Cenno su distribuzioni e spazi di Sobolev

Gianni Gilardi

In queste pagine diamo alcune nozioni sulle distribuzioni, ovviamente ben lontani dal pretendere di essere esaustivi. Sebbene questi nuovi oggetti svolgano un ruolo importante in varie questioni, centriamo la loro introduzione sull'opportunità di adeguare il concetto di derivata al caso di funzioni di tipo L^p. Terminiamo con un cenno sugli spazi di Sobolev.

1. La definizione di distribuzione

Partiamo dalla nozione di derivata di una funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in un punto $x \in \mathbb{R}$:

$$u'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \,. \tag{1.1}$$

Supponiamo ora che la funzione u sia, ad esempio, differenziabile ovunque e immaginiamo di cambiare la definizione del valore puntuale $u(x)$ in un punto x_0, trovando una nuova funzione v. Ebbene, certamente v ha una discontinuità in x_0, così che la definizione (1.1) applicata a v con $x = x_0$ porterebbe a limiti unilateri infiniti. Se poi cambiassimo la definizione di u in tutti i razionali ponendo $v(x) = u(x)+1$ in ogni x razionale, troveremmo una funzione v discontinua in tutti i punti e dunque il valore $v'(x)$ non sarebbe mai definito. Dunque la (1.1) non si presta a essere utilizzata per classi di equivalenza di funzioni, strumento invece abituale nel contesto dell'integrazione secondo Lebesgue.

Tuttavia, se ci si limitasse a questo ambito, ci sarebbe una scappatoia. Ad esempio, nel caso di una funzione $f \in L^2(\mathbb{R})$, scelto un suo rappresentante u, si può costruire la funzione $r_h u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $r_h u : x \mapsto \bigl(u(x+h) - u(x)\bigr)/h$. Poi si osserva che $r_h u$ è misurabile e di quadrato sommabile e che, se v è un altro rappresentante dello stesso elemento f, cioè se $v(x) = u(x)$ q.o., allora le due funzioni $r_h u$ e $r_h v$ rappresentano lo stesso elemento di $L^2(\mathbb{R})$, elemento che abbiamo il diritto di chiamare $r_h f$. Infine ci si chiede se $r_h f$ possiede limite in $L^2(\mathbb{R})$ per $h \to 0$. Tale limite in generale non esisterà, ma, nel caso in cui esso esista, lo si può assume come definizione di f'. In tal modo la derivata f' è definita globalmente anziché attraverso una definizione puntuale. Un discorso analogo si potrebbe fare per le derivate parziali o direzionali partendo da un elemento $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$: si costruiscono i rapporti incrementali nella direzione scelta, si osserva che essi individuano elementi di $L^2(\mathbb{R}^d)$ (cioè che al cambiare del rappresentante di f non cambia la classe del rapporto incrementale) e si cerca di farne limiti nel senso della topologia di $L^2(\mathbb{R}^d)$. Ma quanto si è detto per L^2 si può ripetere per L^p con $1 \leq p \leq +\infty$ e può accadere un fatto spiacevole: ad esempio può essere che $f \in L^p(\mathbb{R})$ per ogni p ma che il rapporto incrementale $r_h f$ abbia limite il L^p solo per alcuni valori di p. In tal caso la definizione di derivata di f dipenderebbe non solo da f ma anche dal valore di p che si sceglie: in alcuni casi la derivata esisterebbe mentre in altri no. Tuttavia la derivata sarebbe la stessa per tutti i p per cui esiste, per cui l'ostacolo si aggira: la derivata è il limite del rapporto incrementale nel senso di L^p per i p per cui esso esiste. Ma torniamo al caso $p = 2$. La cosa diventa più complicata se $f \in L^2(\Omega)$, ove Ω è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^d$, ad esempio un aperto, e ciò è già chiaro nel caso $d = 1$ e $\Omega = (0,1)$. Se $u : (0,1) \to \mathbb{R}$

è il rappresentante considerato, la definizione di $(r_h u)(x)$ prende senso solo se entrambi i punti x e $x+h$ appartengono a $(0,1)$. Se h è positivo e piccolo, ciò avviene se e solo se $x \in (0, 1-h)$. Dunque si ottengono elementi dello spazio $L^2(0,1-h)$, che dipende da h. Anche questo inconveniente poi si aggira, ma è chiaro che il formalismo si complica.

Conviene allora procedere diversamente. Anziché cercare di imitare la (1.1) a livello della definizione, vediamo a quali vantaggi porta la nozione di derivata del caso di funzioni regolari e cerchiamo di estendere questi anziché la definizione. Ad esempio la formula

$$D_r f(x) = \sum_{i=1}^{d} D_i f(x)\, r_i \tag{1.2}$$

ove $r = (r_1, \ldots, r_d)$ è un versore e D_r e D_i denotano la derivazione nella direzione r e, rispettivamente, la derivata parziale i-esima, è vera per tutte le funzioni di classe C^1 (mentre la mera esistenza dei due membri non garantisce la validità della formula, come mostrano esempi semplici). Se poi f è di classe C^2, allora vale il Teorema di Schwarz

$$D_i D_j f(x) = D_j D_i f(x) \quad \text{per } i,j = 1, \ldots, d \tag{1.3}$$

in ogni punto x (mentre, senza ipotesi di regolarità, potrebbe ad esempio esistere uno solo dei due membri della (1.3) e non l'altro, oppure potrebbero esistere entrambi i membri e fornire due valori diversi). Infine ricordiamo la formula di integrazione per parti, che è quella che svolgerà il ruolo più importante. La richiamiamo nel caso di funzioni di più variabili partendo dal Teorema della divergenza.

