text{e} \quad \alpha x^2 = \alpha x^2 + o(x^2)$$

per cui, per l'Esercizio 13.12, f non è di classe C^2. Tuttavia f è di classe C^1 in quanto lo stesso calcolo fatto, sia pure con perdita di informazione, fornisce $\sin^2 x = 0 + o(x)$ e $\alpha x^2 = 0 + o(x)$. Supponiamo ora $\alpha = 1$. Sempre lo stesso calcolo assicura ora che f è di classe C^2 e si pone il problema di una regolarità superiore. Da un lato abbiamo $\alpha x^2 = x^2 = x^2 + o(x^k)$ per ogni k; dall'altro, usando lo sviluppo del quart'ordine di $\sin x$, vediamo che

$$\sin^2 x = \Bigl(x - \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^4)\Bigr)^2 = x^2 + O(x^6) + o(x^8) - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5) + o(x^7)$$

e leggiamo i due sviluppi

$$\sin^2 x = x^2 + o(x^3) \quad \text{e} \quad \sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^4).$$

Dunque f è anche di classe C^3 ma non di classe C^4.

13.14. In ciascuna delle righe che seguono u è una funzione reale di classe C^3 in un certo intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ dato di volta in volta e verificante in tale intorno l'equazione specificata e la condizione aggiuntiva prescritta. Scrivere lo sviluppo di Taylor di u del terzo ordine di centro x_0.

$$\begin{aligned}
&u^3(x) - 3x^2 u(x) - x^6 - 1 = 0\,, && x_0 = 0 \quad \text{e} \quad u(0) = 1\\
&u(x) + u^3(x) - e^x\bigl(1 + u^2(x)\bigr) = 0\,, && x_0 = 0 \quad \text{e} \quad u(0) = 1\\
&3u^3(x) - xe^x u^2(x) - x^2 e^{2x} u(x) - x^3 e^{3x} = 0\,, && x_0 = 1 \quad \text{e} \quad u(1) = e.
\end{aligned}$$

Soluzione del primo. Intendiamo che u, u', eccetera denotino il valore di u o di una delle sue derivate nel generico punto x dell'intorno di x_0 in cui vale l'equazione. Non conviene derivare l'equazione una sola volta e ricavare u' in funzione di u e poi derivare la formula trovata. Conviene invece derivare successivamente l'equazione e poi valutare in $x = 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&3u^2 u' - 6xu - 3x^2 u' - 6x^5 = 0\\
&6u(u')^2 + 3u^2 u'' - 6u - 12xu' - 3x^2 u'' - 30x^4 = 0\\
&6(u')^3 + 36u'u'' + 3u^2 u''' - 18u' - 18xu'' - 3x^2 u''' - 120x^3 = 0.
\end{aligned}$$

Valutando la prima in $x = 0$ e tenendo conto che $u(0) = 1$ troviamo $3u'(0) = 0$ da cui $u'(0) = 0$. Sostituendo $u(0) = 1$ e $u'(0) = 0$ nella seconda, questa diventa $3u''(0) - 6 = 0$ e fornisce $u''(0) = 2$. Sostituendo tutto nella terza otteniamo $u'''(0) = 0$. Dunque il polinomio cercato è $x^2 + 1$.

13.15. Siano $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $u'(t) = u(t) - u^2(t)$ per ogni $t \geq 0$ e $t_0 > 0$ tale che $0 < u(t_0) < 1$. Dimostrare che $u''(t_0) = 0$ se e solo se $u(t_0) = 1/2$. Supponendo tale condizione verificata, scrivere il polinomio di Taylor di u di centro t_0 e ordine 3.

Soluzione. Da $u' = u - u^2$ ricaviamo

$$u'' = u' - 2uu' = (1 - 2u)(u - u^2) \quad \text{e} \quad u''(t_0) = \bigl(1 - 2u(t_0)\bigr)\bigl(u(t_0) - u^2(t_0)\bigr)$$

e l'equivalenza delle due condizioni dell'enunciato segue dal fatto che il termine nell'ultima parentesi non è nullo. Supponiamo ora $u(t_0) = 1/2$. Allora $u''(t_0) = 0$ e $u'(t_0) = (1/2) - (1/2)^2 = 1/4$. Calcolando anche la derivata terza troviamo

$$u''' = \bigl(u' - 2uu'\bigr)' = u'' - 2(u')^2 - 2uu'' \quad \text{da cui} \quad u'''(t_0) = -2(1/2)^2 = -1/2$$

e il polinomio cercato è $1/2 + (1/2)(t - t_0) - (1/12)(t - t_0)^3$.

13.16. Sapendo che $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di classe C^∞ e verifica le condizioni specificate di volta in volta, calcolare il polinomio di Taylor di u di centro 0 e ordine 3.

$$u' = \sin u \quad \text{e} \quad u(0) = \pi/2\,, \qquad u' = \ln(1 + u^2) \quad \text{e} \quad u(0) = 1\,, \qquad u'' = 1 - u \quad \text{e} \quad u(0) = u'(0) = 1.$$

13.17. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile e tale che $u'(x) = 2u(x)$ per ogni x e $u(0) = 3$. Dimostrare che u è di classe C^∞ e che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, la serie di Taylor di u di centro 0 valutata in x converge a $u(x)$. Calcolare esplicitamente la somma di tale serie e rappresentare u in termini di funzioni elementari.

Soluzione. Siccome u è differenziabile $2u$ è differenzabile. Dunque u' è differenziabile, in particolare continua, e u è di classe C^1 e, anzi, differenziabile due volte. Derivando si ottiene $u'' = 2u'$ e si può iterare il ragionamento, arrivando a ottenere la regolarità C^∞.

Calcoliamo esplicitamente le derivate successive: $u'' = 2u' = 2^2 u$, $u''' = 2u'' = 2^3 u$, eccetera. In generale $u^{(n)} = 2^n u$ e, in particolare, $u^{(n)}(0) = 3 \cdot 2^n$. La formula di Taylor con il resto di Lagrange fornisce pertanto: per ogni $x \in \mathbb{R}$ e ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste c compreso fra 0 e x tale che

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{3 \cdot 2^k}{k!}\, x^k + r_n(x) \quad \text{e} \quad r_n(x) = \frac{u^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \frac{2^{n+1} u(c)}{(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

Supponendo ad esempio $x > 0$ abbiamo allora (l'estremo superiore è finito dato che x è fissato)

$$|r_n(x)| \le \frac{(2x)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{0 \le t \le x} |u(t)| \quad \text{da cui} \quad \lim_{n \to \infty} r_n(x) = 0.$$

Abbiamo pertanto

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^n}{n!}\, x^n = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = 3e^{2x}.$$

Notiamo che se, immaginando di non conoscerlo ancora, definissimo l'esponenziale come la funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabile che verifica $u' = u$ e $u(0) = 1$ (dopo aver dimostrato che tale u esiste ed è unica), lo stesso ragionamento fornirebbe u di classe C^∞ e il consueto sviluppo in serie.

13.18. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $u'' + u = 0$, $u(0) = 1$ e $u'(0) = 0$. Dimostrare che $u^2 + (u')^2$ è costante e che il valore della costante è 1. Dedurre che $|u^{(n)}(x)| \le 1$ per ogni x e ogni n e che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, la serie di Taylor di u di centro 0 converge a $u(x)$. Calcolare esplicitamente la somma di tale serie e identificare la funzione u.

13.19. Stimare la differenza $e - \sum_{k=0}^{n}(1/k!)$ usando la formula di Taylor di centro 0 e ordine n con resto di Lagrange della funzione esponenziale.

13.20. Dare una stima della differenza $\sqrt{1+x} - 1 - (x/2)$ per $0 < x < 1$ usando una formula di Taylor del prim'ordine con il resto di Lagrange (derivata seconda nel resto). Procedere analogamente con la formula adeguata relativa alla radice cubica.

13.21. Costruire la formula di Taylor di ordine qualunque con il resto di Lagrange per la funzione $x \mapsto \ln(1+x)$, $x > -1$, e usarla per dimostrare che, per $0 < x \le 1$, la corrispondente serie di Taylor converge a $\ln(1+x)$. Sommare di conseguenza la serie armonica a segni alterni.

13.22. Si scriva la formula di Taylor di centro 0 e ordine generico $n \ge 0$ con il resto di Lagrange della funzione esponenziale e, denotato con P_{2n} il polinomio di Taylor di centro 0 e ordine $2n$ della funzione $f : x \mapsto e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, si dia una rappresentazione del resto $f(x) - P_{2n}(x)$ e la si usi per stimare l'errore che si commette sostituendo l'integrale $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ con l'integrale $\int_0^1 P_{2n}(x)\,dx$.

13.23. Questo esercizio è analogo all'Esercizio 13.22. Si scriva la formula di Taylor di centro 0 e ordine $n \ge 0$ con il resto di Lagrange della funzione $x \mapsto g(x) = 1/(1-x)$, $x > -1$, e si consideri la funzione $f : x \mapsto g(-x^2) = 1/(1+x^2)$, $x \in \mathbb{R}$. Denotato con P_{2n} il suo polinomio di Taylor di centro 0 e ordine $2n$, si dia una rappresentazione del resto $f(x) - P_{2n}(x)$ e la si usi per stimare l'errore che si commette sostituendo l'integrale $\int_0^x f(y)\,dy$ con l'integrale $\int_0^x P_{2n}(y)\,dy$ per ogni $x \in (0,1)$ fissato. Si deducano stime dell'errore in calcoli approssimati di $\pi = 6\arctan(1/\sqrt{3})$.

13.24. Considerata la parabola $y = ax^2$ con $a > 0$, dare l'interpretazione geometrica del coefficiente a in termini del raggio r della circonferenza tangente nell'origine all'asse x contenuta nel semipiano $y \ge 0$ la cui rappresentazione cartesiana locale vicino a $(0,0)$ nella forma $y = \varphi(x)$ è tale che ax^2 sia proprio il polinomio di Taylor di φ del secondo ordine di centro 0.

13.25. Questo esercizio non è per tutti. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 con derivata seconda limitata. Dimostrare che esiste $\lambda > 0$ tale che per ogni $x_0, x \in \mathbb{R}$ valgano le disuguaglianze

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \lambda(x - x_0)^2 \le f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \lambda(x - x_0)^2. \qquad (1)$$

Dimostrare che la (1) equivale alla proprietà più esplicita seguente del grafico di f: esiste $r > 0$ tale che, per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, le due circonferenze di raggio r tangenti al grafico di f in $P_0 = (x_0, f(x_0))$ hanno in comune con il grafico stesso il solo punto P_0. Dimostrare inoltre che la (1) (e quindi anche la stessa proprietà geometrica del grafico) vale, più in generale, se f è di classe C^1 con derivata lipschitziana, mentre essa può non valere, nemmeno localmente, nel caso di funzioni solo di classe C^1, né quando f ha derivata hölderiana di esponente $\alpha < 1$.

13.26. Questo esercizio non è per tutti. Dimostrare le disuguaglianze

$$1 - \cos x \ge \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\,, \quad |x - \sin x| \le \frac{|x|^3}{3!}\,, \quad 1 - \cos x \le \frac{x^2}{2} \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Si consiglia di dimostrarle solo per $x > 0$ e di estenderle successivamente a x generico. Per il caso $x > 0$ si consiglia di applicare la formula di Taylor di ordine appropriato e con il resto di Lagrange alla funzione $x \mapsto \varphi(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}$ e alle sue derivate prime e seconde.

Soluzione. Utilizziamo la formula di Taylor di ordine 2 di φ, di ordine 1 di φ' e di ordine 0 di φ'', sempre di centro 0 e con il resto di Lagrange. A tal fine calcoliamo le derivate che interessano:

$$\varphi'(x) = -\sin x + x - \frac{x^3}{3!}\,, \quad \varphi''(x) = -\cos x + 1 - \frac{x^2}{2}\,, \quad \varphi'''(x) = \sin x - x.$$

Abbiamo in particolare $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ e $\varphi'''(x) \le 0$ per ogni $x > 0$. Sia ora $x > 0$. Troviamo tre punti $c_i \in (0, x)$, $i = 0, 1, 2$, tali che

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{3!}\,\varphi'''(c_0)\,, \quad \varphi'(x) = \frac{x^2}{2}\,\varphi'''(c_1)\,, \quad \varphi''(x) = x\varphi'''(c_2).$$

Siccome $\varphi'''(c_i) \le 0$ dato che $c_i > 0$ per $i = 0, 1, 2$, seguono le (1) per $x > 0$. Le stesse si estendono poi a x generico osservando che le funzioni che intervengono sono pari oppure dispari.

14. Derivate successive in più variabili

14.1. Calcolare tutte le derivate del secondo ordine della funzione

$$f(x,y,z) = e^{xy}\sinh(xz), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

14.2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data dalla formula $g(x,y) = f(3x+2, 4y+5)$. Calcolare le derivate di tutti gli ordini di g in termini delle derivate di f.

14.3. Si consideri l'equazione delle onde in una variabile spaziale

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \text{ e } t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

ove $c > 0$ è assegnato. Si dimostri che le soluzioni $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 della (1) sono tutte e sole le funzioni ottenute dalla formula

$$u(x,t) = \varphi(x - ct) + \psi(x + ct) \tag{2}$$

al variare delle funzioni $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2.

Soluzione. Se φ e ψ sono di classe C^2, allora la funzione (2) è di classe C^2 e un calcolo diretto mostra che essa risolve la (1). Viceversa sia u una soluzione di classe C^2 della (1). Consideriamo la funzione ausiliaria

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad v(y,z) = u\Bigl(\frac{y+z}{2}\,, \,\frac{y-z}{2c}\Bigr).$$

Notiamo che il passaggio da u a v altro non è che un cambiamento di coordinate nello spazio-tempo $\mathbb{R}^2$. Esso e il cambiamento di coordinate inverso sono dati da

$$(x,t) \mapsto (y,z), \; y = x + ct, \; z = x - ct \quad \text{e} \quad (y,z) \mapsto (x,t), \; x = \frac{y+z}{2}\,, \; t = \frac{y-z}{2c}\,.$$

Tornando al calcolo, vediamo che v è di classe C^2 e, grazie alla (1) e al Teorema di Schwarz, verifica $D_z D_y v(y,z) = 0$ per ogni $(y,z) \in \mathbb{R}^2$, come si vede con un po' di pazienza. Per ogni $y \in \mathbb{R}$ fissato, applichiamo il Teorema della derivata nulla alla funzione $z \mapsto D_y v(y,z)$, $z \in \mathbb{R}$: deduciamo che questa è costante. Esiste dunque $\psi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $D_y v(y,z) = \psi_0(y)$ per ogni $y,z \in \mathbb{R}$. Ma $D_y v$ è di classe C^1, per cui ψ_0 è di classe C^1. Scegliamo allora, ad esempio, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $\psi(y) = \int_0^y \psi_0(s)\,ds$. Otteniamo una funzione di classe C^2 e risulta $D_y\bigl(v(y,z) - \psi(y)\bigr) = 0$ per ogni $y,z \in \mathbb{R}$. Per il Teorema della derivata nulla applicato alla funzione $y \mapsto v(y,z) - \psi(y)$, $y \in \mathbb{R}$ (per ogni $z \in \mathbb{R}$ fissato), deduciamo che essa è costante. Pertanto esiste una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $v(y,z) - \psi(y) = \varphi(z)$ per ogni $y,z \in \mathbb{R}$ e si verifica subito che φ è di classe C^2. Deduciamo la rappresentazione $v(y,z) = \psi(y) + \varphi(z)$ per ogni $y,z \in \mathbb{R}$ e dunque la (2).

Notiamo che, se una sola delle due funzioni φ e ψ fosse differenziabile, la corrispondente funzione v avrebbe una sola delle due derivate miste. Ad esempio se φ fosse differenzibile e ψ non lo fosse, si avrebbe $D_z v(y,z) = \varphi'(z)$ da cui $D_y D_z v(y,z) = 0$, mentre già $D_y v$ non esisterebbe.

14.4. Verificare che il laplaciano della funzione $(x,y,z) \mapsto 2z + e^x \cos y$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, è nullo.

