Gianni Gilardi

Problemi Variazionali per Equazioni di Tipo Ellittico

Corso tenuto nell'a.a. 1996/1997 agli studenti
del Dottorato in Matematica
del consorzio costituito dagli atenei

Università degli Studi di Milano
Politecnico di Milano
Università Cattolica del Sacro Cuore, sede di Brescia
Università degli Studi di Pavia

e agli studenti borsisti post lauream
dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica

Introduzione

Per individuare subito la direzione in cui ci dobbiamo muovere, esaminiamo due problemi–modello con qualche considerazione di tipo euristico.

1. Problemi variazionali e spazi di Sobolev

Siano Ω un aperto regolare di $\mathbb{R}^n$, Γ la sua frontiera e $\boldsymbol{\nu}$ la normale esterna su Γ e consideriamo il problema di incognita u

$$-\Delta u + u = f \quad \text{in} \quad \Omega \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \quad \text{su} \quad \Gamma \tag{1.2}$$

ove $\Delta = \operatorname{div} \nabla$ è l'usuale laplaciano e f e g sono funzioni assegnate.

Sia u una soluzione di (1.1–2). Supponendo tutto regolare quanto basta a giustificare i calcoli che eseguiamo, moltiplichiamo i due membri dell'equazione (1.1) per la generica funzione v, sommiamo su Ω e applichiamo la formula di integrazione per parti. Otteniamo

$$\int_\Omega f v \, dx = \int_\Omega (-\Delta u + u) v \, dx = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} v \, ds.$$

Utilizzando la condizione (1.2) e riordinando, deduciamo l'uguaglianza

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g v \, ds \tag{1.3}$$

che deve valere per ogni v regolare.

Viceversa, supponiamo che una funzione regolare u verifichi la (1.3) per ogni v regolare e deduciamo che u soddisfa (1.1–2). Scritta la (1.3) con la generica v nulla su Γ, integrando per parti otteniamo

$$\int_\Omega f v \, dx = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx = \int_\Omega (-\Delta u + u) v \, dx$$

e dall'arbitrarietà di v segue facilmente la (1.1). Riprendiamo ora la (1.3) con v del tutto generica, dapprima integriamo per parti e poi utilizziamo la (1.1) appena dedotta. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g v \, ds &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx \\ = \int_\Omega (-\Delta u + u) v \, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} v \, ds &= \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} v \, ds. \end{aligned}$$

Deduciamo che, sempre per ogni v regolare, vale l'uguaglianza

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} v \, ds = \int_\Gamma g v \, ds$$

e l'arbitrarietà di v porta alla (1.2).

Dunque, almeno formalmente, il problema (1.1–2) equivale alla ricerca delle funzioni u tali che valga la (1.3) per ogni v. Una volta che sia stata precisata la regolarità richiesta a priori alla soluzione u e alla generica funzione v, che in un contesto di questo tipo viene chiamata *funzione test*, la (1.3) viene detta *formulazione variazionale* del problema ai limiti (1.1–2).

Osserviamo che l'equazione variazionale (1.3) ha la forma

$$a(u, v) = F(v) \tag{1.4}$$

con le notazioni ovvie

$$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv) \, dx \tag{1.5}$$

$$F(v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g v \, ds \tag{1.6}$$

e che, ancora formalmente, F è lineare in v e a gode delle proprietà richieste a un prodotto scalare: si tratta infatti di una forma bilineare simmetrica la cui forma quadratica associata $a(v, v)$ è non negativa e si annulla solo se $v = 0$. Ad esempio, se Ω è limitato, la (1.5) ha senso se u e v sono di classe C^1 fino al bordo, così che lo spazio $C^1(\overline{\Omega})$ diventa prehilbertiano se munito del prodotto scalare (1.5). Purtroppo lo spazio ottenuto non è completo e non possiamo usare il Teorema di rappresentazione di Riesz per dedurre immediatamente un risultato di esistenza e di unicità della soluzione di (1.3). Resta dunque evidenziato il problema seguente: *costruire uno spazio funzionale sul quale la forma bilineare* (1.5) *sia un ben definito prodotto scalare che rende completo lo spazio stesso.*

Lo spazio naturale, che introdurremo successivamente, è lo spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$, che contiene $C^1(\overline{\Omega})$ ed è costituito da funzioni che, in un senso opportuno, posseggono derivate prime.

L'approccio suggerito, che fa intervenire il Teorema di Riesz, richiede però che il funzionale F sia ben definito, lineare e continuo sullo spazio considerato. Dato che, come vedremo, le funzioni di $H^1(\Omega)$ sono precisate, come quelle di $L^2(\Omega)$, a meno di insiemi di misura nulla, per la generica funzione $v \in H^1(\Omega)$ non ha senso considerare un integrale sull'insieme Γ, che è di misura nulla, per cui si porrà il secondo problema: *sostituire degnamente la restrizione* $v|_\Gamma$ *con un oggetto nuovo*. Arriveremo al concetto di *traccia*.