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ limitato e regolare e sia $\mathbf{w} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1. Posto allora $\Gamma = \partial\Omega$, vale la formula

$$\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{w}\, dx = \int_\Gamma \mathbf{w} \cdot \nu\, dS \tag{1.4}$$

ove $\nu : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ è la *normale esterna*, cioè la funzione definita dalle condizioni, da richiedere in ogni $x \in \Gamma$: $\nu(x)$ è normale a Γ in x, $|\nu(x)| = 1$ e $x + t\nu(x) \notin \Omega$ per $t > 0$ abbastanza piccolo. Questa definizione è sensata se Ω è, appunto, un aperto regolare. Nella (1.4) il secondo membro è l'integrale "di superficie", generalizzazione dell'usuale integrale di superficie del caso $d = 3$. Naturalmente, se $d = 2$, esso è l'integrale di linea. Per accettare anche il caso $d = 1$ e $\Omega = (a,b)$, dobbiamo convenire che dS sia la misura che conta su Γ, che ora è costituito dai due punti a e b, per cui il secondo membro diventa $w(a)\nu(a) + w(b)\nu(b)$. Siccome $\nu(a) = -1$ e $\nu(b) = 1$, la (1.4) diventa la formula fondamentale del calcolo. Scegliamo ora $\mathbf{w} = \mathbf{u}\, v$, ove $\mathbf{u} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ e $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ sono di classe C^1. Essendo $\operatorname{div}(\mathbf{u}\, v) = (\operatorname{div} \mathbf{u}) v + \mathbf{u} \cdot \nabla v$, abbiamo

$$\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla v\, dx = -\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u}) v\, dx + \int_\Gamma v \mathbf{u} \cdot \nu\, dS. \tag{1.5}$$

Questa è *la formula di integrazione per parti* per antonomasia. Altre formule, pure dette di integrazione per parti, si ottengono specializzando le scelte. Ad esempio, se $\mathbf{r}$ è un versore costante e $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ è una funzione scalare di classe C^1, la scelta $\mathbf{u} = u\mathbf{r}$ è lecita. Essendo $\mathbf{r} \cdot \nabla v = D_r v$ e $\operatorname{div}(u\mathbf{r}) = \nabla u \cdot \mathbf{r} + u \operatorname{div} \mathbf{r} = D_r u$, portando gli integrali da un membro all'altro, abbiamo

$$\int_\Omega (D_r u)\, v\, dx = -\int_\Omega u\, D_r v\, dx + \int_\Gamma uv\, \mathbf{r} \cdot \nu\, dS. \tag{1.6}$$

In particolare

$$\int_\Omega (D_r u)\, v\, dx = -\int_\Omega u\, D_r v\, dx \quad \text{se } v|_\Gamma = 0 . \tag{1.7}$$

Ebbene, si dimostra che, se u è di classe C^1 come detto, la funzione $D_r u$ è l'unica funzione continua che messa al posto di $D_r u$ nel primo membro della (1.7) riesce a rendere vera la formula per ogni v di classe C^1 nulla su Γ, cioè l'unica soluzione del problema: trovare una funzione $z : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua tale che

$$\int_\Omega z\, v\, dx = -\int_\Omega u\, D_r v\, dx \quad \text{per ogni } v \text{ di classe } C^1 \text{ tale che } v|_\Gamma = 0 . \tag{1.8}$$

Ora osserviamo che, per dar senso al problema espresso dalla (1.8), la regolarità di u e di z è del tutto superflua. Ad esempio si potrebbe imporre a u e a z di appartenere a $L^1(\Omega)$, dato che ciò è quanto serve per dar senso agli integrali. Ebbene, si dimostra che, se $u \in L^1(\Omega)$, il problema (1.8) ha al massimo una soluzione $z \in L^1(\Omega)$. Quando tale soluzione esiste, la si può ragionevolmente chiamare derivata di u nella direzione $\mathbf{r}$.

La teoria delle distribuzioni riesce a *risolvere comunque* il problema dell'esistenza della derivata: naturalmente lo spazio $L^1(\Omega)$ deve essere opportunamente ingrandito e il senso degli integrali opportunamente generalizzato. In particolare si potrà parlare sempre di derivate successive. In vista di ciò vediamo come diventa l'iterazione della (1.8) nel caso di derivate di ordine superiore. Precisamente scriviamo ciò che si deduce dalla (1.7) nel caso di funzioni u e v di classe C^n e di n versori $\mathbf{r}^j$, $j = 1, \ldots, n$. Si ha facilmente

$$\int_\Omega (D_{r^n} \ldots D_{r^1} u) v\, dx = (-1)^n \int_\Omega u (D_{r^1} \ldots D_{r^n} v)\, dx$$

purché v e alcune sue derivate siano nulle su Γ. La formula trovata è senz'altro vera se v si annulla in un intorno di Γ, cioè è nulla fuori di un compatto $K \subset \Omega$. Il problema corrispondente all'iterazione della (1.8) si pone allora nei termini seguenti: data $u \in L^1(\Omega)$ e dati i versori $\mathbf{r}^j$, $j = 1, \ldots, n$, trovare $z \in L^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega zv\, dx = (-1)^n \int_\Omega u (D_{r^1} \ldots D_{r^n} v)\, dx$$

per tutte le v di classe C^n nulle ciascuna fuori di un compatto $K \subset \Omega$ (che dunque può variare al variare di v). Notiamo che, con questa richiesta sulle funzioni v, l'ipotesi che Ω sia limitato e regolare può essere abbandonata: infatti il prodotto di una funzione continua nulla fuori di un compatto (e tale è v o una delle derivate che intervengono) per una funzione integrabile è ancora integrabile; anzi è sufficiente che la funzione che moltiplica la funzione continua sia integrabile su quel compatto, e ciò avviene se essa è integrabile in ogni compatto $K \subset \Omega$. Se poi vogliamo restringerci alle stesse v contemporaneamente per le derivate di ogni ordine, occorrerà prendere funzioni v di classe C^∞.

Definizione 1.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Con $L^1_{loc}(\Omega)$ denotiamo lo spazio costituito dalle (classi di) funzioni misurabili che sono integrabili in ogni compatto $K \subset \Omega$. Tali funzioni sono dette "localmente sommabili".* □

Definizione 1.2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Con $C^\infty_c(\Omega)$ denotiamo il sottospazio di $C^\infty(\Omega)$ costituito dalle funzioni v che verificano la condizione: esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $v = 0$ in $\Omega \setminus K$. Tali funzioni sono dette "a supporto compatto".* □

Osservazione 1.3. Gli spazi $L^1_{loc}(\Omega)$ e $C^\infty_c(\Omega)$ sono, per il momento, solo spazi vettoriali. Più avanti, anche senza introdurre topologie, parleremo almeno di convergenza. Notiamo poi che $L^1_{loc}(\Omega)$ contiene $L^p(\Omega)$ per ogni $p \in [1, +\infty]$. Infatti, se $v \in L^p(\Omega)$ e $K \subset \Omega$ è compatto, allora $v|_K \in L^p(K)$ e K ha misura finita, per cui $v|_K \in L^1(K)$. □

Riformuliamo allora il problema della derivata successiva come segue: dati la funzione $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e n versori $\mathbf{r}^j$, $j = 1, \dots, n$, trovare $z \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega zv\,dx = (-1)^n \int_\Omega u(D_{r^1} \dots D_{r^n} v)\,dx \quad \text{per ogni } v \in C^\infty_c(\Omega). \tag{1.9}$$

Sebbene la classe delle v ammesse sia più ristretta di prima, resta vero che tale problema ha al massimo una soluzione. Quando questa esiste, essa viene chiamata *derivata di ordine n nelle direzioni $\mathbf{r}^1, \dots, \mathbf{r}^n$ nel senso delle distribuzioni* e denotata con il simbolo consueto. Ciò non produce confusione quando u è una funzione di classe C^n: la derivata classica, infatti, svolge perfettamente il ruolo desiderato.