14.5. Sia $P(z)$ un polinomio a coefficienti complessi nell'indeterminata z e siano $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date dalle formule $u(x,y) = \operatorname{Re} P(x+iy)$ e $v(x,y) = \operatorname{Im} P(x+iy)$. Dimostrare che $\Delta u(x,y) = 0$ e $\Delta v(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

14.6. Per ogni funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si definisca $u^* : (0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la formula $u^*(\rho,\vartheta) = u(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$. Ricordato che, se u è di classe C^2, vale la formula

$$(\Delta u)^*(\rho,\vartheta) = D^2_\rho u^*(\rho,\vartheta) + \frac{1}{\rho}\, D_\rho u^*(\rho,\vartheta) + \frac{1}{\rho^2}\, D^2_\vartheta u^*(\rho,\vartheta) \quad \text{per } \rho > 0 \text{ e } \vartheta \in \mathbb{R} \tag{1}$$

si determinino le funzioni $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 che risolvono l'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^2$ tali che la corrispondente u^* sia indipendente da ρ oppure indipendente da ϑ.

14.7. Questo esercizio non è per tutti. In relazione alla formula (1) dell'Esercizio 14.6, si supponga che una soluzione u dell'equazione di Laplace $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^2$ sia tale che la corrispondente u^* abbia la forma $u^*(\rho,\vartheta) = \varphi(\rho)\psi(\vartheta)$ per certe funzioni $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^2 prive di zeri. Si dimostri che esiste una costante reale λ tale che

$$\rho^2\varphi''(\rho) + \rho\varphi'(\rho) - \lambda\varphi(\rho) = 0 \quad \text{per ogni } \rho > 0 \quad \text{e} \quad \psi''(\vartheta) + \lambda\psi(\vartheta) = 0 \quad \text{per ogni } \vartheta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Si consiglia di considerare $\rho^2(\Delta u)^*(\rho,\vartheta)/\bigl(\varphi(\rho)\psi(\vartheta)\bigr)$. Verificare che, a posteriori, anche senza l'ipotesi di non annullamento su φ e ψ, le (1) forniscono, via la costruzione di u^* e di u, soluzioni dell'equazione di Laplace in $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ purché ψ sia 2π-periodica. Con la scelta $\lambda = n^2$ nella (1), $n = 1, 2, \ldots$, si cerchino φ e ψ della forma $\varphi(\rho) = \rho^\alpha$ e $\psi(\vartheta) = \sin\beta\vartheta$ oppure $\psi(\vartheta) = \cos\beta\vartheta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e si costruiscano tante soluzioni dell'equazione di Laplace in $\mathbb{R}^2$. Attenzione all'origine, che è il punto singolare del passaggio da coordinate cartesiane a coordinate polari. Collegare quanto si è ottenuto con l'Esercizio 14.5.

14.8. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Dimostrare che la formula dei 5 punti

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) + f(x-h,y) + f(x,y+h) + f(x,y-h) - 4f(x)}{h^2} = \Delta f(x,y).$$

vale per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Generalizzare al caso di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \ge 1$. Per capire come fare può essere utile riscrivere il caso $n = 2$ con la variabile vettoriale anziché con due variabili scalari.

15. Massimi e minimi in una o più variabili

15.1. Determinare e classificare i punti stazionari delle funzioni di una variabile reale

$$x \mapsto x + \frac{1}{x}\,, \quad x \neq 0\,, \qquad x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x^3 - x^5\,, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x(x-1)e^{-x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x\ln(1+x^2)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \qquad x \mapsto x^3 e^{-6x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Per la classificazione usare tutti gli strumenti disponibili.

Soluzione dell'ultimo. La funzione deve avere minimo e massimo assoluti dato che essa assume almeno un valore positivo e almeno un valore negativo ed è continua e infinitesima all'infinito. Ogni punto di estremo locale è stazionario. Si ha $f'(x) = (3x^2 - 12x^4)e^{-x^2}$ per cui i punti stazionari sono $x = 0$ e $x = \pm 1/2$. Il punto $x = 0$ non è di estremo locale: infatti $f(0) = 0$ e vale lo sviluppo $f(x) = x^3\bigl(1 + o(1)\bigr)$, dal quale si deduce che f cambia segno in ogni intorno di 0. I punti $-1/2$ e $1/2$ sono invece di minimo assoluto e di massimo assoluto rispettivamente. Il Criterio della derivata seconda sarebbe applicabile e fornirebbe $f''(-1/2) > 0$ e $f''(1/2) < 0$, ma dedurremmo solo che i due punti sono di minimo e di massimo locale. Infine, data la semplicità della formula, si può studiare il segno di f': si trova $f'(x) > 0$ se $0 < |x| < 1/2$ e $f'(x) < 0$ se $|x| > 1/2$. Dunque f cresce strettamente in $(-1/2, 0)$ e in $(0, 1/2)$, dunque anche in $[-1/2, 1/2]$ essendo continua, e decresce in $(-\infty, -1/2)$ e in $(1/2, +\infty)$, dunque anche negli intervalli chiusi. Ciò implica che 0 non è punto di estremo locale e che i punti $\pm 1/2$ sono punti di massimo e minimo assoluto.

15.2. Siano I un intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua e siano $a, b \in I$ due punti di massimo locale per f tali che $a < b$. Dimostrare che nell'intervallo (a, b) vi è almeno un punto di minimo locale per f. Che avviene se f non è continua? Che avviene se il dominio di f non è un intervallo?

15.3. Questo esercizio è una versione semplificata di quello assegnato il 31 marzo 2011 con la raccomandazione di svolgerlo il giorno successivo. Trovare massimi e minimi locali e globali (se esistono) della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \bigl(x^2(x+3) - y^2\bigr)^+$.

Soluzione. Il massimo assoluto non esiste dato che $\lim_{x\to+\infty} f(x, 0) = +\infty$. La funzione è continua e non negativa e verifica ad esempio $f(0, 0) = 0$. Dunque essa ha minimo assoluto e $(0, 0)$ è un punto di minimo. Gli altri punti di minimo assoluto sono tutti e soli i punti (x, y) tali che $y^2 \geq x^2(x+3)$. Ogni punto (x, y) verificante $y^2 > x^2(x+3)$ ha un intorno in cui f è nulla e quindi è anche di massimo locale. Ogni eventuale altro punto di massimo locale deve appartenere all'aperto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2(x+3) - y^2 > 0\}$. Si ha $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ ove $\Omega_\pm$ sono i due sottoinsiemi di Ω caratterizzati dalle disuguaglianze $x > 0$ e $x < 0$ rispettivamente: infatti nessun punto $(x, y) \in \Omega$ verifica $x = 0$. Osserviamo anche che Ω_- è limitato: infatti $(x, y) \in \Omega_-$ implica $-3 < x < 0$ e $|y| \leq 3^2 \cdot 3$. Dunque la restrizione di f alla chiusura di Ω_- ha massimo assoluto. Siccome $f = 0$ su $\partial\Omega_-$, ogni punto di massimo assoluto per la restrizione è interno, dunque anche un punto di massimo locale per la funzione f originaria, che dunque ha in Ω_- almeno un punto di massimo locale. Si ha per $(x, y) \in \Omega$

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 + 6x, -2y) \quad \text{e} \quad \nabla f(x, y) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad (x, y) = (-2, 0)$$

in quanto $x \neq 0$ in Ω. Il punto $(-2, 0)$ è il punto di Ω_- di cui abbiamo accertato l'esistenza e non esistono altri punti di estremo locale in Ω. Se, non paghi di quanto abbiamo ottenuto, vogliamo usare il Criterio dell'hessiano, abbiamo per $(x, y) \in \Omega$

$$D^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x+6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{da cui} \quad D^2 f(-2, 0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

così che la matrice $D^2 f(-2,0)$ è definita negativa e $(-2,0)$ è un punto di massimo locale.

15.4. Determinare i punti stazionari e i punti di estremo locale e globale (se esistono) delle funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che al generico $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ associano i valori definiti dalle formule date di volta in volta.

$$x^2 + xy + y^2 + xy^2 + x^2 y\,, \qquad x \sin y + \cos y\,, \qquad (x-y)^2 - (x+y)^2 + x - y$$
$$\int_x^y \ln\Bigl(t^2 + \frac{3}{4}\Bigr)\,dt\,, \qquad \tanh xy\,, \qquad \sin x \sin y.$$

Qualche soluzione. Caso $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + xy^2 + x^2 y$. Tutti i punti di estremo locale sono stazionari e $\nabla f(x,y) = 0$ significa $2x + y + y^2 + 2xy = 0$ e $x + 2y + 2xy + x^2 = 0$, sistema che equivale a $x - y + y^2 - x^2 = 0$ (equazione ottenuta sottraendo membro a membro) e $2x + y + y^2 + 2xy = 0$. Essendo $x - y + y^2 - x^2 = (x-y)(1-x-y)$, i punti stazionari sono tutti e soli i punti che risolvono almeno uno dei due sistemi $x - y = 2x + y + y^2 + 2xy = 0$ e $1 - x - y = 2x + y + y^2 + 2xy = 0$. Si trovano i punti $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(-1,2)$ e $(2,-1)$ e le matrici hessiane che interessano sono

$$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D^2 f(-1,-1) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad D^2 f(-1,2) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(in $(2,-1)$ la funzione si comporta come in $(-1,2)$ dato che $f(y,x) = f(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$). La prima di esse è definita positiva, mentre le altre due sono indefinite. Dunque f ha un solo punto di estremo locale, l'origine, che è punto di minimo locale. Il minimo globale, invece, non esiste dato che $\lim_{t\to+\infty} f(2t,-t) = \lim_{t\to+\infty}(3t^2 - 2t^3) = -\infty$.

Caso $f(x,y) = \int_x^y \ln(t^2 + (3/4))\,dt$. Si ha $\nabla f(x,y) = \bigl(-\ln(x^2 + (3/4)), \ln(y^2 + (3/4))\bigr)$ e ogni punto di estremo locale deve verificare $\ln(x^2 + (3/4)) = \ln(y^2 + (3/4)) = 0$. I punti stazionari sono pertanto quattro: $(\pm 1/2, \pm 1/2)$ (cioè con le quattro combinazioni possibili di segni). Essendo in generale $D^2 f(x,y) = \operatorname{diag}\bigl(-2x/(x^2 + (3/4)), 2y/(y^2 + (3/4))\bigr)$, otteniamo subito

$$D^2 f(1/2,1/2) = \operatorname{diag}(-1,1)\,, \qquad D^2 f(-1/2,1/2) = \operatorname{diag}(1,1)$$
$$D^2 f(1/2,-1/2) = \operatorname{diag}(-1,-1)\,, \qquad D^2 f(-1/2,-1/2) = \operatorname{diag}(1,-1)$$

per cui i punti di estremo locale sono solo $(-1/2,1/2)$ e $(1/2,-1/2)$, un punto di minimo e uno di massimo rispettivamente. Siccome $\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y) = \pm\infty$, come si verifica senza eccessive difficoltà, non vi sono punti di estremo assoluto.

15.5. Determinare e classificare i punti stazionari delle funzioni, tutte denotate f e specificate dalle formule e dai domini dati di volta in volta.

$$f(x,y) = x^2 y + x^2 + xy\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = xye^y\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = x^2 y^2 (1 - x - y)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y,z) = (x+y)^2 + (y+z)^2 + (x+z)^2 + x + y + z\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$
$$f(x,y,z) = xy + xz - yz\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

15.6. Verificare che per ciascuna delle funzioni, tutte denotate f e specificate dalle formule e dai domini dati di volta in volta, l'origine è un punto stazionario e classificarlo al variare di α in $\mathbb{R}$.

$$f(x,y) = 4x^2 y + x^2 + \alpha xy\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y) = \bigl(x^2 + xy + y^2\bigr)e^{\alpha x}\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$f(x,y,z) = xy^2 + x^2 + \alpha y^2 + z^2\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + (\alpha x + z)^2 + xyz\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$
$$f(x,y,z) = x^2 + \alpha y^2 - z^2 + x^2 y\,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

15.7. Sia $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $u(x,y) + u^3(x,y) - e^{xy}\big(1 + u^2(x,y)\big) = 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $u(0,0) = 1$. Verificare che l'origine è un punto stazionario per u e classificarlo.

Soluzione. Conviene procedere come si è fatto per l'Esercizio 13.14. Dunque deriviamo l'equazione risolta da u rispetto a x e a y. Siano $\mathcal{E}_x$ e $\mathcal{E}_y$ le equazioni ottenute. Poi, anziché ricavare da queste u_x e u_y in funzione di u e derivare quanto ottenuto, deriviamo $\mathcal{E}_x$ e $\mathcal{E}_y$ ulteriormente. Alla fine valutiamo in $(0,0)$ il tutto arrivando a calcolare prima le derivate prime e poi le derivate seconde richieste. La stessa procedura può essere seguita poi per calcolare anche derivate di ordine ancora superiore (di fatto u è di classe C^∞ e il procedimento può essere iterato). Ad esempio $\mathcal{E}_x$ è l'equazione

$$u_x + 3u^2 u_x - y e^{xy}(1+u^2) - e^{xy} \cdot 2uu_x = 0$$

ove u e u_x si intendono valutate in (x,y). Deriviamo ciò, per esempio, rispetto a y. Otteniamo

$$\begin{aligned} &u_{xy} + 6uu_y u_x + 3u^2 u_{xy} - e^{xy}(1+u^2) - xye^{xy}(1+u^2) \\ &\quad - ye^{xy} \cdot 2uu_y - xe^{xy} \cdot 2uu_x - e^{xy} \cdot 2u_y u_x - e^{xy} \cdot 2uu_{xy} = 0 \end{aligned}$$

ove u e le sue derivate si intendono valutate in (x,y). Scelto ora $(x,y) = 0$ dapprima in $\mathcal{E}_x$ e nell'analoga $\mathcal{E}_y$ e poi nell'ultima uguaglianza e tenendo sempre conto che $u(0,0) = 1$, si ottengono i valori $u_x = u_y = 0$ e $u_{xy} = 1$. L'analogo calcolo delle altre due derivate fornisce $u_{xx} = u_{yy} = 0$. Abbiamo pertanto

$$\nabla u(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad D^2 u(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque $(0,0)$ è stazionario per u, ma la matrice hessiana è indefinita. Concludiamo che $(0,0)$ non è un punto di estremo locale.