Infine, se vorremo ritenere davvero equivalenti il problema variazionale e il problema ai limiti originario, che fa intervenire il laplaciano e non solo il gradiente, sarà opportuno poter parlare di derivate seconde anche nel caso in cui la funzione in gioco possegga solo derivate prime. Per questo motivo conviene introdurre qualche elemento della *teoria delle distribuzioni*.

2. Formulazioni variazionali di problemi di autovalori

Consideriamo il problema, analogo al precedente,

$$-\Delta u = \lambda u + f \quad \text{in } \Omega \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \quad \text{su } \Gamma \tag{2.2}$$

dipendente dal parametro reale λ. Procedendo come prima vediamo che la sua formulazione variazionale è, sempre formalmente, la seguente: trovare u tale che

$$a(u,v) = \lambda\ (u,v) + F(v) \qquad \forall\, v \in V \tag{2.3}$$

ove $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ è il prodotto scalare di $L^2(\Omega)$, il funzionale F è ancora definito dalla (1.6), mentre la nuova forma a è data da

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx. \tag{2.4}$$

Intervengono pertanto due spazi funzionali: lo spazio $H = L^2(\Omega)$ attraverso il suo usuale prodotto scalare e un altro spazio, diciamo V, sul quale la forma a sia ben definita: questo è un sottospazio vettoriale di H che però non può essere ancora H, dato che in a intervengono le derivate. Come V dovremo prendere anche questa volta lo spazio $H^1(\Omega)$, poiché ancora sarà necessaria la completezza.

Discuteremo più in generale il problema astratto seguente: *dati due spazi di Hilbert V e H, con V sottospazio vettoriale di H, trovare i valori $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che l'equazione* (2.3) *abbia una e una sola soluzione $u \in V$ per ogni prefissato $F \in V'$. Inoltre vogliamo studiare la struttura dell'insieme delle soluzioni nel caso di un valore λ cattivo.*

Nel caso $V = H = \mathbb{R}^n$ il problema proposto coincide con la teoria spettrale relativa alla matrice A associata alla forma bilineare a, teoria che fa intervenire in modo essenziale anche la matrice A^*, aggiunta o trasposta di A, il risolvente e lo spettro di A, costituito dagli autovalori. Anche in generale introdurremo la nozione di *problema aggiunto*, chiameremo *insieme risolvente* l'insieme dei valori λ per cui il problema proposto è univocamente risolubile e *spettro* il suo complementare e ancora introdurremo gli *autovalori*, cioè i valori λ per i quali il corrispondente problema omogeneo $(F = 0)$ ha soluzioni non banali.

In contrasto però con il caso finito–dimensionale, può accadere che lo spettro non coincida con l'insieme degli autovalori e che sia più vasto. Perché questo non accada occorrono, fra le altre, ipotesi di compatibilità tra i due spazi V e H: richiederemo che l'immersione di V in H sia *compatta*, cioè che i sottoinsiemi limitati di V siano sottoinsiemi relativamente compatti di H. Diciamo fin d'ora che, nel caso delle applicazioni ai problemi ai limiti per equazioni ellittiche, questa ipotesi è soddisfatta quando Ω è un aperto limitato abbastanza regolare.

Per arrivare allo studio del problema astratto proposto è comodo premettere elementi di teoria spettrale per operatori compatti di uno spazio in se stesso.

2.1. Esercizi

1. Detto $H^1(0,1)$ lo spazio delle funzioni $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ assolutamente continue tali che $v' \in L^2(0,1)$, si dimostri che $H^1(0,1)$ è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$(u,v)_z = u(z)v(z) + \int_0^1 u'v'\,dx \tag{2.5}$$

ove $z \in [0,1]$ è fissato.

2. Detta $\|\cdot\|_z$ la norma associata al prodotto scalare (2.5), dimostrare che esiste una costante c tale che

$$|v(y)| \le c\,\|v\|_z \qquad \forall\, y \in [0,1] \quad \forall\, v \in H^1(0,1).$$

Dedurre che due scelte qualunque di z portano a norme equivalenti fra loro.

3. Dimostrare che la norma in $H^1(0,1)$ associata al prodotto scalare

$$(u,v) = \int_0^1 (uv + u'v')\,dx$$

è equivalente alle norme $\|\cdot\|_z$ introdotte sopra.

4. Dimostrare che ciascuna delle quattro condizioni

$$v(0) = 0, \qquad v(1) = 0, \qquad v(0) = v(1) = 0, \qquad v(0) = v(1)$$

definisce un sottospazio chiuso di $H^1(0,1)$.