Come si è accennato sopra, la teoria delle distribuzioni permette di parlare *comunque* di derivate, naturalmente in un senso generalizzato. Tale senso, tuttavia, viene a coincidere con quello appena definito quando il problema della derivata di ordine n di u posto sopra ha una soluzione $z \in L^1_{loc}(\Omega)$. Ciò si ottiene immergendo $L^1_{loc}(\Omega)$ nello spazio delle distribuzioni che ora definiamo. Di seguito diamo il teorema di immersione.

Definizione 1.4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Una distribuzione (reale) su Ω è un funzionale lineare $f : C^\infty_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ che gode della proprietà seguente: per ogni compatto $K \subset \Omega$ esistono un intero $m \ge 0$ e una costante M tali che*

$$|\langle f, v\rangle| \le M \max_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha v\|_\infty \quad \textit{per ogni } v \in C^\infty_c(\Omega) \textit{ nulla in } \Omega \setminus K. \tag{1.10}$$

Lo spazio delle distribuzioni su Ω è denotato con $\mathcal{D}'(\Omega)$. □

Spieghiamo le notazioni usate nella Definizione 1.4. Il simbolo $\langle f, v\rangle$ denota il valore che il funzionale $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ assume sull'elemento $v \in C^\infty_c(\Omega)$, come di solito si usa nel caso di uno spazio normato e del suo duale, e a questo proposito si veda la nota successiva. Il simbolo α denota un multi-indice, cioè un elemento $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ di $\mathbb{N}^d$, e D^α e $|\alpha|$ sono l'operatore di derivazione parziale e l'ordine di derivazione corrispondenti, vale a dire

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d} \quad \text{e} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i\,.$$

Ad esempio, se $d=3$ e $\alpha=(4,0,2)$, si ha $D^\alpha = D_1^4 D_3^2$ e $|\alpha|=6$. Nella (1.10) il massimo è dunque preso al variare di tutte le derivazioni parziali di ordine $\le m$. Infine il simbolo $\|\cdot\|_\infty$ sta per l'usuale norma del massimo.

Osservazione 1.5. Senza entrare in ulteriori dettagli, diciamo che è possibile introdurre in $C_c^\infty(\Omega)$ una topologia (che però non è indotta da alcuna norma) tale che lo spazio $\mathcal{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni coincida con lo spazio dei funzionali lineari e continui sullo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ munito di questa topologia appunto. Lo spazio vettoriale $C_c^\infty(\Omega)$ così topologizzato viene allora denotato con $\mathcal{D}(\Omega)$. Dunque $\mathcal{D}'(\Omega)$ è proprio lo spazio duale di $\mathcal{D}(\Omega)$. Anche in questa situazione l'applicazione che a ogni coppia $(f,v)\in\mathcal{D}'(\Omega)\times C_c^\infty(\Omega)$ associa $\langle f,v\rangle$ viene detta *prodotto di dualità*, o anche semplicemente *dualità*, fra $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$.

Esempio 1.6. Sia $u\in L^1_{loc}(\Omega)$. Siccome $uv\in L^1(\Omega)$ per ogni $v\in C_c^\infty(\Omega)$, ha senso considerare l'applicazione $f_u : C_c^\infty(\Omega)\to\mathbb{R}$ definita dalla formula

$$f_u : v \mapsto \int_\Omega uv\,dx \quad \text{per } v\in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.11}$$

Ovviamente f_u è lineare e ora verifichiamo che essa è, più precisamente, una distribuzione. Sia $K\subset\Omega$ un compatto. Se $v\in C_c^\infty(\Omega)$ è nulla in $\Omega\setminus K$, allora

$$|\langle f_u,v\rangle| = \left|\int_K uv\,dx\right| \le \|u\|_{1,K}\|v\|_\infty$$

così che possiamo prendere $m=0$ e $M=\|u\|_{1,K}$, la norma di $u|_K$ in $L^1(K)$. □

L'esempio precedente, assolutamente fondamentale, è quello che consente di immergere $L^1_{loc}(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Vale infatti il risultato seguente

Proposizione 1.7. *L'applicazione di $L^1_{loc}(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ definita da $u\mapsto f_u$, ove f_u è data dalla* (1.11)*, è lineare e iniettiva.* □

La linearità è ovvia e non diamo la dimostrazione dell'iniettività. Tuttavia diciamo due parole. Data la linearità, l'iniettività equivale all'implicazione seguente: se l'integrale che compare nella (1.11) è nullo per ogni $v\in C_c^\infty(\Omega)$, allora $u(x)=0$ q.o. Si supponga ora $u\in L^2(\Omega)$. Allora l'iniettività equivale al fatto seguente: se u è ortogonale in $L^2(\Omega)$ a ogni $v\in C_c^\infty(\Omega)$, allora $u=0$. Ciò, a sua volta, equivale alla densità di $C_c^\infty(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ e tale densità, che è vera ma un po' laboriosa da dimostrare, è senz'altro plausibile.

La Proposizione 1.7 consente di identificare $L^1_{loc}(\Omega)$ a un sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$: basta infatti identificare ogni $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ con la sua immagine f_u tramite l'applicazione lineare iniettiva data dalla proposizione stessa. Dunque scriviamo u anziché f_u e abbiamo

$$L^1_{loc}(\Omega)\subset\mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{e} \quad \langle u,v\rangle = \int_\Omega uv\,dx \quad \text{per ogni } u\in L^1_{loc}(\Omega) \text{ e } v\in C_c^\infty(\Omega). \tag{1.12}$$

Chiedersi se una distribuzione $f\in\mathcal{D}'(\Omega)$ appartiene a $L^1_{loc}(\Omega)$ significa dunque chiedersi se esiste $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che, con le notazioni della Proposizione 1.7, risulti $f_u=f$, cioè, con l'identificazione fatta, se esiste $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ che rende vera la formula ottenuta dalla (1.12) leggendo f anziché u nel primo membro.