15.8. Discutere l'esistenza o meno punti di massimo e di minimo assoluto e impostare il calcolo dei punti di massimo e di minimo locale per ciascuna delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ specificate di volta in volta. Nel caso $A \subset \mathbb{R}^n$ con $n > 1$, per la ricerca di punti di estremo sulla frontiera usare, oltre a un'eventuale via più veloce, anche il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

$$\begin{aligned}
&f(x) = x + \sin x\,, && A = [0, +\infty) \\
&f(x) = x + 2\sin x\,, && A = [0, 5\pi] \\
&f(x,y,z) = (1 + x + y + z)e^{x^2+y^2+z^2}\,, && A = [0,+\infty)^3 \\
&f(x,y) = x + 2y^2\,, && A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |(x,y)| \le 1\} \\
&f(x,y,z,u) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4u^2\,, && A = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 : |(x,y,z,u)| \le 1\} \\
&f(x,y) = \tanh(xe^{-y})\,, && A = [0,1]^2 \\
&f(x,y) = e^{2x^2-3y^2}\,, && A = [-1,+\infty)^2
\end{aligned}$$

Qualche soluzione. Quarta funzione: $f(x,y) = x + 2y^2$ nel disco unitario chiuso. La funzione ha massimo e minimo assoluti per il Teorema di Weierstrass. Nei punti interni si ha $\nabla f(x,y) = (1, 4y)$ per cui non vi sono punti stazionari e ogni punto di estremo locale o globale è sulla frontiera, che chiamiamo Γ, ed è punto di estremo locale anche per $f|_\Gamma$. Usiamo il Teorema dei moltiplicatori rappresentando Γ come $g(x,y) = 0$ con $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ per $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Il gradiente $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$ si annulla solo in $(0,0)$, per cui $\nabla g \ne 0$ su Γ e la jacobiana ha sempre rango 1. I punti (x,y) di estremo per $f|_\Gamma$ sono dunque dati dalle coppie delle prime due coordinate dei punti $(x,y,\lambda) \in \mathbb{R}^3$ che verificano il sistema

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \quad \text{e} \quad g(x,y) = 0, \quad \text{cioè} \quad 1 = 2\lambda x\,, \quad 4y = 2\lambda y \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Si trovano i punti $A_\pm = (\pm1, 0)$ e $B_\pm = (1/4, \pm\sqrt{15}/4)$ e un semplice calcolo fornisce $f(A_\pm) = \pm1$ e $f(B_\pm) = 17/8$. Deduciamo che A_- è il punto, unico, di minimo assoluto per f e che $B_\pm$ sono entrambi punti di massimo assoluto per f. L'altra via naturale che portava a questi punti era quella della parametrizzazione di Γ: un punto $(x_0, y_0) \in \Gamma$ è di estremo per $f|_\Gamma$ se e solo se ha la forma $(x_0, y_0) = (\cos t_0, \sin t_0)$ con t_0 punto di estremo per la funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data dalla formula $\varphi(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos t + 2\sin^2 t$. I punti di estremo locale o globale di φ sono tutti stazionari e l'annullameno di $\varphi'(t)$ porta a $\sin t = 0$ oppure $\cos t = 1/4$. Potendoci limitare all'intervallo $[0, 2\pi]$ e detta t_0 la soluzione positiva dell'equazione $\cos t = 1/4$ (cioè $t_0 = \arccos 1/4$, ovviamente), troviamo i punti 0, π, 2π (sostanzialmente doppione di 0) e $\pm t_0$. Studiando il segno di φ oppure calcolando φ'' nei punti trovati arriviamo a disegnare il grafico di φ corretto almeno per quanto riguarda gli intervalli di monotonia e vediamo che i punti $\pm t_0$ sono di massimo assoluto, che π è di minimo assoluto e che 0 e 2π sono punti di minimo locale e non assoluto. Dunque si ritrovano i punti A_- e $B_\pm$ di cui sopra e si scopre anche che il punto $A_+ = (1, 0)$ è di minimo locale e non assoluto per $f|_\Gamma$. A questo punto ci si può chiedere se esso è di minimo locale anche per la funzione f originaria. In generale un problema di questo tipo può non essere banale, ma nel caso specifico non vi sono difficoltà: infatti $D_x f(1, 0) = 1 > 0$, il che esclude che $(1, 0)$ sia di minimo locale per f. Alla stessa conclusione si arriva osservando che $f(x, 0) < f(1, 0)$ per $x < 1$ (ma questa via è in generale più difficile da seguire). Se vogliamo vederci ancor più chiaro studiamo la curva di livello Γ' di f che passa per $(1, 0)$: essa è data dall'equazione $x + 2y^2 = 1$, cioè $x = 1 - 2y^2$, e si ha $f < 1$ e $f > 1$ rispettivamente a sinistra e a destra di Γ'. D'altra parte Γ si rappresenta, vicino a $(1, 0)$, come $x = \sqrt{1 - y^2} = 1 - y^2/2 + o(y^2)$, il che mostra che Γ resta, in un intorno opportuno, a destra di Γ' e chiarisce in quali zone valgono le disuguaglianze $f < 1$ e $f > 1$.

Ultima funzione. Siccome l'esponenziale cresce strettamente, alle stesse conclusioni si arriva studiando, anziché la funzione originaria, la funzione più semplice, che ancora chiamiamo f, data da $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2$ per $(x, y) \in A$. Non esistono punti di estremo assoluto in quanto $\lim_{x\to+\infty} f(x, 0) = +\infty$ e $\lim_{y\to+\infty} f(0, y) = -\infty$ e si pone solo il problema dei punti di estremo locale. Il gradiente vale $\nabla f(x, y) = (4x, -6y)$ e si annulla solo nell'origine, che non è punto di estremo locale, questo sia ovviamente, sia in quanto la matrice hessiana $D^2 f(0, 0) = \operatorname{diag}(4, -6)$ è indefinita. I punti di estremo, se esistono, sono sul bordo ∂A. Il metodo dei moltiplicatori e quello della parametrizzazione si applicano a $\Gamma = \partial A \setminus \{(-1, -1)\}$, che è meglio vedere come unione di due semirette da considerare separatemante, e il punto $V = (-1, -1)$ va studiato a parte. Si ha $D_x f(V) = -4$ e $D_y f(V) = 6$ per cui $f(x, 0) < f(V) < f(0, y)$ per x e y piccoli e V non è punto di estremo locale nemmeno per la restrizione $f|_{\partial A}$. Consideriamo ora, per fissare le idee, la semiretta $\Gamma' = (-1, +\infty) \times \{-1\}$. La sua parametrizzazione naturale è attraverso l'ascissa e la funzione composta da considerare è $\varphi : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(x) = f(x, 0) = 2x^2$. Si trova $x = 0$ come punto di minimo assoluto, il che porta al punto $(0, -1)$ di minimo assoluto per $f|_{\Gamma'}$. Alla stessa conclusione si arriva con il Teorema dei moltiplicatori, come ora vediamo. Come aperto ambiente prendiamo $\Omega = (-1, +\infty) \times \mathbb{R}$. Estendiamo f a $F : \Omega \to \mathbb{R}$ con la stessa formula $F(x, y) = 2x^3 - 3y^2$ e definiamo $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mediante $g(x, y) = y + 1$ così che Γ' si descrive come $g(x, y) = 0$. Essendo $\nabla g(x, y) = (0, 1) \neq (0, 0)$, il Teorema dei moltiplicatori è applicabile e ogni punto (x, y) di estremo locale per $F|_{\Gamma'} = f|_{\Gamma'}$ deve verificare $\nabla F(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$, nonché $g(x, y) = 0$. Tutto ciò significa

$$(4x, -6y) = \lambda(0, 1), \quad x > -1 \quad \text{e} \quad y = -1 \quad \text{per cui} \quad (x, y) = (0, -1).$$

A titolo di completezza dimostriamo che, di fatto, $(0, -1)$ è punto di minimo locale anche per f (ma non per F, sia ben chiaro). Scrivendo $x = h$ e $y = -1 + k$ con $|h| < 1$ e $k \geq 0$ in modo che $(h, -1 + k) \in A$, abbiamo

$$f(h, -1 + k) = 2h^2 - 3(-1 + k)^2 = -3 + 6k + 2h^2 - 3k^2 = f(0, -1) + 6k + 2h^2 - 3k^2.$$

Notiamo incidentalmente che questo è anche lo sviluppo di Taylor di F del prim'ordine di centro $(0,-1)$ con il resto di Lagrange oppure del secondo ordine con resto in forma qualunque in quanto nullo, dato che $\nabla F(0,-1) = (0,6)$ e l'hessiana di F è la matrice costante $\operatorname{diag}(4,-6)$. Siccome $k^2 = o(k)$, la differenza $6k - 3k^2$ è non negativa per $k \geq 0$ abbastanza piccolo per cui vale la disuguaglianza $f(h,-1+k) \geq f(0,-1)$ per $|h| < 1$ e $k \geq 0$ abbastanza piccolo. Ciò significa $f(x,y) \geq f(0,-1)$ per ogni $(x,y) \in A \cap J$ ove J è un certo intorno di $(0,-1)$. Con gli stessi strumenti si tratta l'altra semiretta di ∂A: si vede che $(-1,0)$ è l'unico punto di massimo globale per la restrizione di f e che questo è un punto di massimo locale per la funzione f.

15.9. Siano $\Gamma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + 4y^2 + z^2 = 1\}$ e $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y,z) = x^2 + y^2$. Mostrare che f ha massimo e minimo e calcolarli.

Soluzione. Massimo e minimo di f esistono per il Teorema di Weierstrass in quanto Γ è un chiuso limitato e f è continua. Per calcolarli poniamo $F(x,y,z) = x^2 + y^2$ e $g(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 - 1$ per $(x,y,z) \in \mathbb{R}^2$. Allora Γ è l'insieme di livello 0 di g e $F|_\Gamma = f$. Siccome F e g sono di classe C^1 e ∇g si annulla solo nell'origine, che non appartiene a Γ, possiamo applicare il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange: se (x,y,z) è un punto di massimo o di minimo locale per $f = F|_\Gamma$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla F(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$. Ciò conduce al sistema

$$2x = 2\lambda x, \quad 2y = 8\lambda y, \quad 0 = 2\lambda z \quad \text{e} \quad x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$$

nell'incognita $(x,y,z,\lambda) \in \mathbb{R}^4$, ma noi siamo interessati solo alle prime tre componenti delle soluzioni. La terza equazione è soddisfatta se solo se $\lambda = 0$ o $z = 0$. Se $\lambda = 0$, abbiamo $x = y = 0$ dalle prime due equazioni e la quarta implica $z = \pm 1$: otteniamo i punti $(0,0,\pm 1)$, nei quali f è nulla. Siccome $f \geq 0$ su Γ, deduciamo che questi sono punti di minimo assoluto. Sia ora $\lambda \neq 0$. Come detto sopra deve essere $z = 0$ e le tre equazioni rimanenti diventano

$$(1-\lambda)x = 0, \quad (1-4\lambda)y = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + 4y^2 = 1.$$

Chiaramente sono eccezionali i valori $\lambda = 1, 1/4$. Se $\lambda = 1$ abbiamo $y = 0$ dalla seconda e quindi dalla terza $x = \pm 1$: otteniamo i punti $(\pm 1, 0, 0)$. Se $\lambda = 1/4$ abbiamo $x = 0$ dalla prima e $y = \pm 1/2$ dalla terza: otteniamo i punti $(0, \pm 1/2, 0)$. Supponiamo infine $\lambda \neq 0, 1, 1/4$: allora $x = y = 0$ dalle prime due equazioni, il che è incompatibile con la terza. I punti di massimo vanno pertanto cercati fra i quattro punti $(\pm 1, 0, 0)$ e $(0, \pm 1/2, 0)$. Nei primi due f vale 1, mentre negli altri f vale $1/4$. Concludiamo che i primi sono punti di massimo assoluto e che $\max f = 1$.

Sebbene siamo arrivati alla soluzione del problema, è interessante cercare di riconoscere la natura dei punti $p_\pm = (0, \pm 1/2, 0)$: essi non sono nemmeno punti di estremo locale, come ora mostriamo. Consideriamo il punto p_+ (per p_- il discorso è identico) e osserviamo che su Γ si ha $y^2 = (1 - x^2 - z^2)/4$. Deduciamo

$$f(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{4}\,(1 - x^2 - z^2) = \frac{1}{4}\,(1 + 3x^2 - z^2) \quad \text{per ogni } (x,y,z) \in \Gamma.$$

D'altra parte, lasciar variare (x,y,z) in un piccolo intorno di p_+ restando su Γ, cioè lasciar variare (x,y,z) in una piccola calotta di Γ intorno a p_+, equivale a lasciar variare (x,z) in un piccolo intorno I dell'origine di $\mathbb{R}^2$ e considerare il punto (x,y,z) con $y = (1/2)\sqrt{1 - x^2 - z^2}$. Allora è chiaro che possiamo, con spostamenti arbitrariamente piccoli a partire da p_+, sia far aumentare sia far diminuire il valore di f: basta prendere punti di I del tipo $(x,0)$ e $(0,z)$ rispettivamente.

15.10. Le due rive di un fiume sono date da $\Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x) = 0\}$ e $\Gamma_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \psi(x) = 0\}$ ove $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sono funzioni assegnate. Supponendo la corrente trascurabile, cercare i punti di miglior guado (punti di partenza e di arrivo). Precisare il problema matematico facendo ipotesi adeguate, organizzare il calcolo e interpretare il risultato.

Soluzione. Il miglior guado minimizza la distanza. Siccome il suo quadrato gioca lo stesso ruolo ed è più comodo, la funzione che conviene minimizzare è $(x,y) \mapsto |x-y|^2$, $x \in \Gamma_1$, $y \in \Gamma_2$. Conviene allora definire $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mediante $f(x,y) = |x-y|^2$ e $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, così che la funzione da minimizzare è $f|_\Gamma$. Cerchiamo di applicare il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange. Si noti: l'ambiente è $\mathbb{R}^4$ e la variabile in $\mathbb{R}^4$ è scritta come $(x,y) = (x_1,x_2,y_1,y_2)$. La funzione $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mediante la quale Γ è descritto da $g(x,y) = 0$ è data dalla formula $g(x,y) = (\varphi(x), \psi(y))$. Supponiamo pertanto φ e ψ di classe C^1 e cerchiamo di verificare l'ipotesi del rango. La jacobiana di g nel generico punto è la matrice

$$Dg(x,y) = \begin{bmatrix} D_1\varphi(x) & D_2\varphi(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_1\psi(y) & D_2\psi(y) \end{bmatrix}$$

e il suo rango è 2 in ogni $(x,y) \in \Gamma$ se e solo se $\nabla\varphi(x) \neq 0$ e $\nabla\psi(y) \neq 0$ per ogni $x \in \Gamma_1$ e $y \in \Gamma_2$. Facciamo pertanto questa ipotesi. Il Teorema dei moltiplicatori riduce la scelta alle coppie $(x,y) \in \Gamma$ verificanti la condizione: esistono λ_1, λ_2 tali che $\nabla f(x,y) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i \nabla g_i(x,y)$, cioè

$$\begin{aligned} &\bigl(2(x_1-y_1), 2(x_2-y_2), -2(x_1-y_1), -2(x_2-y_2)\bigr) \\ &\quad = \lambda_1\bigl(D_1\varphi(x), D_2\varphi(x), 0, 0\bigr) + \lambda_2\bigl(0, 0, D_1\psi(y), D_2\psi(y)\bigr). \end{aligned}$$

Ciò si riscrive in forma compatta come $2(x-y) = \lambda_1\nabla\varphi(x)$ e $-2(x-y) = \lambda_2\nabla\psi(y)$ e l'esistenza dei due moltiplicatori significa che $x-y$ è parallelo contemporaneamente ai due vettori $\nabla\varphi(x)$ e $\nabla\psi(y)$, i quali sono normali a Γ_1 in x e a Γ_2 in y. Dunque i punti di partenza x e di arrivo y devono essere tali che il vettore $x-y$ sia normale in x e in y alle rispettive sponde. Naturalmente il tutto ha un'interpretazione e un interesse solo se Γ_1 e Γ_2 non hanno punti comuni, ma la conclusione vale in ogni caso. I punti trovati, tuttavia, possono non essere quelli desiderati: essi comprendono infatti anche quelli di peggior guado (nonché casi in cui il segmento di estremi x e y è parzialmente sulla terra anziché nell'acqua). Riguardo all'esistenza, osserviamo che Γ è un chiuso. Se esso è anche limitato (nell'interpretazione si pensi al caso di un laghetto con un'isola: si vuole andare dall'isola alla terra ferma) allora vi è almeno una coppia (x,y) di miglior guado. In caso contrario una condizione sufficiente per l'esistenza è la coercività di $f|_\Gamma$, che si interpreta come segue: le sponde si allontanano "a distanza infinita" al tendere all'infinito di $|x|^2 + |y|^2$.

15.11. Sia $\Gamma = \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$, ove Ω è aperto di $\mathbb{R}^n$ e $g : \Omega \to \mathbb{R}^m$ è una funzione di classe C^1 con $m < n$, e si supponga che in ogni punto $x \in \Gamma$ la jacobiana $Dg(x)$ abbia rango m. Diciamo che una funzione $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 se essa ha un prolungamento $F : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Si dimostri che, in tali condizioni, per ogni $x \in \Gamma$ fissato, la proiezione ortogonale di $\nabla F(x)$ sullo spazio tangente $T_x\Gamma$ è la stessa per tutti i prolungamenti F di f di classe C^1. Ciò suggerisce le definizioni seguenti: *a*) il gradiente tangenziale $\nabla_\Gamma f(x)$ di una funzione $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ di classe C^1 è la proiezione ortogonale di $\nabla F(x)$ sullo spazio tangente $T_x\Gamma$ ove $F : \Omega \to \mathbb{R}$ è un qualunque prolungamento di f di classe C^1; *b*) il punto x è stazionario per la funzione $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ di classe C^1 quando $\nabla_\Gamma f(x) = 0$. Si dimostri che, se x è di massimo o minimo locale per la funzione $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ di classe C^1, allora esso è stazionario.