5. Detti $V_1, \ldots, V_4$ i sottospazi chiusi dell'esercizio precedente e supponendo per fissare le idee $f \in C^0[0,1]$, dimostrare che, per $j = 1, \ldots, 4$, una funzione $u \in V_j \cap C^2[0,1]$ risolve l'equazione variazionale

$$\int_0^1 u'v'\,dx = \int_0^1 fv\,dx \qquad \forall\, v \in V_j$$

se e solo se essa risolve l'equazione diffenziale $-u'' = f$ nell'intervallo $]0,1[$ e verifica le condizioni ai limiti

$$\begin{aligned} u(0) = u'(1) = 0, &\qquad u'(0) = u(1) = 0, \\ u(0) = u(1) = 0, &\qquad u(0) = u(1) \quad \text{e} \quad u'(0) = u'(1), \end{aligned}$$

rispettivamente nei casi $j = 1, \ldots, 4$.

6. Siano $f \in C^0[0,1]$ e $u \in C^2[0,1]$. Dimostrare che u verifica

$$\int_0^1 u'v'\,dx + u(0)v(0) + u(1)v(1) = \int_0^1 fv\,dx + v(1) \qquad \forall\, v \in H^1(0,1)$$

se e solo se risolve il problema

$$-u'' = f \quad \text{in} \ \ ]0,1[, \qquad u'(0) = u(0), \qquad u'(1) + u(1) = 1.$$

Capitolo I

Risultati astratti

Nel corso del capitolo introdurremo quegli elementi di teoria spettrale ai quali abbiamo accennato nell'introduzione. Premettiamo vari risultati che, da un lato, sono utili alla trattazione e, dall'altro, hanno anche notevole interesse autonomo e varie conseguenze importanti. Sebbene una buona parte di ciò che diremo si estenda, in forma opportuna, all'ambito degli spazi di Banach, per lasciare alla trattazione un carattere elementare ci limiteremo al caso hilbertiano. Inoltre resta inteso che tutti gli spazi che intervengono sono reali. Fissiamo innanzi tutto le notazioni e diamo qualche richiamo.

Se V è uno spazio di Hilbert, V' denota lo spazio duale di V munito dell'usuale norma duale. Inoltre i simboli

$$\|\cdot\|_V \qquad (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_V \qquad \text{e} \qquad {}_{V'}\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V$$

denotano rispettivamente la norma in V, il prodotto scalare in V e il prodotto di dualità fra V' e V. Se non sorgono equivoci gli indici V e V' vengono omessi. In tal caso la norma e il prodotto scalare di V e la norma duale e il corrispondente prodotto scalare in V' sono, salvo avviso contrario, indicati con

$$\|\cdot\| \qquad (\,\cdot\,,\,\cdot\,) \qquad \|\cdot\|_* \qquad \text{e} \qquad (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_*$$

rispettivamente. Inoltre, denotiamo con R oppure R_V *l'operatore di Riesz* dello spazio di Hilbert V, cioè l'applicazione $R : V' \to V$ che verifica

$$(Ru', v) = \langle u', v\rangle \qquad \forall\, u' \in V' \quad \forall\, v \in V.$$

Come è ben noto, valgono le formule

$$(u', v')_* = (Ru', Rv') = \langle u', Rv'\rangle \qquad \forall\, u', v' \in V'. \tag{0.1}$$

Se A è un sottoinsieme di V, denotiamo con $\operatorname{span} A$ il sottospazio generato da A, cioè l'insieme delle combinazioni lineari finite di elementi di A, e con $\overline{\operatorname{span}}\, A$ la chiusura del sottospazio $\operatorname{span} A$. Con $A^\perp$ denotiamo poi *l'ortogonale di* A, cioè l'insieme dei vettori di V ortogonali a tutti gli elementi di A, che risulta essere in ogni caso un sottospazio chiuso di V. Valgono le formule

$$A^\perp = (\operatorname{span} A)^\perp = (\overline{\operatorname{span}}\, A)^\perp \qquad \text{e} \qquad \bigl(A^\perp\bigr)^\perp = \overline{\operatorname{span}}\, A. \tag{0.2}$$

Se $\{V_i :\ i \in \mathcal{I}\}$ è una famiglia di sottospazi di V, diciamo che V è la *somma hilbertiana* dei sottospazi considerati quando questi sono tutti chiusi, a due a due ortogonali e vale l'uguaglianza $V = \overline{\operatorname{span}} \cup_{i\in\mathcal{I}} V_i$.

Se V e W sono spazi vettoriali e $L : V \to W$ è un operatore lineare, il nucleo e l'immagine di L sono denotati con $N(L)$ e $R(L)$ rispettivamente. Diciamo poi che L è un *isomorfismo algebrico* quando $N(L) = \{0\}$ e $R(L) = W$.