Notiamo che $L^1_{loc}(\Omega)$ contiene tutti gli spazi funzionali di uso corrente, ad esempio tutti gli spazi $L^p(\Omega)$ come è stato osservato e anche lo spazio $C^0(\Omega)$ delle funzioni continue (la continuità essendo richiesta solo in Ω così che le funzioni considerate hanno comportamento arbitrario vicino al bordo, o all'infinito nel caso non limitato).

Sebbene vogliamo procedere velocemente, non possiamo ignorare la domanda che si pone in modo naturale: lo spazio $L^1_{loc}(\Omega)$ coincide con lo spazio $\mathcal{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni? Ovviamente la risposta è negativa, altrimenti non avremmo introdotto $\mathcal{D}'(\Omega)$. Diamo, a questo proposito, due esempi.

Esempio 1.8. Sia $x_0 \in \Omega$. Allora l'applicazione

$$\delta_{x_0} : v \mapsto v(x_0), \quad v \in C^\infty(\Omega) \tag{1.13}$$

è una distribuzione che non appartiene a $L^1_{loc}(\Omega)$. La linearità è ovvia. Per verificare la (1.10) basta prendere $m = 0$ e $M = 1$ qualunque sia il compatto K. Per verificare che $u \notin L^1_{loc}(\Omega)$ ragioniamo per assurdo. Supponiamo che esista $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che

$$\langle \delta_{x_0}, v \rangle = \int_\Omega uv\,dx, \quad \text{cioè} \quad \int_\Omega uv\,dx = v(x_0), \quad \text{per ogni } v \in C^\infty_c(\Omega). \tag{1.14}$$

Segue $\int_\Omega uv\,dx = 0$ per ogni $v \in C^\infty_c(\Omega)$ nulla in x_0, in particolare per ogni v nulla in un intorno di x_0. Possiamo rileggere questa conclusione nella forma $\int_{\Omega\setminus\{x_0\}} uv\,dx = 0$ per ogni $v \in C^\infty_c(\Omega \setminus \{x_0\})$. Allora, applicando la Proposizione 1.7 all'aperto $\Omega \setminus \{x_0\}$, deduciamo che $u(x) = 0$ q.o. in $\Omega \setminus \{x_0\}$. Segue che $u(x) = 0$ q.o. in Ω. Ma allora la (1.14) diventa falsa per ogni $v \in C^\infty_c(\Omega)$ non nulla in x_0. Siccome una v di questo tipo esiste (anzi lo spazio $C^\infty_c(\Omega)$ è molto ricco), abbiamo un assurdo.

Osservazione 1.9. La distribuzione (1.13) si chiama *massa di Dirac in* x_0. Esempi che si possono trattare analogamente sono dati da integrali di linea e di superficie. Ad esempio, se $\Omega = \mathbb{R}^3$ e Σ è un piano o una superfice sferica, data una funzione $\rho : \Sigma \to \mathbb{R}$ continua (per fissare le idee) e non identicamente nulla, la formula

$$\langle f, v \rangle = \int_\Sigma \rho\, v\, dS \quad \text{per } v \in C^\infty_c(\Omega) \tag{1.15}$$

effettivamente definisce una distribuzione ($m = 0$ e $M = \|\rho\|_{1,K\cap\Sigma}$ nella (1.10)) e questa non appartiene a $L^1_{loc}(\Omega)$ (ragionare come sopra con $\mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ in sostituzione di $\Omega \setminus \{x_0\}$).

Esempio 1.10. Se $\Omega = \mathbb{R}$ poniamo

$$\langle f, v \rangle = 3v'(0) + 5v''(0) \quad \text{per } v \in C^\infty_c(\Omega).$$

Allora f è una distribuzione. La (1.10) vale con $m = 2$ e $M = 3 + 5 = 8$, come si vede subito. Anche in questo caso $f \notin L^1_{loc}(\Omega)$.

Osservazione 1.11. Nell'Esempio 1.10 è stato possibile scegliere m e M indipendenti da K nella (1.10), ma questo fatto è del tutto eccezionale: nel caso dell'Esempio 1.6 c'era dipendenza da K almeno per quanto riguarda M. Per avere un esempio in cui m e M dipendono entrambi da K si può modificare l'Esempio 1.10 facendo intervenire una serie, con ordini di derivazione e coefficienti divergenti, anziché due soli termini.

2. Convergenze

Sia per lo spazio $C_c^\infty(\Omega)$ (o meglio per lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ cui si è brevemente accennato nell'Osservazione 1.5) sia per lo spazio $\mathcal{D}'(\Omega)$ vengono date nozioni di convergenza. Queste sono indotte da opportune topologie. Noi ci limitiamo alle convergenze.

Definizione 2.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Si dice che una successione $\{v_n\}$ di elementi di $C_c^\infty(\Omega)$ converge all'elemento $v \in C_c^\infty(\Omega)$ nel senso di $\mathcal{D}(\Omega)$, e si scrive $v_n \to v$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, quando valgono le due condizioni seguenti:*

$$\begin{aligned} &i) \quad D^\alpha v_n \to D^\alpha v \quad \text{uniformemente per ogni derivazione } D^\alpha \\ &ii) \quad \text{esiste un compatto } K \subset \Omega \text{ tale che } v_n = 0 \text{ in } \Omega \setminus K \text{ per ogni } n. \ \square \end{aligned}$$

Definizione 2.2. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Si dice che una successione $\{u_n\}$ di distribuzioni converge alla distribuzione u nel senso delle distribuzioni, e si scrive $u_n \to u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando vale la condizione*

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v\rangle = \langle u, v\rangle \quad \text{per ogni } v \in C_c^\infty(\Omega). \ \square \tag{2.1}$$

In relazione alla prima delle convergenze introdotte vale un risultato di caratterizzazione delle distribuzioni che lega la richiesta di tipo limitatezza fatta nella Definizione 1.4 alla continuità per successioni di una distribuzione. Si ha dunque una situazione analoga a quella dei funzionali lineari su spazi normati. La dimostrazione non è immediata.

Teorema 2.3. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Un funzionale lineare $u : C_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ è una distribuzione se e solo se vale l'implicazione*

$$\text{da} \quad v_n \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \quad \text{segue} \quad \lim_{n\to\infty} \langle u, v_n\rangle = 0. \ \square$$

La nozione di convergenza nel senso delle distribuzioni è molto importante: essa, infatti, ha conseguenze notevoli, ad esempio per quanto riguarda le derivate che introduciamo nel paragrafo successivo. Ora osserviamo solo qualche fatto.