15.12. Sia Γ una superficie regolare di $\mathbb{R}^3$ che separa due mezzi $\mathcal{P}$ e $\mathcal{A}$ omogenei e isotropi, nei quali il raggio luminoso si propaga con le velocità scalari $v_\mathcal{P}$ e $v_\mathcal{A}$ rispettivamente. Si precisi una descrizione matematica della situazione e si dimostri la legge di rifrazione seguente: se un raggio, partendo dal punto $P \in \mathcal{P}$ e arrivando al punto $A \in \mathcal{A}$, attraversa Γ in un punto $x \in \Gamma$, detti

n_P e n_A i versori normali in x a Γ (opposti fra loro) diretti verso $\mathcal{P}$ e $\mathcal{A}$ rispettivamente, allora i punti P, A, x e (ad esempio) $x+n_P$ appartengono ad uno stesso piano Σ e vale la formula

$$\frac{\sin\vartheta_P}{v_P} = \frac{\sin\vartheta_A}{v_A} \tag{1}$$

ove ϑ_P e ϑ_A sono gli angoli, misurati in senso antiorario rispetto a un punto di osservazione esterno a Σ, dei vettori n_P e $P-x$ e, rispettivamente, dei vettori n_A e $A-x$.

Soluzione. Anche se la cosa non ha riflesso nella dimostrazione successiva, notiamo che il piano Σ resta indeterminato se raggio incidente e raggio rifratto sono normali a Γ; in tal caso, inoltre, la (1) diventa $0=0$ e non c'è nulla da dimostrare. Ma procediamo. Il problema ha carattere locale. Descriviamo, in un intorno aperto Ω del punto fissato x, la superficie Γ mediante l'equazione $g(y)=0$, ove $g:\Omega\to\mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 tale che $\nabla g(x)\neq 0$ (abbiamo scelto y come nome della variabile dato che x ha già un ruolo e stiamo supponendo $\Gamma\subset\Omega$, ignorando cioè la parte di superficie non inclusa nell'intorno Ω considerato). Allora $\mathcal{P}$ e $\mathcal{A}$ sono due aperti disgiunti la cui unione è $\Omega\setminus\Gamma$ e naturalmente supponiamo Ω abbastanza piccolo in modo che, per ogni $y\in\Gamma$, il segmento di estremi P e y, y escluso, sia incluso in $\mathcal{P}$ e che il segmento di estremi A e y, y escluso, sia incluso in $\mathcal{A}$, così che è corretto pensare l'unione dei due segmenti come possibile traiettoria del raggio luminoso. Per una nota legge dell'ottica il punto x minimizza il cammino ottico, cioè è punto di minimo per la funzione $f:\Gamma\to\mathbb{R}$ data da

$$f(y) = \frac{|P-y|}{v_P} + \frac{|A-y|}{v_A} \tag{2}$$

funzione che è ben definita e di classe C^∞ (basterebbe C^1) dato che P ed A non appartengono a Γ. Estendiamo f mediante la stessa formula (2) nell'aperto $\Omega\setminus\{P,A\}$ e, per non appesantire le notazioni, chiamiamo ancora f l'estensione, che pure è di classe C^∞. Ricordando che $\nabla g(x)\neq 0$, vediamo che siamo nelle condizioni del Teorema dei moltiplicatori di Lagrange: il cono tangente $T_x\Gamma$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 e $\nabla f(x)\in N_x\Gamma$. Abbiamo dunque

$$-\nabla f(x) = \frac{1}{v_P}\,\frac{P-x}{|P-x|} + \frac{1}{v_A}\,\frac{A-x}{|A-x|} \qquad \text{e} \qquad \nabla f(x)\in N_x\Gamma. \tag{3}$$

Siccome $N_x\Gamma$ ha dimensione 1, $\nabla f(x)$ è multiplo di n_P e la (3) assicura che i tre vettori $P-x$, $A-x$ e n_P sono dipendenti. Dunque i punti P, A, x e $x+n_P$ sono complanari. Fissati il piano Σ (unico o meno) e il punto di osservazione rispetto al quale intendiamo l'orientamento antiorario degli angoli, dimostriamo la (1). Sia τ uno dei due versori tangenti a Γ e paralleli a Σ, ad esempio quello che rende positivo l'angolo dei due vettori τ e $P-x$ presi nell'ordine detto. Tale angolo vale allora $\vartheta_P+\pi/2$. Per lo stesso motivo $\vartheta_A+\pi/2$ è l'angolo dei vettori $-\tau$ e $A-x$. Moltiplicando la (3) scalarmente per τ e ricordando che $\nabla f(x)$ è ortogonale a τ, otteniamo

$$\frac{1}{v_P}\,\frac{P-x}{|P-x|}\cdot\tau - \frac{1}{v_A}\,\frac{A-x}{|A-x|}\cdot(-\tau) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{\cos(\vartheta_P+\pi/2)}{v_P} - \frac{\cos(\vartheta_A+\pi/2)}{v_A} = 0$$

da cui subito la (1).

16. Funzioni convesse e alcune disuguaglianze

16.1. Determinare gli intervalli aperti di convessità e di concavità e i flessi delle funzioni seguenti

$$x \mapsto x^5 e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \ln(1+x^2), \quad x \in \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^x, \quad x \in (0,+\infty), \qquad x \mapsto \frac{x^3+1}{x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Soluzione del primo esercizio. La funzione, che chiamiamo f, è di classe C^∞. Si ha

$$f'(x) = e^{-x}(5x^4 - x^5), \quad f''(x) = x^3 e^{-x}(x^2 - 10x + 20).$$

Dunque f'' si annulla in 0 e nei punti $x_\pm = 5 \pm \sqrt{5}$. Siccome in ciascuno di essi f'' cambia segno, ciascuno di essi separa intervalli di stretta convessità e stretta concavità per cui tali punti sono tre flessi. Più precisamente $f''(x) > 0$ se $x \in (0, x_-)$ o $x \in (x_+, +\infty)$ e in ciascuno di tali intervalli f è strettamente convessa, mentre $f''(x) < 0$ se $x \in (-\infty, x_-)$ o $x \in (x_-, x_+)$ e in ciascuno di tali intervalli f è strettamente concava.

16.2. Determinare gli aperti non vuoti nei quali sono convesse le funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seguenti

$$(x,y) \mapsto x^2 + y^2 + x^3, \qquad (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + x^3 - y^3$$
$$(x,y) \mapsto x^2 y^2, \qquad (x,y) \mapsto xy + x^3 - y^3.$$

Soluzione del primo esercizio. La funzione, che chiamiamo f, è di classe C^∞. Si ha immediatamente

$$D^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 2+6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e gli autovalori sono $\lambda = 2 + 6x$ e $\lambda = 2$. Dunque la matrice è semidefinita positiva se e solo se $x \geq -1/3$ così che gli aperti nei quali f è convessa sono tutti e soli gli aperti *convessi* inclusi nel semipiano $x \geq -1/3$. Il più grande di essi è il semipiano $x > -1/3$. Notiamo che nel semipiano aperto opposto $x < -1/3$ la matrice hessiana è indefinita, per cui il piano tangente al grafico nel suo punto corrispondente a un (x,y) di tale semipiano attraversa il grafico stesso.

16.3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa. Dimostrare che

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \text{ e ogni } h \in \mathbb{R}.$$

Si può supporre f di classe C^2 e usare la formula di Taylor con il resto di Lagrange.

16.4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa di classe C^2. Dimostrare che f è strettamente convessa se e solo se l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}$ tali che $f''(x) = 0$ ha interno vuoto.

16.5. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2. Dimostrare che, se l'hessiano $D^2 f(x)$ è definito positivo per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, allora f è strettamente convessa. Trovare invece, per ogni n, un esempio di funzione strettamente convessa il cui hessiano non è definito positivo in almeno un punto $x \in \mathbb{R}^n$.

16.6. Caratterizzare le matrici quadrate A di dimensione n in corrispondenza alle quali è convessa, rispettivamente strettamente convessa, la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $f(x) = x^t A x$.

16.7. Esercizio non per tutti. Siano B una palla chiusa di $\mathbb{R}^n$ e $g : B \to \mathbb{R}$ continua. Siano poi $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e V lo spazio vettoriale delle funzioni $v : B \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Dimostrare che è convessa anche la funzione $\Phi : V \to \mathbb{R}$ data dalla formula

$$\Phi(v) = \int_B \varphi(\nabla v(x))\, dx - \int_B g(x) v(x)\, dx, \quad v \in V.$$

Dimostrare inoltre che, se φ è di classe C^1 e $u \in V$ minimizza Φ, allora

$$\int_B \big(D\varphi(\nabla u(x))\big)\nabla v(x)\,dx - \int_B g(x)v(x)\,dx = 0 \quad \text{per ogni } v \in V$$

ove $\nabla v(x)$ è inteso come vettore colonna. Da ciò si può dedurre (in modo non banale) che, se φ e u sono di classe C^2, allora

$$-\operatorname{div}\big(D\varphi(\nabla u(x))\big) = g(x) \quad \text{per ogni } x \in B \quad \text{e} \quad \big(D\varphi(\nabla u(x))\big)\cdot x = 0 \quad \text{per ogni } x \in \partial B\,.$$

16.8. Esercizio non per tutti. Partendo dalla concavità della funzione logaritmo dimostrare la *disuguaglianza di Young*

$$ab \le \frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}b^q \quad \text{per ogni } a,b>0 \text{ e } p,q>1 \text{ verificanti } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{1}$$

Soluzione. La funzione $x \mapsto \ln x$, $x > 0$ è concava in quanto $\ln''(x) = -1/x^2 < 0$. Per ogni $x, y > 0$ e per ogni $t \in (0,1)$ abbiamo dunque

$$t\ln x + (1-t)\ln y \le \ln\big(tx + (1-t)y\big) \quad \text{da cui} \quad x^t y^{1-t} \le tx + (1-t)y.$$

La (1) segue allora scegliendo $t = 1/p$, da cui $1 - t = 1/q$, $x = a^p$ e $y = b^q$.

16.9. Esercizio non per tutti. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa. Supponendo f regolare quanto basta, dimostrare la *disuguaglianza di Jensen*

$$\varphi\left(⨍_B u(x)\,dm\right) \le ⨍_B \varphi(u(x))\,dm \tag{1}$$

ove $u : B \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su un insieme B di misura positiva.

Soluzione. Dalla convessità di φ abbiamo

$$\varphi(t_0) + \varphi'(t_0)\,(t - t_0) \le \varphi(t) \quad \text{per ogni } t_0, t \in \mathbb{R}.$$

Ciò, in particolare, vale con la scelta $t = u(x)$ per ogni $x \in B$. Otteniamo

$$\varphi(t_0) + \varphi'(t_0)\,(u(x) - t_0) \le \varphi(u(x)) \quad \text{per ogni } x \in B \tag{2}$$

e integrando deduciamo (sempre per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$)

$$\varphi(t_0)\,m(B) + \varphi'(t_0)\left(\int_B u(x)\,dm - t_0\,m(B)\right) \le \int_B \varphi(u(x))\,dm.$$

Se ora scegliamo $t_0 = ⨍_B \varphi(u(x))\,dm$, il termine $\varphi(t_0)$ coincide proprio il primo membro della (1) e la differenza nelle parentesi tonde è nulla. Dunque la (1) segue dividendo per $m(B)$.

16.10. Esercizio non per tutti. In relazione all'Esercizio 16.9, si supponga che φ sia strettamente convessa e che nella disuguaglianza di Jensen (1) valga il segno di uguaglianza. Si dimostri che u è costante in ciascuno dei due casi seguenti: *a*) lo spazio di misura ambiente è lo spazio euclideo con la misura ordinaria, B è un rettangolo chiuso, o una palla chiusa... (generalizzare per quanto possibile) e u è continua; *b*) la funzione u assume solo un numero di finito di valori $c_1, \ldots, c_m$ su altrettanti sottoinsiemi $B_1, \ldots, B_m$ di B di misura positiva che costituiscono una partizione di B (in tal caso la tesi è $c_1 = \ldots = c_m$).

Soluzione. Supponiamo che u non sia costante. In particolare, detta t_0 la media di u, è falso che $u(x)$ valga t_0 in ogni punto x. Allora, in ciascuno dei due casi $a)$ e $b)$, esistono $\delta > 0$ e un sottoinsieme B_0 di B di misura positiva verificante una delle due condizioni: $u(x) \le t_0 - \delta$ per ogni $x \in B_0$; $u(x) \ge t_0 + \delta$ per ogni $x \in B_0$ (si scelga $B_0 = B \cap B_r(x_0)$ con x_0 tale che $u(x_0) \ne t_0$ e $r > 0$ opportuno nel primo caso e uno dei B_i nel secondo). Supponiamo, per fissare le idee, $u(x) \ge t_0 + \delta$ per ogni $x \in B_0$ e, per semplificare, che φ sia differenziabile in t_0. Allora la (2) dell'Esercizio 16.9 vale per ogni $x \in B \setminus B_0$ mentre la stretta convessità di φ implica

$$\varphi(t_0)+\varphi'(t_0)(u(x)-t_0)+\varepsilon \le \varphi(u(x)) \quad \text{per ogni } x \in B_0 \quad \text{ove} \quad \varepsilon = \varphi(t_0+\delta)-\bigl(\varphi(t_0)+\varphi'(t_0)\delta\bigr) > 0.$$

Integrando su B e poi dividendo per $m(B)$ deduciamo

$$\varphi(t_0) + \varepsilon\, \frac{m(B_0)}{m(B)} \le ⨍_B \varphi(u(x))\, dm$$

e contraddiciamo il fatto che la disuguaglianza di Jensen valga con il segno di uguaglianza.

16.11. Esercizio non per tutti. Generalizzare gli Esercizi 16.9 e 16.10 al caso di funzioni $\varphi : I \to \mathbb{R}$ qualunque (cioè anche non regolari), convesse o strettamente convesse nei due casi, e definite in un intervallo aperto I arbitrario, limitatamente alla funzioni u aventi immagine inclusa in I. Si consiglia di tenere conto dell'esistenza delle derivate destre e sinistre di φ in ogni punto.

16.12. Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ convessa in un intervallo aperto I. Dedurre dall'Esercizio 16.11 che

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^m \vartheta_i c_i\right) \le \sum_{i=1}^m \vartheta_i \varphi(c_i) \quad \text{se} \quad (c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m) \in (0,1)^m \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^m \vartheta_i = 1$$

e che l'uguaglianza implica $c_1 = \ldots = c_m$ nel caso in cui φ sia strettamente convessa. Si consiglia di prendere $B = [0,1]$ con la misura ordinaria e di scegliere come u una funzione a scala opportuna.

16.13. Dedurre dall'Esercizio 16.12 che vale la disuguaglianza fra medie geometria ed aritmetica

$$\bigl(c_1 \cdot \ldots \cdot c_m\bigr)^{1/m} \le \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m c_i \quad \text{per ogni } c_1, \ldots, c_m > 0$$

e che l'uguaglianza implica $c_1 = \ldots = c_m$. Suggerimento: $\varphi = -\ln$ e $\vartheta_i = 1/m$ per ogni i.

16.14. Dedurre dall'Esercizio 16.11 che, per $p > 1$, risulta

$$\left(\int_B u(x)\, dm\right)^p \le \bigl(m(B)\bigr)^{p-1} \int_B u^p(x)\, dm$$

nel caso di funzioni u non negative.

16.15. Esercizio non per tutti. Dimostrare che, fra i poligoni di $m \ge 3$ lati inscritti in un cerchio fissato, quelli che hanno perimetro massimo sono tutti e soli quelli regolari.