Se V e W sono spazi di Hilbert, denotiamo con $\mathcal{L}(V;W)$ lo spazio di Banach degli operatori lineari e continui di V in W munito della norma usuale, abbreviando la scrittura in $\mathcal{L}(V)$ nel caso $W = V$. Diciamo poi che L è un *isomorfismo* di V su W quando L è un isomorfismo algebrico e L e L^{-1} sono continui. Ricordiamo che, essendo V e W completi, perché L sia un isomorfismo è sufficiente che L sia un isomorfismo algebrico e che uno dei due operatori L e L^{-1} sia continuo, in quanto la continuità dell'altro è una conseguenza del Teorema dell'applicazione aperta.

1. Convergenza debole

Le due versioni della definizione che diamo sono equivalenti grazie al Teorema di Riesz di rappresentazione dei funzionali lineari e continui.

1.1. Definizione. *Una successione $\{u_n\}$ di elementi di V converge debolmente in V all'elemento $u \in V$ quando*

$$\lim_{n\to\infty} \langle F, u_n \rangle = \langle F, u \rangle \qquad \forall\, F \in V'$$

oppure, equivalentemente, quando

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v) = (u, v) \qquad \forall\, v \in V. \ \blacksquare$$

Scriveremo in tal caso $u_n \rightharpoonup u$, mentre useremo il simbolo $u_n \to u$ per indicare che $\{u_n\}$ converge a u *fortemente* in V, cioè rispetto alla metrica indotta dalla norma.

Chiaramente il limite debole è unico e la convergenza forte $u_n \to u$ implica la convergenza debole $u_n \rightharpoonup u$. Dalla convergenza debole $u_n \rightharpoonup u$ segue poi

$$\|u\| \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$$

come si vede scrivendo $\|u\|^2 = \lim_{n\to\infty}(u, u_n)$.

Se V ha dimensione finita, le convergenze forte e debole coincidono. Se invece V ha dimensione infinita esse sono distinte: preso infatti un sistema ortonormale $\{e_n\}$, abbiamo $e_n \rightharpoonup 0$ grazie alla disuguaglianza di Bessel $\sum_n |(v, e_n)|^2 \le \|v\|^2$ valida per ogni $v \in V$; d'altra parte $\{e_n\}$ non converge a 0 fortemente.

Se $L \in \mathcal{L}(V;W)$, la convergenza debole $u_n \rightharpoonup u$ in V implica la convergenza debole $Lu_n \rightharpoonup Lu$ in W. In particolare ciò vale per un operatore di proiezione.

Se V_0 è un sottospazio chiuso di V, $\{u_n\}$ è una successione in V_0 e $u \in V$, grazie al Teorema delle proiezioni vediamo che da $u_n \rightharpoonup u$ in V segue che $u \in V_0$ e che $u_n \rightharpoonup u$ in V_0 e che da $u \in V_0$ e $u_n \rightharpoonup u$ in V_0 segue $u_n \rightharpoonup u$ in V.

Dimostriamo ora due risultati importanti. Dal primo di essi segue facilmente che

$$\text{se} \qquad u_n \to u \quad \text{e} \quad v_n \rightharpoonup v \qquad \text{allora} \qquad \lim_{n\to\infty} (u_n, v_n) = (u, v).$$

1.2. Teorema. *Ogni successione debolmente convergente è limitata.* ■

Dimostrazione. Sia $\{u_n\}$ una successione debolmente convergente e, ragionando per assurdo, supponiamo che essa non sia limitata. Per $v \in V$ poniamo

$$s(v) = \sup_n |(u_n, v)|$$

osservando che $s(v)$ è finito grazie all'ipotesi di convergenza debole. Siccome però $\{u_n\}$ non è limitata, esiste n_1 tale che $\|u_{n_1}\| \geq 1$. Posto allora $e_1 = u_{n_1} / \|u_{n_1}\|$, abbiamo

$$\|e_1\| = 1 \qquad \text{e} \qquad (u_{n_1}, e_1) \geq 1$$

Sia ora $V_1 = \operatorname{span}\{e_1\}$. Dette u'_n e u''_n le proiezioni di u_n su V_1 e su $V_1^\perp$, siccome $\{u_n\}$ non è limitata mentre $\{u'_n\}$ lo è in quanto converge debolmente nello spazio di dimensione finita V_1, deduciamo che $\{u''_n\}$ non è limitata. Dunque esiste $n_2 > n_1$ tale che

$$\|u''_{n_2}\| \geq 2^2 + 2s(e_1).$$

Allora esiste anche $e_2 \in V_1^\perp$ tale che

$$\|e_2\| = 1 \qquad \text{e} \qquad (u_{n_2}, e_2) \geq 2^2 + 2s(e_1).$$

Possiamo prendere infatti $e_2 = u''_{n_2} / \|u''_{n_2}\|$.