Proposizione 2.4. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Se $u_n, u \in L^1_{loc}(\Omega)$ verificano $u_n \to u$ in $L^1(K)$ per ogni compatto $K \subset \Omega$ allora $u_n \to u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.* $\square$

Dimostrazione. Sia $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Scelto un compatto $K \subset \Omega$ tale che $v = 0$ in $\Omega \setminus K$, si ha subito (con ovvio significato dei simboli)

$$|\langle u_n, v\rangle - \langle u, v\rangle| = \left| \int_K (u_n - u) v \, dx \right| \le \|u_n - u\|_{1,K} \, \|v\|_\infty$$

così che il primo membro è infinitesimo. $\square$

Osservazione 2.5. In particolare, se si ha a che fare con una successione di funzioni, conviene accertare, se possibile, la validità dell'ipotesi della proposizione. In tal caso si ha automaticamente la convergenza nel senso delle distribuzioni. L'ipotesi della proposizione, detta *convergenza in* $L^1_{loc}(\Omega)$, è senz'altro implicata da una convergenza in $L^p(\Omega)$, e ciò qualunque sia $p \in [1, +\infty]$. Infatti, in tal caso, se $K \subset \Omega$ è un compatto e se $|K|$ denota la sua misura, abbiamo (p' coniugato di p e $1/p' = 0$ se $p = 1$)

$$\|u_n - u\|_{1,K} \le |K|^{1/p'} \|u_n - u\|_{p,K} \le |K|^{1/p'} \|u_n - u\|_{p,\Omega}$$

per la disuguaglianza di Hölder. Invece la convergenza q.o., se non accompagnata da altre proprietà, può essere inefficace o addirittura fuorviante, dato che può accadere il fatto spiacevole seguente: una successione di funzioni può avere *due limiti diversi* nel senso della convergenza q.o. e nel senso delle distribuzioni. Si prendano infatti $\Omega = \mathbb{R}$ e u_n definita dalle formule $u_n(x) = n$ se $x \in (0, 1/n)$ e $u_n(x) = 0$ altrimenti. Allora $u_n \to 0$ q.o. D'altra parte, se $v \in C^\infty_c(\mathbb{R})$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \langle u_n, v\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} u_n v \, dx = \lim_{n\to\infty} n \int_0^{1/n} v \, dx = \lim_{n\to\infty} \fint_0^{1/n} v \, dx = v(0)$$

l'ultimo passaggio in quanto v è continua in 0 (in particolare). Quanto ottenuto dice che, nel senso delle distribuzioni, si ha $u_n \to \delta_0$, la massa di Dirac nell'origine. La conclusione che ne traiamo è la seguente: la convergenza q.o. deve essere utilizzata solo in vista della verifica dell'ipotesi della proposizione, non da sola.

3. Derivate

Ora definiamo la nozione di derivata di una distribuzione, e possiamo già passare in un solo colpo a derivate di ordine qualunque. Rileggiamo la (1.9) usando l'immersione di $L^1_{loc}(\Omega)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$: data $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ (anziché in $L^1(\Omega)$, che sarebbe inutilmente restrittivo) trovare $z \in L^1_{loc}(\Omega)$ tale che

$$\langle z, v\rangle = (-1)^n \langle u, D_{r^1} \ldots D_{r^n} v\rangle \quad \text{per ogni } v \in C^\infty_c(\Omega). \tag{3.1}$$

Ma tale formulazione si presta anche quando u è assegnata in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e z è cercata in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Posto il problema in questi termini, esso *ha sempre soluzione*: infatti è la (3.1) stessa che definisce la soluzione in quanto il funzionale z costruito in tal modo è una distribuzione. Verifichiamo ciò. Esso è ben definito (in quanto, se $v \in C^\infty_c(\Omega)$, ogni derivata di v sta nello stesso spazio) e lineare. Sia ora $K \subset \Omega$ un compatto. Siccome u è per ipotesi una distribuzione, esistono m e M che rendono vera la (1.10) con $f = u$. Si supponga ora $v \in C^\infty_c(\Omega)$ e $v = 0$ in $\Omega \setminus K$. Allora anche la derivata di v che compare nella (3.1) è nulla in $\Omega \setminus K$ per cui essa è ammissibile nella (1.10). Otteniamo

$$|\langle z, v\rangle| = |\langle u, D_{r^1} \ldots D_{r^n} v\rangle| \le M \max_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha D_{r^1} \ldots D_{r^n} v\|_\infty \le M \max_{|\alpha|\le m+n} \|D^\alpha v\|_\infty$$

per cui quanto occorreva controllare vale con l'indice $m + n$ e la costante M. Risulta pertanto giustificata la definizione seguente

Definizione 3.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathbf{r}^j$, $j = 1, \ldots, n$, sono versori di $\mathbb{R}^d$, allora la distribuzione $z \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definita dalla* (3.1) *si chiama derivata di u nelle direzioni $\mathbf{r}^1, \ldots, \mathbf{r}^n$ nel senso delle distribuzioni.* $\square$

Anche in questo caso si usa il simbolo consueto $D_{r^1} \ldots D_{r^n} u$ e la cosa non crea confusione se u è una funzione di classe C^n: in questo caso la derivata ora definita coincide con la derivata classica. Con tale notazione la definizione stessa diventa

$$\langle D_{r^1} \ldots D_{r^n} u, v\rangle = (-1)^n \langle u, D_{r^1} \ldots D_{r^n} v\rangle \quad \text{per ogni } v \in C_c^\infty(\Omega)$$

cioè una “formula di integrazione per parti”. Esplicitiamo il caso della derivata prima:

$$\langle D_r u, v\rangle = -\langle u, D_r v\rangle \quad \text{per ogni } v \in C_c^\infty(\Omega) .$$

Diamo alcuni risultati facili.

Proposizione 3.2. *La formula* (1.2) *vale per le derivate delle distribuzioni.* □

Proposizione 3.3. *La derivata di ordine n della Definizione 3.1 non dipende dall'ordine in cui sono assegnati i versori dati e può essere ottenuta anche applicando le derivazioni del primo ordine D_{r^j} l'una dopo l'altra.* □

Le dimostrazioni di entrambi i risultati sono facili esercizi. In particolare la prima parte della Proposizione 3.3 è ovvia: infatti l'ordine dei versori nel secondo membro della (3.1) è irrilevante in quanto v è di classe C^∞.