Soluzione. Sia r il raggio del cerchio e sia P un poligono di m lati inscritto. Denotiamo con $2\alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$, gli angoli al centro individuati dai lati del poligono, così che $\alpha_i \in (0, \pi)$ per ogni i e $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \pi$. Allora il lato corrispondente all'angolo $2\alpha_i$ ha lunghezza $2r\sin\alpha_i$ (ciò è vero anche se $2\alpha_i \geq \pi$, si noti) e i perimetri sono i seguenti:

$$\text{perimetro}(P) = 2r\sum_{i=1}^m \sin\alpha_i \quad \text{in generale} \quad \text{e} \quad \text{perimetro}(P) = 2mr\sin\frac{\pi}{m} \quad \text{se } P \text{ è regolare.}$$

La tesi diventa dunque

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \sin\alpha_i \leq \sin\frac{\pi}{m} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \sin\alpha_i \leq \sin\Bigl(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \alpha_i\Bigr)$$

in generale, l'uguaglianza valendo se e solo se $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m$. Ma ciò segue immediatamente applicando l'Esercizio 16.12 con le scelte $\varphi = -\sin|_{(0,\pi)}$, $c_i = \alpha_i$ e $\vartheta_i = 1/m$.

Notiamo che anche il metodo dei moltiplicatori di Lagrange è efficace, purché il problema sia formulato proprio come sopra (ma con una difficoltà che evidenziamo fra breve): si tratta di considerare la funzione $f : \Omega = (0,\pi)^m \to \mathbb{R}$ data dalla formula $f(\alpha) = \sum_{i=1}^m \sin\alpha_i$, ove $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, e di massimizzare la sua restrizione all'insieme Γ dei punti $\alpha \in \Omega$ verificanti $\sum_{i=1}^m \alpha_i = \pi$. Si introduce pertanto la funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mediante $g(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i - \pi$ così che Γ è proprio l'insieme degli zeri di g. Osservato che il gradiente $\nabla g(\alpha) = (1, \ldots, 1)$ non si annulla, ogni eventuale punto $\alpha \in \Gamma$ di massimo per $f|_\Gamma$ deve verificare $\nabla f(\alpha) = \lambda(1, \ldots, 1)$ per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$, cioè $\cos\alpha_1 = \ldots \cos\alpha_m$. Ma ciò significa $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m$ dato che $\alpha_i \in (0,\pi)$ per ogni i, vale a dire $\alpha_i = \pi/m$ per ogni i. Dunque tutto sembra fatto. In realtà, per concludere che $\alpha = (1/m, \ldots, 1/m)$ è punto di massimo (necessariamente l'unico punto di massimo) occorre dimostrare che almeno un punto di massimo per $f|_\Gamma$ esiste. La via naturale sta nell'applicare il Teorema di Weierstrass al prolungamento continuo F definito sulla chiusura di Γ per assicurare l'esistenza del massimo e nel dimostrare che ogni punto di massimo per F deve appartenere a Γ. La chiusura di Γ e il corrispondente prolungamento F sono chiaramente dati dalle formule

$$\overline{\Gamma} = \Bigl\{\alpha \in [0,\pi]^n : \sum_{i=1}^m \alpha_i = \pi\Bigr\} \quad \text{e} \quad F(\alpha) = \sum_{i=1}^m \sin\alpha_i \quad \text{per } \alpha \in \overline{\Gamma}.$$

Ora un punto $\alpha \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$ deve verificare $\alpha_i \in \{0, \pi\}$ per almeno un i. Se $\alpha_i = \pi$ per un certo i, tutti gli altri α_j sono nulli e $F(\alpha) = 0$, per cui α non è un punto di massimo. Se invece $\alpha_i \neq \pi$ per ogni i, allora $\alpha_i = 0$ per almeno un i e l'informazione sugli altri α_j è che la loro somma vale 1. Supponendo $m > 3$, $i = m$ e $\alpha_{m-1} > 0$ per semplificare le notazioni, consideriamo il punto $\beta \in \mathbb{R}^m$ dato da $\beta_i = \alpha_i$ se $i \leq m-2$ e $\beta_{m-1} = \beta_m = \alpha_{m-1}/2$, che pure appartiene alla chiusura di Γ dato che $\beta_i \in [0,\pi]$ per ogni i e $\sum_{i=1}^m \beta_i = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = \pi$. Allora $F(\beta) > F(\alpha)$, come si vede usando la disuguaglianza triangolare nell'interpretazione geometrica dei poligoni inscritti nel cerchio ($(m-1)$-esimo lato del poligono associato ad α e $(m-1)$-esimo e m-esimo lato del poligono associato a β), per cui, ancora, α non è un punto di massimo per F.

17. Integrali in più variabili: uso del Teorema di riduzione

17.1. Calcolare gli integrali dati di seguito, nei quali $A = [0,1]^2$.

$$\int_A xe^{xy}\,dx\,dy\,, \qquad \int_A (\sin\pi x + \cos\pi y)\,dx\,dy\,, \qquad \int_A e^{3x-2y}\,dx\,dy\,, \qquad \int_A \frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Soluzione del primo. Le vie possibili sono due: le seguiamo entrambe in modo che si veda chiaramente come in certi casi sia più che mai opportuno scegliere una strategia adatta anziché procedere in modo sprovveduto. Detto I il valore dell'integrale, abbiamo subito

$$I = \int_0^1 \Bigl(\int_0^1 xe^{xy}\,dy\Bigr)dx = \int_0^1 \bigl[e^{xy}\bigr]_{y=0}^{y=1}\,dx = \int_0^1 (e^x - 1)\,dx = e - 2.$$

Con lo scambio dei ruoli di x e y abbiamo invece

$$I = \int_0^1 \Bigl(\int_0^1 xe^{xy}\,dx\Bigr)dy = \int_0^1 F(y)\,dy \quad \text{ove} \quad F(y) = \int_0^1 xe^{xy}\,dx$$

e il calcolo di $F(y)$ richiede la distinzione dei casi $y=0$ e $y>0$. Si ha immediatamente $F(0) = 1/2$, mentre, se $y \in (0,1]$, occorre integrare per parti. Abbiamo

$$F(y) = \left[\frac{1}{y}\,e^{xy}\cdot x\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{1}{y}\,e^{xy}\cdot 1\,dy = \left[\frac{x}{y}\,e^{xy} - \frac{1}{y^2}\,e^{xy}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y}\,e^y - \frac{1}{y^2}\,e^y + \frac{1}{y^2}$$

ma il calcolo di $\int_0^1 F(y)\,dy$ non sembra immediato. Di fatto, per il Teorema di riduzione, F deve essere integrabile e il suo integrale deve essere uguale al valore $e-2$ già calcolato, anche se tutto ciò non è ovvio per via diretta: infatti F è la somma di tre funzioni non integrabili. Inoltre F deve essere addirittura continua per la teoria sugli integrali dipendenti da parametri. Controlliamo direttamente la continuità di F in 0 usando gli sviluppi di Taylor. Abbiamo per $y \to 0^+$

$$F(y) = \frac{1}{y}\bigl(1 + y + o(y)\bigr) - \frac{1}{y^2}\Bigl(1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2)\Bigr) + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} + o(1) = F(0) + o(1).$$

Per quanto riguarda il calcolo diretto dell'integrale di F osserviamo che

$$F(y) = G'(y) \quad \text{ove} \quad G(y) = \frac{1}{y}\,e^y - \frac{1}{y} \quad \text{per } y > 0\,.$$

Tuttavia l'applicazione del Teorema fondamentale del calcolo è lecita se la funzione G ha un prolungamento di classe C^1 definito anche in $y=0$. Questo è vero e il prolungamento si ottiene definendo $G(0) = G(0^+) = 1$ (ma occorre controllare la regolarità C^1, e ciò è un po' laborioso). Abbiamo allora $\int_0^1 F(y)\,dy = G(1) - G(0) = (e-1) - 1 = e-2$. Alternativamente si può usare la regolarità C^1 di G solo in $(0,1]$ e usare la continuità della funzione integrale come segue

$$\int_0^1 F(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 F(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \bigl(G(1) - G(\varepsilon)\bigr) = (e-1) - 1 = e-2.$$

Infine, supponendo di non aver notato notato l'uguaglianza $F = G'$ di cui sopra, possiamo integrare per parti, ma ciò solo in $[\varepsilon, 1]$ riservandoci di prendere poi il limite per $\varepsilon \to 0^+$. Abbiamo

$$\int_\varepsilon^1 F(y)\,dy = \int_\varepsilon^1 \frac{1}{y}\,e^y\,dy - \int_\varepsilon^1 \frac{1}{y^2}\,e^y\,dy + \int_\varepsilon^1 \frac{1}{y^2}\,dy$$

$$= \left[\frac{1}{y}\,e^y\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \Bigl(-\frac{1}{y^2}\Bigr)e^y\,dy - \int_\varepsilon^1 \frac{1}{y^2}\,e^y\,dy + \left[\Bigl(-\frac{1}{y}\Bigr)\right]_\varepsilon^1 = e - \frac{e^\varepsilon}{\varepsilon} - 1 + \frac{1}{\varepsilon} = e - 1 - \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

e concludiamo che

$$\int_0^1 F(y)\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\Bigl(e-1-\frac{e^\varepsilon-1}{\varepsilon}\Bigr) = e-2\,.$$

Chiaramente non era la stessa cosa scegliere l'una o l'altra via nell'applicare il Teorema di riduzione.

17.2. Calcolare le aree dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ descritti dai gruppi di condizioni dati di seguito.

$$x^4 \le y \le x\,, \quad x^4-1 \le y \le 1-x^2\,, \quad x \ge 0 \quad \text{e} \quad e^x \le y \le e+1-x.$$

Aiuta tracciare i grafici delle funzioni $x \mapsto f(x)$ coinvolte.

Soluzione del secondo. Tracciati i grafici delle funzioni $x \mapsto x^4-1$ e $x \mapsto 1-x^2$, $x \in \mathbb{R}$, si vede immediatamente qual è l'insieme in questione, che chiamiamo B. Procedendo per via puramente algebrica e immaginando di non vedere proprio nulla dal punto di vista geometrico, intutiamo almeno che B si dovrebbe poter scrivere come $B=\{(x,y)\in B'\times\mathbb{R} : u(x)\le y\le v(x)\}$ per un certo insieme $B'\subset\mathbb{R}$ e certe funzioni $u,v : B'\to\mathbb{R}$ *verificanti la disuguaglianza* $u\le v$. In effetti, se (x,y) verifica la coppia di disuguaglianze data, abbiamo anche $x^4-1\le 1-x^2$, cioè $-2\le x^2\le 1$, cioè $|x|\le 1$. Dunque $B=\{(x,y) : x\in[-1,1],\ x^4-1\le y\le 1-x^2\}$ e, per costruzione, risulta $x^4-1\le 1-x^2$ per $x\in[-1,1]$. Pertanto

$$\operatorname{area} B = \int_{-1}^1 \bigl((1-x^2)-(x^4-1)\bigr)\,dx$$

e il calcolo è immediato.

17.3. Calcolare i volumi dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ descritti dai gruppi di condizioni dati di seguito

$$\begin{array}{ll} (x,y)\in[0,1]^2 \quad \text{e} \quad -x^2y^2\le z\le xy\,, & \max\{|x|,|y|\}\le 1 \quad \text{e} \quad 0\le z\le e^{x+y} \\ 0\le z\le 1-x^2 \quad \text{e} \quad |y|\le 1\,, & x\in[0,1] \quad \text{e} \quad x-1\le z\le 1-y^4 \end{array}$$

senza usare i grafici, non sempre evidenti, delle funzioni $(x,y)\mapsto f(x,y)$ coinvolte.

Soluzione del terzo. Come nel caso dell'Esercizio 17.2, anche ora vi è una disuguaglianza nascosta, cioè implicata da quelle date e non scritta esplicitamente: $1-x^2\ge 0$, cioè $|x|\le 1$. L'insieme in questione si scrive perciò $B=\{(x,y,z)\in[-1,1]^2\times\mathbb{R} : 0\le z\le 1-x^2\}$ per cui

$$\operatorname{vol} B = \int_{[-1,1]^2} (1-x^2)\,dx\,dy$$

e il Teorema di riduzione riduce il calcolo a integrali immediati.

17.4. Calcolare l'integrale $I=\int_B xy\,dx\,dy$ ove B è il parallelogrammo di $\mathbb{R}^2$ avente i vertici nei punti $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$ e $(1,1)$.

Soluzione. Abbiamo due vie (una molto più semplice dell'altra) in quanto B può essere rappresentato in ciascuna delle due forme

$$B=\{(x,y) : x\in[0,3],\ u(x)\le y\le v(x)\} \quad \text{e} \quad B=\{(x,y) : y\in[0,1],\ \varphi(y)\le x\le\psi(y)\}$$

con certe funzioni (continue) $u,v : [0,3]\to\mathbb{R}$ e $\varphi,\psi : [0,1]\to\mathbb{R}$ verificanti $u\le v$ e $\varphi\le\psi$. Abbiamo pertanto

$$I=\int_0^3\Bigl(\int_{u(x)}^{v(x)} xy\,dy\Bigr)dx \quad \text{e} \quad I=\int_0^1\Bigl(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} xy\,dx\Bigr)dy$$

ma la seconda via è semplice in quanto $\varphi(y) = y$ e $\psi(y) = 2+y$. Al contrario u e v sono elementari a tratti e non globalmente: esse sono le due funzioni i cui grafici sono la spezzata congiungente ordinatamente $(0,0)$, $(2,0)$ e $(3,1)$ e, rispettivamente, quella congiungente ordinatamente $(0,0)$, $(1,1)$ e $(3,1)$. Nel proseguire il calcolo è quindi opportuno introdurre i punti ausiliari $x = 1$ e $x = 2$ e spezzare con la proprietà additiva gli integrali che occorre calcolare.

17.5. Calcolare l'area dell'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ appartenenti all'angolo individuato dalle semirette uscenti dall'origine e contenenti rispettivamente $(2,1)$ e $(1,2)$ e che stanno sotto il ramo di iperbole $xy = 2$ del quadrante $(0,+\infty)^2$.

17.6. Sia $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \le 1,\ |x+y| \le 1,\ 0 \le z \le y\}$. Calcolare volume e baricentro di B. Attenzione alle disuguaglianze nascoste nella definizione di B.

17.7. Siano D un disco (del piano) di raggio 2 e D' un disco di raggio 1 avente centro su ∂D. Trovare area e baricentro di $D \cap D'$. Posto inoltre $B = \{(x,y,z) \in (D \cap D') \times \mathbb{R} : 0 \le z \le x\}$ trovare volume e baricentro di B.

17.8. Calcolare $\int_B e^z (y/x)\, dx\, dy\, dz$ ove $B = \{(x,y,z) \in [0,1]^3 : y \le x\}$.

17.9. Calcolare il baricentro dell'insieme $B = \{(x,y,z) \in [0,1]^2 \times [0,+\infty) : z \le x^2 + y^2\}$.

17.10. Calcolare il baricentro dell'insieme $B = \{(x,y,z) \in [0,1]^2 \times [0,+\infty) : y \le x,\ z \le x^2 + y^2\}$.

18. Uso del cambiamento di variabile

18.1. Sia $B \subset \mathbb{R}^2$ chiuso limitato misurabile e simmetrico rispetto all'asse delle ordinate e siano $f, g : B \to \mathbb{R}$ due funzioni continue verificanti

$$f(-x,y) = f(x,y) \quad \text{e} \quad g(-x,y) = -g(x,y) \quad \text{per ogni } (x,y) \in B\,.$$

Dimostrare che

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy = 2\int_{B^+} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{ove} \quad B^+ = \{(x,y) \in B : x > 0\} \quad \text{e} \quad \int_B g(x,y)\,dx\,dy = 0$$

usando il Teorema di cambiamento di variabile. Enunciare e dimostrare fatti analoghi legati a simmetrie e relativi a integrali di linea, di superficie, di volume.

18.2. Per ogni intervallo limitato E di $\mathbb{R}$ si ponga $\mu(E) = e^{2b} - e^{2a}$ se a e b sono i due estremi di E. Calcolare $I = \int_{[2,5]} x\,d\mu$.