Procedendo per induzione, costruiamo una successione strettamente crescente $\{n_k\}$ di indici e una successione $\{e_k\}$ di vettori tali che, per ogni $k \geq 1$, e_k abbia norma unitaria, e_{k+1} sia ortogonale a e_i e a u_{n_i} per $i \leq k$ e valga la disuguaglianza

$$(u_{n_{k+1}}, e_{k+1}) \geq (k+1)^2 + (k+1) \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} s(e_i).$$

Osservato che la serie $\sum_i (1/i^2)$ converge, definiamo $v = \sum_{i=1}^\infty (1/i) e_i$ e contraddiciamo l'ipotesi di convergenza debole. Per ogni k, ricordando che $(u_{n_{k+1}}, e_i) = 0$ per ogni $i > k+1$, abbiamo

$$\begin{aligned} |(u_{n_{k+1}}, v)| &= \Bigl| \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} (u_{n_{k+1}}, e_i) + \frac{1}{k+1} (u_{n_{k+1}}, e_{k+1}) \Bigr| \\ &\geq \frac{1}{k+1} |(u_{n_{k+1}}, e_{k+1})| - \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} s(e_i) \geq k+1 \end{aligned}$$

così che la successione $\{(u_n, v)\}$ non può convergere. ■

1.3. Teorema di compattezza debole. *Da ogni successione limitata* $\{u_n\}$ *di* V *si può estrarre una sottosuccessione convergente debolmente in* V . ■

Dimostrazione. Considerando il sottospazio chiuso $V_0 = \overline{\operatorname{span}}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ se necessario, ci riconduciamo al caso in cui V è separabile. Inoltre, se V ha dimensione finita, il risultato è evidente. Supponiamo pertanto V separabile e di dimensione infinita.

Sia $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base hilbertiana di V . Per ogni $i \in \mathbb{N}$ consideriamo la successione numerica $\{(u_n, e_i)\}$. Se M maggiora $\|u_n\|$ per ogni n , allora $|(u_n, e_i)| \le M$ per ogni n e per ogni i . Dunque, per ogni i e per ogni sottosuccessione estratta dalla successione data, possiamo estrarre ulteriormente una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che la successione numerica $\{(u_{n_k}, e_i)\}$ converga. Con un procedimento diagonale costruiamo pertanto una sottosuccessione $\{u_{n_k}\}$ tale che, per ogni i , la successione numerica $\{(u_{n_k}, e_i)\}$ converga a un certo $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

Proseguiamo provando che $\{u_{n_k}\}$ converge debolmente a

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i.$$

Dapprima occorre controllare che tale u è ben definito.

Grazie alla disuguaglianza di Bessel, abbiamo per ogni $m, k \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{m} (u_{n_k}, e_i)^2 \le \|u_{n_k}\|^2 \le M^2$$

da cui, prendendo $k \to \infty$, deduciamo $\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \le M^2$. Dunque la serie $\sum_i \lambda_i^2$ converge e la definizione di u ha senso.

Verifichiamo infine che $u_{n_k} \rightharpoonup u$ in V . Scritto il generico vettore $v \in V$ nella forma $v = \sum_{i=1}^\infty c_i e_i$ con $\sum_i c_i^2 < \infty$, per ogni k e m abbiamo

$$\begin{aligned}
|(u - u_{n_k}, v)| &= \Big| \sum_{i=1}^{\infty} \big(\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)\big)\, c_i \Big| \\
&\le \sum_{i\le m} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|\, |c_i| + \sum_{i>m} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|\, |c_i| \\
&\le \sum_{i\le m} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|\, |c_i| + \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|^2 \Big)^{1/2} \Big(\sum_{i>m} c_i^2 \Big)^{1/2} \\
&= \sum_{i\le m} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|\, |c_i| + \|u - u_{n_k}\| \Big(\sum_{i>m} c_i^2 \Big)^{1/2} \\
&\le \sum_{i\le m} |\lambda_i - (u_{n_k}, e_i)|\, |c_i| + (\|u\| + M) \Big(\sum_{i>m} c_i^2 \Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Fissato allora $\varepsilon > 0$ ad arbitrio, si conclude facilmente scegliendo dapprima m in modo che il secondo addendo dell'ultimo membro sia $\le \varepsilon$ e osservando che l'altro addendo è una somma finita di termini infinitesimi per $k \to \infty$. ■