Osservazione 3.4. Grazie alla Proposizione 3.3 possiamo adottare il simbolo $D^\alpha u$, nel quale l'ordine di derivazione può essere ambiguo e non è chiaro, anche per le derivate parziali successive delle distribuzioni. □

Almeno nel caso in cui $\Omega = \mathbb{R}^d$, si possono rivedere, a posteriori, le derivate prime come limiti di rapporti incrementali. Per semplicità consideriamo solo il caso $d = 1$, cioè il caso $\Omega = \mathbb{R}$, ma il caso $\Omega = \mathbb{R}^d$ è più complicato solo nelle notazioni. Naturalmente si devono premettere una nozione di convergenza per $h \to 0$ nell'ambito delle distribuzioni e una definizione che adatta al caso $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la nozione di rapporto incrementale $r_h u$. Per quanto riguarda il primo punto basta imitare in modo ovvio la Definizione 2.2. Per estendere la nozione di rapporto incrementale osserviamo che, se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e h è un numero reale non nullo, per ogni $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ si ha (cambiando variabile in uno dei passaggi)

$$\begin{aligned}
\langle r_h u, v\rangle &= \int_{\mathbb{R}} (r_h u) v \, dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \, v(x) \, dx \\
&= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} u(x+h) \, v(x) \, dx - \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} u(x) \, v(x) \, dx \\
&= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} u(y) \, v(y-h) \, dy - \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} u(x) \, v(x) \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} u(x) \, \frac{v(x-h) - v(x)}{-h} \, dx = -\int_{\mathbb{R}} u(r_{-h} v) \, dx = -\langle u, r_{-h} v\rangle.
\end{aligned}$$

Ciò suggerisce, nel caso $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, di prendere come $r_h u$ il funzionale $z : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definito dalla formula $z : v \mapsto -\langle u, r_{-h} v\rangle$, che effettivamente ha senso in quanto anche

$r_{-h}v$ appartiene a $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Controlliamo che z è una distribuzione verificando la Definizione 1.4. Sia $K \subset \mathbb{R}$ un compatto: dobbiamo trovare due costanti m e M che soddisfano la (1.10) ove si legga z al posto di u. Sia $a > 0$ tale che $K \subset [-a, a]$. Siccome u è una distribuzione, esistono m e M' che verificano

$$|\langle u, v\rangle| \le M' \max_{0\le k\le m} \|v^{(k)}\|_\infty \quad \text{per ogni } v \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ nulla in } \mathbb{R} \setminus [-a-1, a+1].$$

Verifichiamo che m e $M = 2M'/|h|$ fanno al caso nostro supponendo senz'altro $|h| \le 1$. Sia infatti $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ nulla in $\mathbb{R} \setminus K$. Allora v è nulla in $\mathbb{R} \setminus [-a, a]$, per cui $r_{-h}v$ è nulla in $\mathbb{R} \setminus [-a-1, a+1]$. Quindi

$$|\langle z, v\rangle| = |\langle u, r_{-h}v\rangle| \le M' \max_{0\le k\le m} \|(r_{-h}v)^{(k)}\|_\infty \le \frac{2M'}{|h|} \max_{0\le k\le m} \|v^{(k)}\|_\infty .$$

Resta pertanto giustificata la seguente

Definizione 3.5. *Se $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ e $h \ne 0$, $r_h u$ è la distribuzione definita dalla formula*

$$\langle r_h u, v\rangle = -\langle u, r_{-h}v\rangle \quad \textit{per } v \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \ \square$$

Proposizione 3.6. *Sia $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Allora*

$$r_h u \to u' \quad \textit{nel senso delle distribuzioni.} \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Sia $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Allora abbiamo

$$\lim_{h\to 0} \langle r_h u, v\rangle = -\lim_{h\to 0} \langle u, r_{-h}v\rangle = -\langle u, v'\rangle = \langle u', v\rangle$$

non appena riusciamo a giustificare la seconda uguaglianza. A tal fine applichiamo la Proposizione 2.3, o meglio la sua variante per il limite per $h \to 0$ applicata alla differenza $d_h = r_{-h}v - v'$. Occorre dunque dimostrare che tale differenza tende a zero in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Supponiamo $h > 0$ solo per semplificare le notazioni e $h \le 1$. Sia $a > 0$ tale che v sia nulla in $\mathbb{R} \setminus [-a, a]$. Allora d_h è nulla in $\mathbb{R} \setminus [-a-1, a+1]$ per ogni h considerato, il che verifica una delle condizioni richieste. Sia ora $n \in \mathbb{N}$: dobbiamo dimostrare che $d_h^{(n)}$ tende a zero uniformemente. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $\xi \in (x-h, x)$ dato dal Teorema del valor medio di Lagrange applicato a $v^{(n)}$ e all'intervallo $(x-h, x)$, cioè tale che $(r_{-h}v^{(n)})(x) = v^{(n+1)}(\xi)$. Allora

$$\begin{aligned} |d_h^{(n)}(x)| &= |(r_{-h}v^{(n)})(x) - v^{(n+1)}(x)| = |v^{(n+1)}(\xi) - v^{(n+1)}(x)| \\ &\le \sup_{x-h<y<x} |v^{(n+1)}(y) - v^{(n+1)}(x)| \le h\|v^{(n+2)}\|_\infty \end{aligned}$$

l'ultima disuguaglianza ancora per il Teorema di Lagrange applicato a $v^{(n+1)}$. Siccome l'ultimo membro non dipende da x ed è infinitesimo per $h \to 0$, concludiamo. $\square$

Esempio 3.7. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita (q.o.) dalle formule $u(x) = 0$ se $x < 0$ e $u(x) = 1$ se $x > 0$. Allora, per $h > 0$, si ha $(r_h u)(x) = 1/h$ se $-h < x < 0$ e $(r_h u)(x) = 0$

altrimenti. Procedendo come nell'Osservazione 2.5 si vede facilmente che $r_h u$ tende, nel senso delle distribuzioni, a δ_0, la massa di Dirac nell'origine. D'altra parte un controllo diretto in base alla definizione di derivata mostra immediatamente che $u' = \delta_0$. $\square$

Il risultato successivo è fondamentale grazie alla totale assenza di ipotesi aggiuntive. Eppure la sua dimostrazione è assolutamente immediata.

Teorema 3.8. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$ e $u_n, u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora vale l'implicazione*

$$\text{da} \quad u_n \to u \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{segue} \quad D^\alpha u_n \to D^\alpha u \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{N}^d. \ \square$$

Dimostrazione. Sia infatti $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Allora

$$\langle D^\alpha u_n, v\rangle = \langle u_n, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha v\rangle \quad \text{e} \quad \langle D^\alpha u, v\rangle = \langle u, (-1)^{|\alpha|} D^\alpha v\rangle$$

per definizione di derivate. Se ora $u_n \to u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, il secondo membro della prima uguaglianza converge al secondo membro della seconda in quanto $(-1)^{|\alpha|} D^\alpha v \in C_c^\infty(\Omega)$. La stessa cosa, dunque, avviene per i primi membri e si conclude. $\square$

Corollario 3.9. *Se $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$ allora $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^d$.* $\square$

Dimostrazione. Basta infatti riprendere l'Osservazione 2.5 e la Proposizione 2.4 e applicare il teorema precedente. $\square$

4. Spazi di Sobolev

Una delle applicazioni più notevoli della teoria delle distribuzioni è l'introduzione degli spazi $W^{k,p}(\Omega)$, i cosiddetti spazi di Sobolev, la completezza dei quali deriva immediatamente da quella degli spazi $L^p(\Omega)$ e dal Teorema 3.8.