Soluzione. Se vogliamo applicare il risultato generale di cambiamento di variabile alla lettera possiamo prendere come spazi di misura $(A, \mathcal{E}, m)$ e $(A', \mathcal{E}', m')$ quelli definiti come segue: A e A' sono l'intervallo $[2,5]$; $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ sono i semianelli degli intervalli inclusi in $[2,5]$; m è l'ordinaria misura mis_1 e $m' = \mu$ (ristretta al semianello $\mathcal{E}'$); la trasformazione $G : A \to A'$ è l'identità. Allora $I = \int_{G([2,5])} x'\,d\mu = \int_{[2,5]} G(x)\rho(x)\,dx = \int_2^5 x\rho(x)\,dx$ ove ρ è la funzione che verifica

$$\mu(E) = \int_E \rho(x)\,dx \quad \text{per ogni } E \in \mathcal{E}\,, \quad \text{cioè} \quad \int_a^b \rho(x)\,dx = e^{2b} - e^{2a} \quad \text{per } 2 \le a \le b \le 5\,.$$

Selto $a = 2$ e lasciato variare b vediamo che ρ è la derivata della funzione integrale e il confronto con il secondo membro implica $\rho(x) = 2e^{2x}$ per ogni $x \in [2,5]$. Alternativamente

$$\rho(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\mu([x, x+h])}{\mathrm{mis}_1([x, x+h])} = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{2(x+h)} - e^{2x}}{h} = 2xe^{2x} \quad \text{per } 2 \le x < 5\,.$$

Dunque $I = \int_2^5 2xe^{2x}\,dx$ e si procede agevolmente per parti.

18.3. Per ogni rettangolo $E = E' \times E''$ del piano si ponga $\mu(E) = (b^3 - a^3)(d-c) + (d^3 - c^3)(b-a)$ ove a e b sono gli estremi di E' e c e d sono quelli di E''. Calcolare $I = \int_{[0,1]\times[0,1]} e^{x+y} d\mu$.

18.4. Per $r, h > 0$ si ponga $C(r,h) = \{(x,y,z) : |(x,y)| = r,\ 0 \le z \le h\}$. Si determini $\lambda \in \mathbb{R}$ in modo che risulti $\int_{C(2,3)} \sin(y^2 z/3)\,dS = \lambda \int_{C(1,1)} \sin(4y^2 z)\,dS$.

Soluzione. Si considerino come spazi di misura A e A' i due cilindri $C(1,1)$ e $C(2,3)$ con gli usuali insiemi elementari e l'usuale area e la trasformazione $G : A \to A'$ data dalla formula $G(x,y,z) = (2x, 2y, 3z)$. Il primo membro I' dell'uguaglianza data vale

$$I' = \int_{G(A)} \sin\bigl((y')^2 z'/3\bigr)\,dS = \int_A \sin\bigl((2y)^2(3z)/3\bigr)\,\rho(x,y,z)\,dS = \int_A \sin(4y^2 z)\,\rho(x,y,z)\,dS$$

ove $\rho : A \to \mathbb{R}$ è la funzione che rende vera l'uguaglianza

$$\operatorname{area} G(E) = \int_E \rho(x,y,z)\,dS \quad \text{per ogni } E \text{ elementare di } A\,.$$

Denotiamo ora con (ϑ, z) e (ϑ', z') le coordinate cilindriche sui due cilindri A e A' e consideriamo un insieme elementare E di A descritto in coordinate cilindriche dalle disuguaglianze $\vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2$ e $z_1 \le z \le z_2$ (ma le disuguaglianze potrebbero anche essere strette). Allora l'immagine $G(E)$ in A' è descritto dalle disuguaglianze $\vartheta_1 \le \vartheta' \le \vartheta_2$ e $3z_1 \le z' \le 3z_2$ per cui il rapporto delle aree vale

$$\frac{\operatorname{area} G(E)}{\operatorname{area} E} = \frac{2(\vartheta_2 - \vartheta_1)(3z_2 - 3z_1)}{(\vartheta_2 - \vartheta_1)(z_2 - z_1)} = 2 \cdot 3 = 6\,.$$

Segue $\rho(x, y, z) = 6$ in ogni punto di A e il confronto con l'uguaglianza data dice che $\lambda = 6$ va bene. Siccome i due integrali dovrebbero essere non nulli, 6 è l'unico valore possibile per λ.

Facciamo osservare che la formula $G(x, y, z) = (2x, 2y, 3z)$ assegnata in tutto $\mathbb{R}^3$ fornisce una trasformazione la cui matrice jacobiana $DG(x, y, z)$ vale $\operatorname{diag}(2, 2, 3)$ in ogni punto. Ma lo jacobiano $JG = |\det DG| = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ non ha nulla a che vedere con il fattore ρ trovato. Infatti ρ riguarda la trasformazione delle aree, mentre JG riguarda la trasformazione dei volumi.

18.5. Si definisca $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mediante $G(x, y, z) = (-2x, 3y, -4z)$. Si determinino i valori reali λ_1 e λ_2 che rendono vere le uguaglianze

$$\int_{G(S)} e^{x+y+z}\, ds = \lambda_1 \int_S e^{-2x+3y-4z}\, ds \quad \text{e} \quad \int_{G(B)} e^{x+y+z}\, dx\, dy\, dz = \lambda_2 \int_B e^{-2x+3y-4z}\, dx\, dy\, dz$$

ove S è il segmento di estremi $(0, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$ e B è la palla di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1.

18.6. Siano $A = \{(x, y) \in [0, +\infty)^2 : y \le x\}$ e $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |(x, y)| \le 1\}$. Calcolare

$$\int_{A\cap B} xy\, dx\, dy\,, \quad \int_{A\cap B} xy^2\, dx\, dy \quad \text{e} \quad \int_{A\cap B} x^2y^2\, dx\, dy.$$

18.7. Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$. Calcolare $\int_A xe^y\, dx\, dy$.

18.8. Calcolare l'area di $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |3x - y + 2| \le 1,\ |2x + y + 1| \le 1\}$.

18.9. Calcolare $\int_A (x^2 + y^2)\, dx\, dy$ ove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y + 2x| \le 2,\ |y - 2x| \le 2\}$.

18.10. Posto

$$B = \{(x, y, z) \in [0, +\infty)^3 : x^2 + y^2 \le 9,\ z \le 2x + 3y + 5\}$$

calcolare volume e baricentro di B.

18.11. Siano $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 4\}$ e $u : K \to \mathbb{R}$ data dalla formula $u(x, y) = xy$. Calcolare l'area e il baricentro del grafico di u.

18.12. Calcolare $\int_\Gamma (1 + y^2)^{-1/2} \ln(1 + x)\, ds$ ove Γ è il grafico di $x \mapsto e^{-x}$, $x \in [0, 1]$.

18.13. Sia B la palla unitaria di $\mathbb{R}^3$. Calcolare $\int_B \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$.

18.14. Calcolare $\int_B e^z (y/x)\, dx\, dy\, dz$ ove $B = \{(x, y, z) \in [0, 1]^3 : |(x, y)| \le 1,\ y \le x\}$.

18.15. Calcolare il baricentro dell'arco di parabola $\Gamma = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : y = x^2\}$.

18.16. Calcolare il baricentro della superficie $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |(x, y)| \le 1,\ z = x^2 + y^2\}$.

18.17. Calcolare il baricentro di $B_r \cap [0, +\infty)^3$ ove B_r è la palla di centro $(0, 0, 0)$ e raggio r.

18.18. Calcolare il volume dell'intersezione $B \cap (D \times \mathbb{R})$ ove B è la palla di $\mathbb{R}^3$ di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 4 e D è il disco di $\mathbb{R}^2$ di centro $(0, 0)$ e raggio 2.

18.19. Per ogni rettangolo tridimensionale E si definisca $\mu(E)$ mediante la formula

$$\mu(E) = (\arctan b - \arctan a) \int_R e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

se E è il prodotto di un rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$ e di un intervallo di estremi a e b. Calcolare l'integrale

$$\int_{[0,1]^3} xyz\, d\mu.$$

Soluzione. Si ha $\mu(E) = \int_E e^{-(x^2+y^2)}/(1+z^2)\, dx\, dy\, dz$ se E è come nell'enunciato, per cui

$$\int_{[0,1]^3} xyz\, d\mu = \int_{[0,1]^3} xyz\, \frac{e^{-(x^2+y^2)}}{1+z^2}\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 xe^{-x^2}\, dx \int_0^1 ye^{-y^2}\, dy \int_0^1 \frac{z}{1+z^2}\, dz$$

grazie ai Teoremi di cambiamento di variabile e di riduzione e il calcolo che resta da fare è immediato.

18.20. Si consideri la superficie $\Sigma = \{(x,y,z) \in [0,1]^2 \times \mathbb{R} : z = x\sqrt{3} + y^2\}$. Calcolare l'area di Σ e la lunghezza del suo bordo (somma delle lunghezze di quattro archi di curva).

Suggerimento circa il bordo di Σ: i quattro archi sono le immagini delle funzioni

$$\begin{array}{llll} x \mapsto (x, 0, x\sqrt{3})\,, & x \in [0,1]; & x \mapsto (x, 1, x\sqrt{3}+1)\,, & x \in [0,1] \\ y \mapsto (0, y, y^2)\,, & y \in [0,1]; & y \mapsto (1, y, \sqrt{3}+y^2)\,, & y \in [0,1] \end{array}$$

per cui si possono usare procedure usuali per il calcolo delle lunghezze.

19. Equazioni differenziali ordinarie

19.1. Si calcolino per valori bassi di n le approssimazioni di Peano-Picard u_n o (u_n, v_n) delle soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy in avanti:

$$\begin{aligned} &u'(t) = 2 + u(t)\,, && u(0) = 0 \\ &u'(t) = 1 + u^2(t)\,, && u(0) = 0 \\ &u'(t) = t + v(t)\,, \quad v'(t) = 1 + u^2(t)\,, && u(0) = v(0) = 0. \end{aligned}$$

19.2. Dimostrare che ogni problema di Cauchy per ciascuna delle equazioni differenziali elencate di seguito ha una e una sola soluzione globale.

$$u'(t) = t^2\big(1 - u^2(t)\big)^+\,, \quad u'(t) = \exp\big(t^2 - u^2(t)\big)\,, \quad u'(t) = \ln\big(1 + t^2 + u^2(t)\big).$$

Discutere la limitatezza di tali soluzioni.

Soluzione dell'ultimo caso. L'equazione diventa $u'(t) = f(t, u(t))$ se $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è data da $f(t,y) = \ln(1 + t^2 + y^2)$. La funzione f è di classe C^∞. Inoltre $D_y f(t,y) = 2y/(1 + t^2 + y^2)$ da cui $|D_y f(t,y)| \le 2|y|/(1 + y^2)$ e l'ultimo membro è limitato (si possono usare la continuità e il comportamento all'infinito oppure la disuguaglianza elementare di Young $2|y| \le 1 + y^2$). Pertanto ogni problema di Cauchy ha una e una sola soluzione globale. Sia u una tale soluzione. Dall'equazione deduciamo che $\lim_{t\to\pm\infty} u'(t) = +\infty$: in particolare i limiti esistono e non sono nulli. Ma $u'(t) \ge 0$ per ogni t in quanto l'argomento del logaritmo è ≥ 1. Dunque anche i limiti $\lim_{t\to\pm\infty} u(t)$ esistono. Allora nessuno di essi può essere finito per il Teorema dell'asintoto, per cui u non è limitata né inferiormente né superiormente.

19.3. Discutere, per ciascuna delle equazioni differenziali date, esistenza e unicità della soluzione globale $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ del problema di Cauchy in avanti $u(0) = \lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} &u'(t) = \arctan\big(tu^2(t)\big)\,, && u'(t) = tu(t)\tanh\big(1 + u(t)\big)\,, && u'(t) = t^2 u(t) + \sin u(t) \\ &u'(t) = t - u^2(t)\,, && u'(t) = e^t - u^3(t)\,, && u'(t) = e^t + u^3(t). \end{aligned}$$

Studiare, per quanto possibile, le proprietà qualitative della soluzione massimale e tracciarne un grafico approssimativo. Tracciare invece un grafico della soluzione preciso nell'intorno (destro) di $t = 0$ calcolandone un polinomio di Taylor significativo.

Cenni sul quarto caso. L'equazione diventa $u'(t) = f(t, u(t))$ se $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è data da $f(t,y) = t - y^2$. Siccome f è di classe C^∞ ma $D_y f$ non è limitata, non ci sono garanzie sull'esistenza della soluzione globale di ogni problema di Cauchy, ma almeno vi è la soluzione massimale unica. Tuttavia, se $\lambda \ge 0$, il problema di Cauchy in avanti ha soluzione globale e di questo fatto diamo un cenno di dimostrazione non completamente rigoroso. La derivata $u'(t)$ è positiva, negativa, nulla a seconda che $|u(t)|$ sia minore, maggiore, uguale a $t^{1/2}$. Se $\lambda > 0$, allora inizialmente $u'(t) < 0$ e la disuguaglianza persiste finché $u(t) > t^{1/2}$. Siccome $t \mapsto t^{1/2}$ invece cresce, deve esistere $t_0 > 0$ tale che $u'(t) < 0$ per $t \in (0, t_0)$ e $u'(t_0) = 0$. Da t_0 in poi si avrà $u'(t) > 0$ e $u(t) < t^{1/2}$, da cui una stima a priori per u in ogni intervallo limitato incluso nel dominio. Segue che u è soluzione globale. Se $\lambda = 0$ si hanno le stesse conclusioni prendendo $t_0 = 0$ nel ragionamento fatto e ignorando l'intervallo vuoto $(0, t_0)$. A complemento, se $\lambda < 0$ ma $|\lambda|$ è piccolo, inizialmente u decresce ma è convessa (si ha $u''(0) = 1 + 2\lambda^3$), il che potrebbe forzare u a soddisfare $u(t) > -t^{1/2}$ a partire da un certo istante. Al contrario, se $\lambda < 0$ e $|\lambda|$ è grande, la soluzione parte decrescente e concava ed è verosimile che essa non sia globale.

19.4. Per ciascuna delle equazioni differenziali elencate di seguito e ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, studiare a priori la soluzione massimale del problema di Cauchy completo $u(0) = \lambda$ e calcolarla esplicitamente.

$$u'(t) = -2tu^2(t)\,, \quad u'(t) = e^{-t^2} + 2tu(t)\,, \quad u'(t) = 1 - u^2(t)\,, \quad u'(t) = \cos^2 u(t).$$

La terza e la quarta equazione sono più delicate per quanto riguarda il calcolo.

19.5. Esercizio non per tutti. Studiare le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy

$$u'(t) = |\sin u(t)|^\alpha \quad \text{e} \quad u(0) = u_0$$

al variare di $u_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$.

19.6. Studiare l'esistenza e l'unicità della soluzione globale dei problemi di Cauchy in avanti

$$\begin{aligned}
&x'(t) = ty(t) + 1\,, \quad y'(t) = -tx(t) + \sin y(t)\,, && x(0) = y(0) = 0 \\
&x'(t) = y'(t) = -t\sqrt{1 + x^2(t) + y^2(t)}\,, && x(0) = 1 \quad \text{e} \quad y(0) = -1 \\
&u''(t) = \sin\bigl(tu'(t)\bigr) + t\cos^2 u(t)\,, && u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u'(0) = 1.
\end{aligned}$$

19.7. Siano $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1, I un intervallo aperto contenente 0 e $u : I \to \mathbb{R}$ una soluzione massimale dell'equazione differenziale $u'(t) = tg(u(t))$. Dimostrare che u è pari, cioè che I è simmetrico rispetto all'origine e $u(t) = u(-t)$ per ogni $t \in I$.

19.8. Per ciascuna delle equazioni differenziali ($t > 0$)

$$t^2u''(t) + 6tu'(t) + 6u(t) = 1\,, \quad t^2u''(t) + 5tu'(t) + u(t) = 3\,, \quad t^3u'''(t) - 6u'(t) = 2t$$

cercare un integrale particolare per tentativi. Cercare poi le soluzioni v della forma $v(t) = t^\alpha$ dell'equazione omogenea associata e verificarne l'indipendenza lineare. Dare infine la formula per l'integrale generale dell'equazione data.