2. L'aggiunto di un operatore lineare e continuo

Siano V e W due spazi di Hilbert e $L \in \mathcal{L}(V;W)$. Se $w \in W$, l'applicazione che a ogni $v \in V$ associa il numero reale $(w, Lv)_W$ è lineare e continua. Per il Teorema di Riesz, essa si rappresenta come prodotto scalare, esiste cioè uno e un solo elemento di V che denotiamo con L^*w tale che

$$(L^*w, v)_V = (w, Lv)_W \qquad \forall\, v \in V. \tag{2.1}$$

2.1. Definizione. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L \in \mathcal{L}(V;W)$. L'applicazione L^* che a ogni $w \in W$ associa l'elemento $L^*w \in V$ che verifica la (2.1) è detta operatore aggiunto dell'operatore L dato. Nel caso $W = V$ l'operatore L è detto autoaggiunto quando $L^* = L$.* ∎

Per costruzione risulta

$$(L^*w, v)_V = (w, Lv)_W \qquad \forall\, v \in V \quad \forall\, w \in W. \tag{2.2}$$

Segue immediatamente che L^* è lineare e continuo da W in V e che il suo aggiunto L^{**} coincide con l'operatore L di partenza.

Alcune proprietà elementari dell'aggiunto sono date di seguito.

2.2. Proposizione. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L \in \mathcal{L}(V;W)$. Allora*

$$\|L^*\|_{\mathcal{L}(W;V)} = \|L\|_{\mathcal{L}(V;W)} . \ \blacksquare$$

Dimostrazione. Per $w \in W$ risulta subito

$$\|L^*w\|_V = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{(L^*w, v)_V}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{(w, Lv)_W}{\|v\|_V} \le \|w\|_W \, \|L\|_{\mathcal{L}(V;W)}$$

da cui $\|L^*\|_{\mathcal{L}(W;V)} \le \|L\|_{\mathcal{L}(V;W)}$. La disuguaglianza opposta si deduce applicando quella appena dimostrata a L^* e ricordando che $L^{**} = L$. ∎

Di dimostrazione altrettanto immediata sono i risultati seguenti:

2.3. Proposizione. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L \in \mathcal{L}(V;W)$. Se L è un'isometria, allora L^*L coincide con l'identità di V. In particolare, se L è un isomorfismo isometrico, allora $L^* = L^{-1}$.* ∎

2.4. Proposizione. *Siano V, W e Z tre spazi di Hilbert, $L \in \mathcal{L}(V;W)$ e $M \in \mathcal{L}(W;Z)$. Allora $(ML)^* = L^*M^*$. In particolare, se L è un isomorfismo, allora anche L^* è un isomorfismo e $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$.* ∎

2.5. Esercizi

1. Dimostrare le due proposizioni precedenti.

2. Sia $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ l'operatore associato alla matrice $A = (a_{ij})$ tramite la formula $Lx = Ax$ $(x \in \mathbb{R}^n)$, nel secondo membro della quale è inteso che x sia considerato come vettore colonna. Verificare che L^* è l'operatore associato alla matrice $A^* = (a_{ji})$, trasposta di A.

3. Sia $L : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore che alla generica successione $\{x_n\} \in \ell^2$ associa la successione $\{y_n\}$ definita dalla formula $y_n = x_{n+1}$. Verificare che L è lineare e continuo e determinarne l'aggiunto.

4. Sia L l'operatore di $L^2(0,1)$ in sé che a ogni $v \in L^2(0,1)$ associa la funzione Lv definita dalla formula

$$(Lv)(x) = \int_0^x v(t)\,dt, \quad x \in \,]0,1[.$$

Verificare che L è lineare e continuo e determinarne l'aggiunto.

3. Relazioni di ortogonalità

Passaggio all'aggiunto e ortogonalità hanno legami stretti. Vediamoli brevemente.

3.1. Teorema. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L \in \mathcal{L}(V;W)$. Allora*

$$N(L^*) = R(L)^\perp \tag{3.1}$$

$$N(L) = R(L^*)^\perp. \ \blacksquare \tag{3.2}$$

Dimostrazione. Si noti che, grazie alla (0.2), la (3.1) equivale all'uguaglianza

$$\overline{R(L)} = N(L^*)^\perp. \tag{3.3}$$

Controlliamo dapprima che

$$\overline{R(L)} \subseteq N(L^*)^\perp. \tag{3.4}$$

Se $v \in V$ e $w \in N(L^*)$, allora $(Lv, w)_W = (v, L^*w)_V = 0$. Ciò mostra che $R(L)$ è incluso in $N(L^*)^\perp$ e la (3.4) segue passando alle chiusure.

Dimostriamo ora che

$$R(L)^\perp \subseteq N(L^*). \tag{3.5}$$

Sia infatti $w \in R(L)^\perp$. Allora per ogni $v \in V$ si ha $(L^*w, v)_V = (w, Lv)_W = 0$. Dunque $L^*w = 0$ e $w \in N(L^*)$.