Definizione 4.1. *Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$. Se $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, +\infty]$ si pone*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{v \in \mathcal{D}'(\Omega) : \ D^\alpha v \in L^p(\Omega) \text{ per } |\alpha| \le k\} \tag{4.1}$$

e si munisce $W^{k,p}(\Omega)$ della norma definita dalla formula

$$\|v\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha v\|_p \tag{4.2}$$

o di una norma equivalente. $\square$

Si pone abitualmente $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$. In tal caso si ha $p = 2$ e la norma equivalente più opportuna è quella definita dalla formula

$$\|v\|_{k,2}^2 = \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha v\|_2^2 = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha v|^2 \, dx. \tag{4.3}$$

Essa, infatti, è indotta dal prodotto scalare

$$(u, v)_{k,2} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega (D^\alpha u)(D^\alpha v) \, dx. \tag{4.4}$$

Nel caso particolare $k = 1$ le due formule (4.3) e (4.4) diventano

$$\|v\|_{1,2}^2 = \int_\Omega \bigl(v^2 + |\nabla v|^2\bigr)\,dx \quad \text{e} \quad (u,v)_{1,2} = \int_\Omega \bigl(uv + \nabla u \cdot \nabla v\bigr)\,dx.$$

In generale si noterà che $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega) \supset W^{1,p}(\Omega) \supset W^{2,p}(\Omega) \supset \ldots$. In particolare abbiamo $L^2(\Omega) = H^0(\Omega) \supset H^1(\Omega) \supset H^2(\Omega) \supset \ldots$. In ogni caso tutte le immersioni sono continue, cioè avviene quanto segue: se $u_n \to u$ nel senso di uno degli spazi della catena successivo al primo, allora $u_n \to u$ nel senso dello spazio precedente.

Teorema 4.2. *Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$ e $p \in [1, +\infty]$. Allora $W^{k,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma* (4.2) *e $H^k(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare* (4.4). $\square$

Dimostrazione. Basta verificare la completezza, ad esempio rispetto alla norma (4.2). Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy. Allora si vede immediatamente che, per $|\alpha| \le k$, la successione $\{D^\alpha u_n\}$ delle derivate è di Cauchy in $L^p(\Omega)$. Siccome $L^p(\Omega)$ è completo, essa converge in tale spazio a una funzione u^α. Sia u la funzione u^α corrispondente alla scelta $\alpha = (0, \ldots, 0)$. Allora $u_n \to u$ in $L^p(\Omega)$. Per il Corollario 3.9 abbiamo subito $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ per ogni α, in particolare per $|\alpha| \le k$. D'altra parte, per $|\alpha| \le k$, la convergenza $D^\alpha u_n \to u^\alpha$ in $L^p(\Omega)$ implica $D^\alpha u_n \to u^\alpha$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ (per lo stesso corollario applicato con $\alpha = (0, \ldots, 0)$ o direttamente per l'Osservazione 2.5 e la Proposizione 2.4). Concludiamo che $u^\alpha = D^\alpha u$ per tali α. Dunque $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ e $D^\alpha u_n \to D^\alpha u$ per $|\alpha| \le k$. Ma ciò significa $u \in W^{k,p}(\Omega)$ e $u_n \to u$ in $W^{k,p}(\Omega)$. $\square$

Osservazione 4.3. Le funzioni di $W^{k,p}(\Omega)$ non sono di classe C^k. Anzi esse possono non essere nemmeno continue e nemmeno limitate: ciò avviene, ad esempio, per le funzioni dello spazio $H^1(\Omega)$ se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ con $d \ge 2$. Tuttavia la regolarità a tratti e un certo raccordo nelle interfacce implica l'appartenenza a $W^{k,p}(\Omega)$. Sviluppiamo questa affermazione nel caso importante $k = 1$ e $p < +\infty$ (ad esempio $p = 2$, caso notevole). Supponiamo per semplicità $\Omega = \mathbb{R}^2$ e consideriamo una funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che è di classe C^1 fino al bordo separatamente nei due semipiani $x_2 > 0$ e $x_2 < 0$. Supponiamo anche che $|u|^p$ e $|\nabla u|^p$ siano integrabili in ciascuno dei due semipiani. A questo punto ci si chiede se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e se le sue derivate nel senso delle distribuzioni coincidono con le derivate classiche, che risultano ben definite q.o., cioè fuori dell'interfaccia $x_2 = 0$. Ebbene la risposta è affermativa se e solo se u è almeno continua nei punti dell'interfaccia. Calcoliamo le due derivate parziali $D_1 u$ e $D_2 u$ nel senso delle distribuzioni. Per evitare confusioni denotiamo con $D_1^c u$ e $D_2^c u$ le derivate classiche (definite fuori dell'interfaccia). Poniamo anche $\nu^\pm = (0, \mp 1)$ così che ν^+ è la normale esterna sul bordo del semipiano $\{x_2 > 0\}$ e ν^- è la normale esterna sul bordo del semipiano $\{x_2 < 0\}$. Sia dunque $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$. Integrando per parti (separatamente nei due semipiani) abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle D_1 u, v \rangle &= -\langle u, D_1 v \rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} u\, D_1 v\, dx_1\, dx_2 \\
&= -\int_{\{x_2<0\}} u\, D_1 v\, dx_1\, dx_2 - \int_{\{x_2>0\}} u\, D_1 v\, dx_1\, dx_2 \\
&= \int_{\{x_2<0\}} D_1^c u\, v\, dx_1\, dx_2 + \int_{\{x_2>0\}} D_1^c u\, v\, dx_1\, dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} D_1^c u\, v\, dx_1\, dx_2
\end{aligned}$$

in quanto i due integrali di bordo che verrebbero dall'integrazione per parti sono nulli dato che $(1,0)$ è la direzione di derivazione e $\nu^{\pm} \cdot (1,0) = 0$. Concludiamo che $D_1 u = D_1^c u$. Le cose vanno diversamente per $D_2 u$. Poniamo per comodità