19.9. Esercizio non per tutti. Siano I un intervallo aperto ed $\mathcal{E}$ un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine $n > 1$ a coefficienti continui in I nell'incognita u. Sia $\varphi : I \to \mathbb{R}$ una soluzione di $\mathcal{E}$ priva di zeri. Mostrare che il cambiamento di incognita $u = v\varphi$ fa corrispondere biunivocamente le soluzioni (globali) u di $\mathcal{E}$ e le soluzioni v di un'altra equazione $\mathcal{E}'$ dello stesso tipo, nella quale però v compare solo sotto il segno di derivazione. Usare infine il cambiamento di incognita $v' = w$ per ridurre $\mathcal{E}'$ a un'equazione di ordine $n - 1$. In particolare, se $n = 2$, la conoscenza di un integrale particolare φ riconduce il calcolo dell'integrale generale a operazioni di integrazione. Applicare tutto ciò alla costruzione dell'integrale generale dell'equazione

$$t^2u''(t) - tu'(t) + u(t) = 0, \quad t > 0$$

cercando φ come indicato nell'Esercizio 19.8 (che ora non permette da solo di concludere).

19.10. Esercizio non per tutti. Considerata l'equazione differenziale

$$u'(t) = 1 - tu(t) + u^2(t) \tag{1}$$

si imposti il calcolo delle soluzioni massimali dei corrispondenti problemi di Cauchy $u(0) = u_0$, con u_0 parametro reale, sviluppando la traccia seguente: osservato che la funzione $u^* : t \mapsto t$, $t \in \mathbb{R}$, è un integrale particolare della (1), si giustifichi il cambiamento di incognita $u = u^* + 1/v$ per la risoluzione del problema di Cauchy con $u_0 \neq 0$, si dia una formula per la soluzione v e si discuta l'esistenza o meno della soluzione globale del problema di Cauchy di partenza.

Soluzione. La (1) rientra nel quadro generale $u'(t) = f(t, u(t))$ con la scelta seguente della funzione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $f(t, y) = 1 - ty + y^2$. Siccome f è regolare ma non verifica la condizione di Lipschitz consueta a causa del termine quadratico, ogni problema di Cauchy ha soluzione massimale unica, ma non vi sono garanzie per soluzioni globali. Se $u_0 = 0$, allora la soluzione è $u = u^*$ ed è globale. Se $u_0 \neq 0$, la soluzione massimale u del problema di Cauchy corrispondente e la soluzione u^* hanno grafici disgiunti. Per ogni $t \in \operatorname{dom} u$ abbiamo dunque $u(t) > t$ oppure $u(t) < t$ a seconda che $u_0 > 0$ o $u_0 < 0$, per cui la differenza mai nulla $u - u^*$ si può scrivere come $1/v$ e avremo $v(t) > 0$ o $v(t) < 0$ per ogni $t \in \operatorname{dom} u$, rispettivamente nei due casi. Il nuovo problema nell'incognita v sarà il problema di Cauchy $v(0) = v_0 := 1/u_0$ per l'equazione in v che si ricaverà, ma con il vincolo che i segni di $v(t)$ e di u_0 siano gli stessi. Un semplice calcolo porta all'equazione

$$v'(t) = -tv(t) - 1$$

che è lineare a coefficienti continui in tutto $\mathbb{R}$. Dunque il problema di Cauchy $v(0) = v_0$ ha soluzione globale unica, ma non è detto che questa verifichi la condizione sul segno. La tecnica delle equazioni lineari porta alla formula

$$v(t) = e^{-t^2/2}\, w(t), \quad \text{ove} \quad w(t) = v_0 - \int_0^t e^{s^2/2}\, ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

e dobbiamo discutere il segno di v in funzione di quello di v_0 (lo stesso di u_0). Il segno di v è quello di w. Per semplicità pensiamo al solo problema di Cauchy in avanti. Se $v_0 < 0$ e $t > 0$ abbiamo ovviamente $w(t) < 0$. Dunque, se $u_0 < 0$, il problema di Cauchy per la (1) ha soluzione globale. Se invece $v_0 > 0$ la funzione w cambia segno. Infatti essa verifica $w(0) = v_0 > 0$, ma tende a $-\infty$ per $t \to +\infty$ in quanto $e^{s^2/2} \geq 1$ per ogni $s \in [0, t]$, per cui $w(t) \leq v_0 - t$. Inoltre w è strettamente decrescente dato che $w'(t) = -e^{t^2/2}$. Dunque esiste uno e un solo $T^* > 0$ tale che $w(T^*) = 0$ e avremo $w(t) > 0$ per $t \in [0, T^*)$ e $w(t) < 0$ per $t > T^*$. Concludiamo che la soluzione massimale del problema di Cauchy per la (1) ha dominio $[0, T^*)$.

A complemento segnaliamo che la (1) rientra nelle equazioni del tipo

$$u'(t) = a(t) + b(t)u(t) + c(t)u^2(t)$$

con a, b, c funzioni continue in $\mathbb{R}$. Queste vengono dette *equazioni di Riccati* e la tecnica sviluppata sopra è generale: se u^* è un integrale particolare dell'equazione definito in tutto $\mathbb{R}$, ogni altra soluzione può essere presentata, nel suo dominio, nella forma $u = u^* + 1/v$ e la nuova funzione v risolve un'equazione lineare a coefficienti continui in $\mathbb{R}$, precisamente

$$v'(t) = -\big(b(t) + 2c(t)u^*(t)\big)v(t) - c(t).$$

Ancora però c'è il problema del segno di v, che deve essere quello di $u_0 - u^*(0)$, per cui interessa non tanto la soluzione globale v del nuovo problema di Cauchy per l'equazione lineare quanto piuttosto la restrizione di v all'intervallo in cui è soddosfatta la condizione di segno, il che può condurre a soluzioni massimali u non globali del problema di partenza. Più in generale considerazioni del tutto analoghe, ma con tutte le attenzioni del caso, si possono fare se le funzioni a, b, c o l'integrale particolare u^* sono definiti solo in un certo intervallo.

19.11. Trovare l'integrale generale di ciascuna delle equazioni differenziali ($t \in \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{lll}
u'' - 5u' + 6u = t\,, & u''' + 2u'' - u' - 2u = e^{-3t}\,, & u'' + u' + 1 = \sin 2t \\
u'' + 2u' + u = e^t\,, & u'' - 3u' + 2u = 1 + 2\sin 3t\,, & u'' - u = 3e^{-t} + 5\cos 2t \\
u'' - u = 3e^{2t}\,, & u'' - 5u' + 6u = 3e^{2t}\,, & u'' - 4u' + 4u = 3e^{2t} \\
u''' + u = e^t\,, & u''' + u' = e^t\,, & u'' - 2u' + 2u = 5e^t \sin t.
\end{array}$$

Qualche indicazione. Equazioni della penultima riga: si cercano integrali particolari della forma $u^*(t) = ce^{2t}$, $u^*(t) = cte^{2t}$ e $u^*(t) = ct^2e^{2t}$ rispettivamente dato che nei tre casi 2 non è radice caratteristica, è radice caratteristica semplice, è radice caratteristica doppia. Ultima equazione: siccome $5e^t \sin t$ è combinazione lineare di $e^{(1\pm i)t}$ e $1 \pm i$ sono radici caratteristiche semplici si cerca un integrale particolare della forma $u^*(t) = te^t(a\cos t + b\sin t)$.

19.12. Esercizio non per tutti. Si consideri il moto di un punto materiale soggetto alla gravità e a una resistenza del mezzo che si oppone alla velocità e la cui intensità dipende solo dal modulo della velocità stessa. Supponendo regolare la dipendenza della resistenza del mezzo dalla velocità, dimostrare che il moto avviene in un piano verticale, o addirittura lungo la retta verticale se la velocità assunta convenzionalmente come iniziale è verticale.

Soluzione. Se $p(t)$ denota la posizione del punto all'istante t, il moto è retto dall'equazione

$$mp''(t) = m\vec{g} - \varphi(|p'(t)|)p'(t) \quad \text{per } t \in [0,T)$$

ove m è la massa del punto, $\vec{g}$ è il vettore accelerazione di gravità e $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ è una funzione (almeno) continua. Naturalmente si pensa all'intervallo di tempo $[0,T)$ massimale nel quale l'interpretazione dell'equazione ha senso: se $p(0) = 0$ (in particolare la quota del piano terrestre è convenzionalmente nulla) e $p'(0) \cdot \vec{g} < 0$ (la componente verticale della velocità iniziale è nella direzione opposta alla gravità), si deve avere $p(t) \cdot \vec{g} \le 0$ per $t \in [0,T)$. Sia w un vettore (non nullo) ortogonale a $\vec{g}$ e a $p'(0)$ e sia $u(t) = p(t) \cdot w$. Allora la funzione u verifica:

$$u''(t) = \psi(t)\, u(t) \quad \text{per } t \in [0,T), \quad u(0) = 0 \quad \text{e} \quad u'(0) = 0$$

ove abbiamo posto $\psi(t) = -\varphi(|p'(t)|)$. Siccome ψ è una funzione continua, il problema di Cauchy trovato ha soluzione unica e $u = 0$ è una soluzione. Dunque $p(t) \cdot w = 0$ per ogni t e il moto avviene nel piano ortogonale a w. Se poi $p'(0)$ è verticale, come w si può prendere un qualunque vettore orizzontale, per cui il moto avviene lungo la verticale.

19.13. In riferimento all'Esercizio 19.12, si supponga trascurabile la resistenza del mezzo (cioè $\varphi = 0$). Si introducano le coordinate cartesiane nel piano del moto in modo che $\vec{g} = (0,-g)$, ove g è l'intensità della gravità, e si determini esplicitamente il moto in funzione della velocità iniziale (v_1, v_2); posto cioè $p(t) = (x(t), y(t))$, si determinino T e le due funzioni x e y. Si deduca che, se $v_1 \ne 0$, escluso cioè il caso del moto verticale, la traiettoria è un arco di parabola.

Cenno di soluzione. Si deve trovare

$$x(t) = v_1 t, \quad y(t) = v_2 t - \frac{g}{2}\, t^2 \quad \text{e} \quad T = \frac{2v_2}{g}\,.$$

Per la traiettoria si deve trovare

$$y = \frac{v_2}{v_1}\, x - \frac{g}{2}\, \frac{x^2}{v_1^2}\,, \quad 0 \le x < \bar{x}$$

ove $\bar{x}$ è lo zero positivo del secondo membro.

19.14. Con le notazioni degli Esercizi 19.12 e 19.13 e supponendo ora che φ sia una costante positiva k (cioè la resistenza del mezzo è proporzionale alla velocità e diretta nel verso opposto), si determinino esplicitamente le due funzioni x e y in funzione di k. Si deve trovare

$$x(t) = \frac{v_1}{r}\bigl(1 - e^{-rt}\bigr) \quad \text{e} \quad y(t) = \frac{v_2 + \frac{g}{r}}{r}\bigl(1 - e^{-rt}\bigr) - \frac{g}{r}\, t \quad \text{ove } r = k/m\,.$$

Si studi per quanto possibile la traiettoria del moto. Si verifichi che si ritrova il caso della resistenza nulla prendendo i limiti per $k \to 0$ dei valori $x(t)$ e $y(t)$ per t fissato.

20. Successioni e serie di funzioni e di potenze

20.1. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ definita da

$$f_n(x) = n^\alpha e^{-n(x-n)^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Per x fissato si ha $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, e ciò per ogni α. La convergenza uniforme in un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ equivale allora alla condizione

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} n^\alpha e^{-n(x-n)^2} = 0. \tag{1}$$

Sia dapprima $A = \mathbb{R}$. Allora l'estremo superiore si calcola elementarmente (oppure, per chi non vede il carattere elementare della situazione, con gli strumenti del calcolo differenziale). Abbiamo

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} n^\alpha e^{-n(x-n)^2} = n^\alpha \sup_{y\geq 0} e^{-y} = n^\alpha.$$

Si ha pertanto convergenza uniforme in $\mathbb{R}$ se e solo se $\alpha < 0$. Vediamo ora se è possibile dare una condizione semplice sull'insieme A che sia sufficiente per la convergenza uniforme in A. Per questo osserviamo che l'estremo superiore calcolato sopra è un massimo, raggiunto nel punto $x = n$. Siccome il punto di massimo diverge a $+\infty$ per $n \to \infty$ e le funzioni f_n sono tutte legate alla stessa gaussiana, che è infinitesima a $-\infty$, si può sperare di ottenere qualcosa nel caso in cui A sia limitato superiormente (il punto di massimo si allontana da A in questo caso). Non è restrittivo supporre $A = (-\infty, M]$ per un certo $M \in \mathbb{R}$. Siccome $f_n'(x) > 0$ per $x < n$ e $f'(x) < 0$ per $x > n$, se $n > M$ la funzione f_n cresce in A e abbiamo

$$\sup_{x\in A} f_n(x) = f_n(M) = n^\alpha e^{-n(M-n)^2} \quad \text{da cui} \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} f_n(x) = 0$$

per ogni α e concludiamo che la convergenza è uniforme in A per ogni α.

20.2. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ definita da

$$f_n(x) = \Bigl(x^2 + \frac{1}{n}\Bigr)^{1/3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. Il limite puntuale è la funzione $x \mapsto f(x) = |x|^{2/3}$, $x \in \mathbb{R}$, e un grafico approssimativo di f_n suggerisce che la convergenza è uniforme. Verifichiamo calcolando l'estremo superiore della funzione $\varphi = |f_n - f| = f_n - f$. Basta ragionare in $[0, +\infty)$. Si ha per $x > 0$

$$\varphi'(x) = \frac{2x}{3}\Bigl(x^2 + \frac{1}{n}\Bigr)^{-2/3} - \frac{2}{3}\, x^{-1/3} = \frac{2x}{3}\Bigl[\Bigl(x^2 + \frac{1}{n}\Bigr)^{-2/3} - (x^2)^{-2/3}\Bigr] < 0.$$

Dunque $\sup\varphi = \max\varphi = \varphi(0) = n^{-1/3}$ e la convergenza è uniforme.

20.3. Calcolare il limite puntuale della successione $\{f_n\}_{n\geq 1}$ definita da

$$f_n(x) = \Bigl(x^2 + \frac{x^4}{n}\Bigr)^{1/3}, \quad x \in \mathbb{R}$$

e verificare che la convergenza non è uniforme. Dimostrare che, invece, la convergenza è uniforme in $[-M, M]$ per ogni $M > 0$, di conseguenza in ogni limitato.

Suggerimenti: per la non uniformità della convergenza usare il comportamento all'infinito; per l'uniformità sui limitati sommare e sottrarre la funzione dell'Esercizio 20.2.

20.4. Studiare la convergenza uniforme (in tutto $\mathbb{R}$ o su sottoinsiemi di qualche tipo, ad esempio limitati) delle successioni di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, tutte puntualmente infinitesime, definite dalle formule scritte di volta in volta.

$$\frac{1}{x^2+n^2}\,, \quad \frac{nx}{x^2+n^2}\,, \quad \frac{x^2}{x^2+n^2}\,, \quad \frac{n^2}{(x-n)^4+n^2}\,, \quad 1+\tanh(x-n).$$

20.5. Per ciascuna delle serie elencate di variabile reale determinare un valore di k, cercandolo il più grande possibile compatibilmente con gli strumenti a disposizione, tale che la somma rappresenti una funzione di classe C^k in tutto $\mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n^2x}{n^7}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sin nx\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}5^{-n}\sin 2^nx\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\arctan nx\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp(-nx^2).$$

Soluzione relativa alla prima serie. Cerchiamo di usare la derivazione per serie, iterata per quanto possibile, controllando le convergenze uniformi che interessano con il Criterio di Weierstrass. Detto $f_n(x)$ il termine generale della serie, abbiamo per ogni x e per ogni n

$$|f_n(x)|\le\frac{1}{n^7}\,, \quad |f_n'(x)|=\frac{1}{n^5}\,|\cos n^2x|\le\frac{1}{n^5}\,, \quad |f_n''(x)|=\frac{1}{n^3}\,|\sin n^2x|\le\frac{1}{n^3}$$

ed è inutile proseguire dato che già con le derivate terze stimeremmo solo con $1/n$. Concludiamo che riusciamo ad applicare il Criterio di Weierstrass alla serie data e quelle delle derivate prime e seconde, ma non a quelle delle derivate di ordine ancora superiore. Dunque la serie data rappresenta una funzione di classe C^2 e non abbiamo elementi per assicurare o negare una regolarità superiore.