Dalla (3.5), usando la (0.2), deduciamo l'inclusione

$$N(L^*)^\perp \subseteq \bigl(R(L)^\perp\bigr)^\perp = \overline{R(L)}$$

che unita alla (3.4) fornisce la (3.3), equivalente alla (3.1).

Dimostriamo ora la (3.2) scrivendo la (3.3) per L^* e prendendo gli ortogonali. Otteniamo

$$N(L) = \bigl(N(L)^\perp\bigr)^\perp = \Bigl(\overline{R(L^*)}\Bigr)^\perp = R(L^*)^\perp. \ \blacksquare$$

3.2. Corollario. *Siano* V *e* W *due spazi di Hilbert e* $L \in \mathcal{L}(V;W)$ *. Allora* $R(L)$ *è un sottospazio chiuso di* W *se e solo se vale l'uguaglianza*

$$R(L) = N(L^*)^{\perp}. \ \blacksquare \tag{3.6}$$

Dimostrazione. Se $R(L)$ è chiuso, la (3.6) segue dalla (3.3). Viceversa, se vale la (3.6), il confronto con (3.3) implica $R(L) = \overline{R(L)}$, così che $R(L)$ è chiuso. $\blacksquare$

3.3. Corollario. *Siano* V *e* W *due spazi di Hilbert e* $L \in \mathcal{L}(V;W)$ *. Allora* L *è un isomorfismo se e solo se esistono due costanti* c_1 *e* c_2 *tali che*

$$\|v\|_V \le c_1 \|Lv\|_W \qquad \forall\, v \in V \tag{3.7}$$

$$\|w\|_W \le c_2 \|L^* w\|_V \qquad \forall\, w \in W. \ \blacksquare \tag{3.8}$$

Dimostrazione. Sia L un isomorfismo. Allora vale la (3.7), ovviamente. La (3.8) segue ricordando che anche L^* è un isomorfismo.

Viceversa, valgano le (3.7–8). La prima di esse assicura che $N(L) = \{0\}$ e che l'operatore inverso L^{-1}, definito naturalmente solo su $R(L)$, è continuo. Utilizzando ancora la (3.7) dimostriamo ora che $R(L)$ è chiuso.

Supponiamo infatti $v_n \in V$ e $Lv_n \to w$ in W. Dalla (3.7) scritta con $v = v_n - v_m$ deduciamo che $\{v_n\}$ è una successione di Cauchy in V. Allora $v_n \to v$ in V per un certo $v \in V$, da cui $w = Lv \in R(L)$. Dunque $R(L)$ è chiuso.

Usando ora la (3.8) e il Corollario 3.2, deduciamo

$$R(L) = N(L^*)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = W$$

così che L è un isomorfismo. $\blacksquare$

3.4. Osservazione. Da l punto di vista operativo la (3.7) (e la (3.8) è dello stesso tipo) significa quanto segue. Se si considera l'equazione $Lv = w$, tutte le coppie $(w,v) \in W \times V$ costituite da un dato w e da una corrispondente soluzione v verificano la disuguaglianza

$$\|v\|_V \le c_1 \|w\|_W$$

con una stessa costante c_1. Controllare la (3.7) significa dunque dimostrare che per le soluzioni dell'equazione $Lv = w$ vale una *stima a priori*, ignorando completamente ogni questione di esistenza della soluzione stessa.

3.5. Esercizio. Sia W lo spazio delle successioni reali $\{w_n\}$ tali che $\{w_n/n\} \in \ell^2$, che include ℓ^2 ed è uno spazio di Hilbert rispetto alla norma $\|\{w_n\}\|_W = \|\{w_n/n\}\|_{\ell^2}$. Si prenda come $L : \ell^2 \to W$ l'immersione e si verifichi direttamente che nessuno dei due operatori L e L^* ha immagine chiusa e che le (3.7–8) sono false qualunque siano le costanti c_1 e c_2.

4. Il Teorema di Lax–Milgram

Lo scopo del paragrafo è dare una condizione sufficiente, utile nelle applicazioni, per la risolubilità del problema seguente, che chiameremo problema variazionale astratto: *dati uno spazio di Hilbert* V *, una forma* a *bilineare e continua su* $V \times V$ *e un elemento* $F \in V'$ *, trovare* $u \in V$ *tale che*

$$a(u,v) = \langle F, v \rangle \qquad \forall\, v \in V. \tag{4.1}$$

Il caso più semplice si ottiene prendendo come a il prodotto scalare: il Teorema di Riesz assicura allora che il problema posto è unicamente risolubile e che la soluzione u ha la stessa norma del funzionale F .

