Magia della costante di Nepero

Consideriamo la generica funzione esponenziale

$$y = a^x \qquad (x \text{ reale}) \tag{1}$$

ove a è reale e verifica $a > 0$ e $a \neq 1$, e conduciamo la *retta* $\mathcal{T}_a$ *tangente al suo grafico* $\mathcal{G}_a$ *passante per l'origine*. A tale scopo, conviene considerare la generica tangente a $\mathcal{G}_a$ e imporre che essa passi per l'origine.

Sia dunque z reale qualunque. Allora il punto di $\mathcal{G}_a$ in cui consideriamo la tangenza è $P_a = (z, a^z)$ e, come l'Analisi Matematica insegna, la pendenza della tangente a $\mathcal{G}_a$ in P_a vale $a^z \ln a$. Dunque tale tangente ha equazione

$$y = a^z + a^z \ln a\,(x - z). \tag{2}$$

Imponendo che essa passi per l'origine otteniamo la condizione

$$a^z - z a^z \ln a = 0 \qquad \text{cioè} \qquad z \ln a = 1. \tag{3}$$

La retta $\mathcal{T}_a$ si ottiene dunque scrivendo la (2) con il valore z dato dalla (3), ma a noi interessa solo l'ordinata del punto di contatto. Questa vale

$$a^z = e^{z \ln a} = e^1 = e.$$

Concludiamo pertanto che, se per ogni a reale positivo con $a \neq 1$, consideriamo la tangente $\mathcal{T}_a$ al grafico $\mathcal{G}_a$ della curva esponenziale (1) che passa per l'origine, abbiamo che

tutti i punti di contatto sono allineati sulla retta di equazione $y = e$.

Questa è solo una curiosità, ma non è male averla osservata.