20.6. Dimostrare che ciascuna delle serie di variabile reale $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,e^{-nx}$, $\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}\cos n^2x$ e $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx^2}\sin nx$ rappresenta una funzione di classe C^∞ nell'intervallo aperto $(0,+\infty)$. Si consiglia di considerare l'intervallo $[\varepsilon,+\infty)$ per ogni $\varepsilon>0$.

20.7. Trovare il raggio di convergenza di ciascuna delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{\ln n}\,, \quad \sum_{n=2}^{\infty}2^nz^{2n}\ln n\,, \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{\ln n!}\,.$$

Soluzione per la seconda serie. Studiamo la convergenza assoluta per $z\neq 0$ usando il criterio del rapporto. Abbiamo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}|z|^{2n+2}\ln(n+1)}{2^n|z|^{2n}\ln n}=2|z|^2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=2|z|^2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n+\ln(1+n^{-1})}{\ln n}=2|z|^2$$

e il limite è <1 o >1 a seconda che $|z|$ sia $<2^{-1/2}$ o $>2^{-1/2}$. Dunque la serie converge assolutamente se $|z|<2^{-1/2}$ e non converge assolutamente se $|z|>2^{-1/2}$. Ciò basta per concludere che il raggio di convergenza è $2^{-1/2}$.

20.8. Trovare il raggio di convergenza di ciascuna delle seguenti serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^nz^n}{(n!)^2}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n^2}}{n!}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+2)!z^n}{(n!)^2}\,.$$

20.9. Considerata ciascuna delle serie di potenze di variabile reale elencate, esprimerne la somma, almeno all'interno dell'intervallo di convergenza, in termini di funzioni elementari per quanto possibile. Vedere, se possibile, che accade agli estremi (se finiti).

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)!}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}\,, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)^2}\,.$$

Suggerimento per la seconda serie: distinguere i casi $x \ge 0$ e $x < 0$.

Soluzione relativa alla terza serie. Il raggio di convergenza è 1 e la serie converge uniformemente in $[-1,1]$ per il Criterio di Weierstrass. In particolare la somma, che denotiamo con f, è una funzione continua in $[-1,1]$. Per $|x| < 1$ si ha

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{1}{x} \ln(1-x).$$

Essendo $f(0) = 0$ concludiamo che

$$f(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt \quad \text{per } |x| < 1.$$

Usando la continuità di f in ± 1 deduciamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\lim_{x \to 1^-} \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\lim_{x \to -1^+} \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$$

$$= \lim_{x \to -1^+} \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt = \int_{-1}^0 \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$$

in quanto l'ultima funzione integranda è effettivamente integrabile e la funzione integrale è continua (mentre la situazione è diversa per quanto riguarda il limite per $x \to 1^-$).

20.10. Si dimostri che ciascuna delle formule elencate rappresenta un funzione di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in $\mathbb{R}$ che si prolunga a una funzione definita e di classe C^∞ in tutto $\mathbb{R}$. Detta f tale funzione, si calcoli una derivata in 0 di ordine elevato.

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\,, \quad \frac{1-\cos x^2}{x^4}\,, \quad \frac{\sinh x^2}{x^2}\,, \quad \frac{1-\exp(-x^2)}{x}\,.$$

Soluzione relativa alla prima formula. La formula rappresenta una funzione di classe C^∞ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e vediamo la prolungabilità considerando un intorno opportuno di 0. Abbiamo

$$\ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^n}{n} \quad \text{per } |t| < 1 \text{, da cui} \quad \ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n} \quad \text{per } |x| < 1.$$

Deduciamo che per $0 < |x| < 1$ vale la formula

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-2}}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k+1}\,.$$

Il prolungamento a $(-1,1)$ cercato è allora dato dall'ultima serie, in quanto essa rappresenta una funzione di classe C^∞ in $(-1,1)$. Per quanto riguarda il calcolo di una derivata successiva, consideriamo ad esempio quella di ordine 10. Abbiamo che $f^{(10)}(0)/10!$ è il coefficiente di x^{10} nella serie di Taylor. Ma la serie di potenze che rappresenta f deve coincidere con la serie di Taylor, per cui il coefficiente in questione è quello di x^{10} nella serie trovata, coefficiente che allora si ottiene prendendo $k = 5$. Abbiamo pertanto $f^{(10)}(0)/10! = -1/6$, da cui $f^{(10)}(0) = -10!/6$.

21. Forme differenziali lineari

21.1. Sia ω la forma differenziale in $\mathbb{R}^2$ data dalla formula

$$\omega(x,y) = (6xy + 4x + 4y^3)\,dx + (3x^2 + 15y^2 + 12xy^2)\,dy.$$

Verificarne l'esattezza cercandone le primitive in base alla definizione. Calcolare poi, senza utilizzare l'esattezza, l'integrale di ω su qualche cammino e toccare con mano la concordanza con la teoria generale. Si consigliano ad esempio: $i)$ il segmento avente primo estremo nell'origine e secondo estremo nel generico punto (x,y); $ii)$ la poligonale di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$; $iii)$ la circonferenza unitaria percorsa una volta in senso antiorario.

Soluzione parziale. Una primitiva F, necessariamente di classe C^1 dato che ω è continua, deve verificare $D_1 F = \omega_1$ e $D_2 F = \omega_2$. Imponendo la prima condizione otteniamo

$$F(x,y) = 3x^2 y + 2x^2 + 4xy^3 + \varphi(y)$$

ove $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è a priori arbitraria. Tuttavia φ deve essere di classe C^1 dato che tale è F. La seconda condizione diventa allora

$$3x^2 + 12xy^2 + \varphi'(y) = 3x^2 + 15y^2 + 12xy^2 \quad \text{cioè} \quad \varphi'(y) = 15y^2$$

ed è pertanto soddisfatta se e solo se prendiamo $\varphi(y) = 5y^3 + \text{costante}$. Dunque ω è esatta e le sue primitive sono tutte e sole quelle date dalla formula

$$F(x,y) = 3x^2 y + 2x^2 + 4xy^3 + 5y^3 + c \quad \text{con } c \text{ costante arbitraria.}$$

La primitiva nulla nell'origine si ottiene scegliendo $c = 0$. Calcoliamo l'integrale sul cammino, che chiamiamo P, dato da $ii)$. Si ha

$$\int_P \omega = \int_{[(0,0),(1,0)]} \omega + \int_{[(1,0),(1,1)]} \omega = \int_0^1 4x\,dx + \int_0^1 (3 + 15y^2 + 12y^2)\,dy$$
$$= \Big[2x^2\Big]_0^1 + \Big[3y + 9y^3\Big]_0^1 = 2 + 12 = 14.$$

Notiamo che 14 è anche, come deve essere, il valore in $(1,1)$ della primitiva nulla in $(0,0)$. Questa stessa primitiva si deve poi ottenere anche calcolando l'integrale sul cammino $i)$. Controlliamo anche questo fatto. La parametrizzazione standard del segmento in questione è data da $t \mapsto (tx, ty)$, $t \in [0,1]$. Allora l'integrale da calcolare vale

$$\int_0^1 \langle \omega(tx,ty), (x,y) \rangle\,dt = \int_0^1 \big(x\,\omega_1(tx,ty) + y\,\omega_2(tx,ty) \big)\,dt$$
$$= \int_0^1 \big(x(6xyt^2 + 4xt + 4y^3t^3) + y(3x^2t^2 + 15y^2t^2 + 12xy^2t^3) \big)\,dt$$
$$= \int_0^1 (9x^2yt^3 + 4x^2t + 16xy^3t^3 + 15y^3t^2)\,dt = 3x^2y + 2x^2 + 4xy^3 + 5y^3.$$

21.2. Decidere dell'esattezza della forma differenziale definita dalla formula

$$\omega(x,y) = \Big(\frac{1}{4} \ln^2(x^2+y^2) - \arctan\frac{y}{x} \Big) dx - \ln(x^2+y^2) \arctan\frac{y}{x}\,dy, \quad (x,y) \in (0,+\infty)^2 \setminus \{(1,1)\}.$$

Soluzione. L'esclusione del punto $(1,1)$ è artificiosa e la stessa formula definisce una forma differenziale in tutto l'aperto $(0,+\infty)^2$, che è sempliemente connesso (al contrario dell'aperto originario). Dunque, siccome la forma in esame è certamente di classe C^1, l'esattezza equivale alla chiusura e quest'ultima si verifica banalmente. Segue l'esattezza della forma ω originaria.

21.3. Dimostrare che la forma differenziale data da

$$\omega(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

è esatta e calcolarne una primitiva.

Suggerimento: il campo vettoriale associato è radiale.

21.4. Studiare l'esattezza della forma differenziale

$$\frac{y^2-3x^2}{(x^2+y^2)^3}\,dx - \frac{4xy}{(x^2+y^2)^3}\,dy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Suggerimento: verificare che è chiusa, dopo di che l'esattezza equivale al fatto che è nullo l'integrale lungo un cammino che ha indice di avvolgimento 1 intorno all'origine.

21.5. Dimostrare l'esattezza e calcolare una primitiva della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{e^x \cos y - 1}{e^{2x} - 2e^x \cos y + 1}\,dx + \frac{e^x \sin y}{e^{2x} - 2e^x \cos y + 1}\,dy, \quad (x,y) \in \Omega$$

ove Ω è l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ che non annullano i denominatori.

Soluzione. Riscritto il denominatore come $(e^{2x}-2e^x+1)+e^x(1-\cos y) = (e^x-1)^2+e^x(1-\cos y)$, cioè come somma di due addendi non negativi, risulta chiaro che il complementare di Ω è l'insieme dei punti $P_n = (0, 2n\pi)$ con n intero. Un calcolo laborioso ma privo di difficoltà mostra che la forma è chiusa. La sua esattezza equivale allora al fatto seguente: per ogni intero n, è nullo l'integrale di ω su un circuito C_n di Ω che ha indice di avvolgimento 1 intorno a P_n e indice di avvolgimento 0 intorno a ogni altro P_m. Conviene scegliere C_n in modo oculato: prendiamo la poligonale di vertici $(-1, y_n^-)$, $(1, y_n^-)$, $(1, y_n^+)$, $(-1, y_n^+)$, $(-1, y_n^-)$, ove abbiamo posto $y_n^\pm = 2n\pi \pm (\pi/2)$. Denotati con $I_1, \ldots, I_4$ gli integrali sui vari segmenti, abbiamo

$$I_1 = \int_{[(-1,y_n^-),(1,y_n^-)]} \omega = \int_{-1}^{1} \frac{-1}{e^{2x}+1}\,dx$$
$$I_3 = \int_{[(1,y_n^+),(-1,y_n^+)]} \omega = -\int_{[(-1,y_n^+),(1,y_n^+)]} \omega = -\int_{-1}^{1} \frac{-1}{e^{2x}+1}\,dx$$

per cui $I_1 + I_3 = 0$. Inoltre

$$I_2 = \int_{[(1,y_n^-),(1,y_n^+)]} \omega = \int_{y_n^-}^{y_n^+} \frac{e \sin y}{e^2 - 2e\cos y + 1}\,dy$$
$$I_4 = \int_{[(-1,y_n^+),(-1,y_n^-)]} \omega = -\int_{[(-1,y_n^-),(-1,y_n^+)]} \omega$$
$$= -\int_{y_n^-}^{y_n^+} \frac{e^{-1}\sin y}{e^{-2} - 2e^{-1}\cos y + 1}\,dy = -\int_{y_n^-}^{y_n^+} \frac{e \sin y}{1 - 2e\cos y + e^2}\,dy$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo moltiplicato per e^2 numeratore e denominatore. Dunque si ha anche $I_2 + I_4 = 0$. Concludiamo che l'integrale su C_n è nullo e che la forma è esatta. Per calcolare una primitiva, ad esempio quella nulla in $(1,0)$, che chiamiamo F, ragioniamo dapprima nell'aperto convesso $\Omega' = (0,+\infty) \times \mathbb{R}$. Per $(x,y) \in \Omega'$ abbiamo

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_{[(1,0),(x,0),(x,y)]} \omega = \int_1^x \frac{e^t - 1}{e^{2t} - 2e^t + 1}\, dt + \int_0^y \frac{e^x \sin t}{e^{2x} - 2e^x \cos t + 1}\, dt \\
&= \int_1^x \frac{dt}{e^t - 1} + \frac{1}{2} \Bigl[\ln(e^{2x} - 2e^x \cos t + 1) \Bigr]_{t=0}^{t=y} \\
&= \int_1^x \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}\, dt + \frac{1}{2} \Bigl[\ln(e^{2x} - 2e^x \cos t + 1) \Bigr]_{t=0}^{t=y} \\
&= \Bigl[\ln(1 - e^{-t}) \Bigr]_{t=1}^{t=x} + \frac{1}{2} \Bigl[\ln(e^{2x} - 2e^x \cos t + 1) \Bigr]_{t=0}^{t=y} \\
&= \ln(1 - e^{-x}) - \ln(1 - e^{-1}) + \frac{1}{2} \ln(e^{2x} - 2e^x \cos y + 1) - \ln(e^x - 1) \\
&= \ln\bigl(e^{-x}(e^x - 1)\bigr) - \ln(1 - e^{-1}) + \frac{1}{2} \ln(e^{2x} - 2e^x \cos y + 1) - \ln(e^x - 1) \\
&= -x - \ln(1 - e^{-1}) + \frac{1}{2} \ln(e^{2x} - 2e^x \cos y + 1).
\end{aligned}$$

Ma la formula trovata definisce il valore $F(x,y)$ in tutto Ω e il calcolo diretto mostra che $dF = \omega$ in tutto Ω. Notiamo però che, in realtà, tale calcolo è inutile: l'analogo calcolo diretto in Ω' deve portare a $dF = \omega$ in Ω'; ma è chiaro che il calcolo in Ω' e quello in Ω sono dello stesso tipo.

21.6. Siano Ω' un aperto di $\mathbb{R}^2$ e Ω'' un aperto di $\mathbb{R}^3$ e siano $\omega' : \Omega' \to (\mathbb{R}^2)^*$ e $\omega'' : \Omega'' \to (\mathbb{R}^3)^*$ due forme differenziali. Si introduca la forma differenziale $\omega : \Omega' \times \Omega'' \to (\mathbb{R}^5)^*$ mediante

$$\omega(x_1,x_2,y_1,y_2,y_3) = \sum_{i=1}^2 \omega'_i(x_1,x_2)\, dx_i + \sum_{i=1}^3 \omega''_i(y_1,y_2,y_3)\, dy_i\,, \quad (x_1,x_2) \in \Omega',\ (y_1,y_2,y_3) \in \Omega''$$

ove naturalmente ora $dx_1, \dots, dy_3$ denotano gli elementi della base canonica di $(\mathbb{R}^5)^*$. Si dimostri che ω è esatta se e solo se tali sono ω' e ω''. Nel caso C^1 si dimostri l'analoga affermazione riguardante la chiusura delle forme in questione. Si generalizzi il tutto al caso in cui i due spazi $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ sono sostituiti da spazi euclidei di dimensioni qualunque n' e n''.

21.7. Siano I un intervallo aperto e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Dedurre dall'Esercizio 21.6 che, se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^2$, una forma differenziale del tipo

$$\omega_1(x,y)\, dx + \omega_2(x,y)\, dy + f(z)\, dz, \quad (x,y,z) \in \Omega \times I$$

è esatta se e solo se è esatta la forma differenziale

$$\omega_1(x,y)\, dx + \omega_2(x,y)\, dy, \quad (x,y) \in \Omega.$$

21.8. Dimostrare che ciascuna delle forme differenziali

$$\frac{x}{x^2 + 2y^2}\, dx + \frac{2y}{x^2 + 2y^2}\, dy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$$\frac{x}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}\, dx + \frac{2y}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}\, dy + \frac{3z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2}\, dz, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y^2 - 1}}\, dx + \frac{2y}{\sqrt{x^2 + 2y^2 - 1}}\, dy, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + 2y^2 > 1$$

è esatta e calcolarne una primitiva, sia per la via più breve sia con tutte le tecniche disponibili.