$$u^{\pm}(x_1) = \lim_{x_2 \to 0^{\pm}} u(x_1, x_2).$$

Allora, procedendo analogamente, abbiamo

$$\begin{aligned}
&\langle D_2 u, v \rangle = -\langle u, D_2 v \rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} u\, D_2 v \, dx_1 \, dx_2 \\
&= -\int_{\{x_2<0\}} u\, D_2 v \, dx_1 \, dx_2 - \int_{\{x_2>0\}} u\, D_2 v \, dx_1 \, dx_2 \\
&= \int_{\{x_2<0\}} D_2^c u \, v \, dx_1 \, dx_2 - \int_{\{x_2=0\}} u^+(x_1) \, v(x_1, 0) \, \nu^+ \cdot (0,1) \, dx_1 \\
&+ \int_{\{x_2>0\}} D_2^c u \, v \, dx_1 \, dx_2 - \int_{\{x_2=0\}} u^-(x_1) \, v(x_1, 0) \, \nu^- \cdot (0,1) \, dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} D_2^c u \, v \, dx_1 \, dx_2 + \int_{\{x_2=0\}} \bigl(u^+(x_1) - u^-(x_1)\bigr) \, v(x_1, 0) \, dx_1 \\
&= \langle D_2^c u, v \rangle + \int_{\{x_2=0\}} \bigl(u^+(x_1) - u^-(x_1)\bigr) \, v(x_1, 0) \, dx_1 \, .
\end{aligned}$$

Concludiamo che la derivata nel senso delle distribuzioni $D_2 u$ è la somma della derivata classica $D_2^c u$ e di una distribuzione concentrata sull'interfaccia $\{x_2 = 0\}$ del tipo (1.15) nella versione bidimensionale: Σ è l'interfaccia $\{x_2 = 0\}$ e $\rho = u^+ - u^-$. Ora, se u è continua globalmente, allora $u^+ = u^-$ e ρ è la funzione nulla. Dunque $D_2 u = D_2^c u$ e $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. In caso contrario, il secondo contributo non appartiene a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ (come si è accennato nell'Esempio 1.9) e la distribuzione $D_2 u$ proprio non è una funzione.

Una situazione simile a quella considerata si presenta nel caso di un aperto limitato quando questo venga suddiviso in un numero finito di parti ragionevoli (ad esempio Ω è un poligono piano e la suddivisione è una triangolazione) e la funzione u è separatamente regolare fino al bordo in ciascuna delle parti. Allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se u è almeno continua su tutte le interfacce, dunque in tutto Ω.

Infine, se volessimo vedere l'appartenenza a uno spazio di Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ di ordine superiore in ipotesi C^k a tratti, un ragionamento più complesso dal punto di vista tecnico ma analogo per quanto riguarda l'idea soggiacente mostra che occorre richiedere la continuità globale anche di alcune delle derivate. Le cose vanno sicuramente bene nell'ipotesi aggiuntiva $u \in C^{k-1}(\Omega)$.

Osservazione 4.4. Le considerazioni fatte supponendo u regolare a tratti (i tratti essendo i due semipiani nel caso considerato in dettaglio e i triangoli nel caso appena accennato di una triangolazione di un poligono piano) si estendono opportunamente al caso in cui le restizioni di u ai singoli tratti appartengano ai corrispondenti spazi di Sobolev. Ma tale estensione, che comporta la corrispondente estensione di formule di integrazione per parti con termini di bordo, è complessa e non può trovare spazio in queste pagine. Il primo problema che sorge è quello di attribuire un senso al valore di u su un'interfaccia Σ, che ha misura d-dimensionale nulla: u, infatti, è una classe di equivalenza e le restrizioni dei suoi elementi a Σ sarebbero tutti equivalenti fra loro; d'altra parte la via della restrizione di un rappresentante preciso non funziona dato che la classe è in generale priva di un rappresentante privilegiato (che invece esiste quando si dice che u è una funzione regolare: ciò significa, precisamente, che la classe u contiene un rappresentante regolare, necessariamente unico, che dunque viene privilegiato). Tuttavia l'ostacolo viene superato e diamo almeno un cenno su come si procede. Osservato che, per ciascuno dei tratti di Ω, un'interfaccia è il bordo del tratto oppure una sua parte, basta saper attribuire un significato al "valore" di u sull'intero bordo di un aperto generico. Ciò si riesce a fare se l'aperto non è troppo irregolare (si consente che la normale esterna non sia definita proprio in tutto il bordo, come nel caso di un poligono piano, ma si deve richiedere, ad esempio, assenza di cuspidi nel caso piano e di singolarità simili nel caso generale). La chiave di volta è il risultato che segue, detto *Teorema di traccia*, che enunciamo nel caso in cui Ω è limitato ma che vale, ad esempio, anche nel caso di un semispazio.

Teorema 4.5. *Siano Ω un aperto limitato e regolare di $\mathbb{R}^d$ e $p \in [1, +\infty]$ e si denoti con $L^p(\Gamma)$ lo spazio L^p costruito su $\Gamma = \partial\Omega$ a partire dalla misura superficiale dS. Allora esiste uno e un solo operatore $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma)$ lineare e continuo tale che $\gamma v = v|_\Gamma$ per ogni $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$. Se $v \in W^{1,p}(\Omega)$, l'elemento γv si chiama traccia di v.*

Naturalmente la richiesta $v \in W^{1,p}(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ significa che l'elemento $v \in W^{1,p}(\Omega)$ possiede un rappresentante che non solo è continuo ma che può essere prolungato per continuità anche su Γ. In tal caso $v|_\Gamma$ è la restrizione a Γ del prolungamento continuo. Poi, per semplificare la notazione, si continua a scrivere $v|_\Gamma$ (o anche solo v) anche nel caso di un elemento generico $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Se i valori al bordo sono intesi nel senso detto, vale l'estensione della (1.6) al caso in cui $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W^{1,p'}(\Omega)$, ove naturalmente p' è l'esponente coniugato di p. Si noti almeno che, in ciascuno dei tre integrali, la funzione integranda è effettivamente sommabile grazie alla disuguaglianza di Hölder.

Usando tutto ciò, o meglio la variante nel caso del semipiano, si possono ripercorrere i calcoli fatti sopra e dimostrare che, se una funzione u appartiene a $L^p(\mathbb{R}^2)$ e le sue restrizioni ai due semipiani appartengono ai corrispondenti spazi $W^{1,p}$, allora $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$ se e solo se le restrizioni dette hanno la stessa traccia sull'interfaccia $\{x_2 = 0\}$.