Il Teorema di Lax–Milgram fornisce una risposta allo stesso problema in condizioni più generali. Premettiamo alcune considerazioni sulle forme bilineari e continue.

Se V è uno spazio di Hilbert, una forma bilineare su $V \times V$ è un'applicazione $a : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineare. Si vede facilmente che a è continua se e solo se esiste una costante M tale che

$$|a(u,v)| \le M \, \|u\| \, \|v\| \qquad \forall\, u,v \in V. \tag{4.2}$$

Notiamo che una forma bilineare e continua a ne individua altre tre. Le prime due sono dette *aggiunta* e *parte simmetrica* di a e sono date rispettivamente dalle formule

$$a_*(u,v) = a(v,u) \qquad \text{e} \qquad a_s(u,v) = \frac{1}{2} a(u,v) + \frac{1}{2} a_*(u,v), \qquad u,v \in V. \tag{4.3}$$

La *parte antisimmetrica* di a è invece la forma $(a - a_*)/2$. Chiaramente, se a è simmetrica, allora $a = a_* = a_s$ e la parte antisimmetrica è nulla.

Vediamo ora che le forme bilineari e continue sono canonicamente associate agli operatori lineari e continui dallo spazio dato nel duale. Sia infatti a una forma bilneare e continua su $V \times V$. Allora, per ogni $u \in V$, l'applicazione $v \mapsto a(u,v)$, $v \in V$, che denotiamo con Lu , è lineare e continua da V in $\mathbb{R}$ grazie alla (4.2), cioè è un elemento del duale V' di V . Abbiamo così definito un operatore L di V in V' : l'applicazione $u \mapsto Lu$. Vale per definizione la formula

$$\langle Lu, v \rangle = a(u,v) \qquad \forall\, u,v \in V. \tag{4.4}$$

Usando la linearità di a nel primo fattore e ancora la (4.2), si vede subito che L è lineare e continuo; precisamente $\|L\|_{\mathcal{L}(V;V')} \le M$.

Viceversa, se $L \in \mathcal{L}(V;V')$, la (4.4) letta da destra a sinistra definisce la forma a , che risulta essere bilineare e continua. Per soddisfare la (4.2) si può prendere $M = \|L\|_{\mathcal{L}(V;V')}$.

4.1. Definizione. *Siano* V *uno spazio di Hilbert,* $L \in \mathcal{L}(V;V')$ *e* a *una forma bilineare e continua su* $V \times V$ *. Diciamo che* L *e* a *sono associati quando vale la* (4.4). ■

Studiamo ora l'aggiunto dell'operatore associato a una forma data.

4.2. Proposizione. *Siano* V *uno spazio di Hilbert,* a *una forma bilineare e continua su* $V \times V$ *e* L *l'operatore associato alla forma* a *tramite la* (4.4). *Allora, detto* L_*

l'operatore associato alla forma aggiunta a_* , *l'aggiunto* L^* *di* L *è dato dalla formula* $L^* = RL_*R$ *ove* R *è l'operatore di Riesz di* V . ■

Dimostrazione. Per ogni $u' \in V'$ e $v \in V$ si ha infatti

$$\begin{aligned}(L^*u', v) &= (u', Lv)_* = (Ru', RLv) = (RLv, Ru') = \langle Lv, Ru' \rangle \\ &= a(v, Ru') = a_*(Ru', v) = \langle L_*Ru', v \rangle = (RL_*Ru', v).\ ■\end{aligned}$$

Diamo ora la seguente

4.3. Definizione. *Sia* V *uno spazio di Hilbert. Una forma* a *bilineare e continua su* $V \times V$ *è detta* $V-$ *ellittica quando esiste una costante* $\alpha > 0$ *tale che*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V. \tag{4.5}$$

Una costante $\alpha > 0$ *verificante la* (4.5) *è detta costante di ellitticità o di* $V-$ *ellitticità della forma considerata.* ■

Si noti che, se a è una forma bilineare, continua e $V-$ ellittica, delle stesse proprietà godono le due forme a_* e a_s , con la stessa costante di ellitticità.

4.4. Teorema di Lax–Milgram. *Siano* V *uno spazio di Hilbert e* a *una forma bilineare e continua su* $V \times V$. *Se* a *è* $V-$ *ellittica allora, per ogni* $F \in V'$, *esiste uno e un solo elemento* $u \in V$ *soluzione dell'equazione variazionale* (4.1). *Si ha inoltre*

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_* \tag{4.6}$$

ove α *è la costante di ellitticità della forma.* ■

Dimostrazione. Introduciamo l'operatore $L \in \mathcal{L}(V; V')$ associato alla forma a e dimostriamo la prima parte dell'enunciato, che si può riformulare dicendo che L è un isomorfismo. Applichiamo allora il Corollario 3.3 con $W = V'$, del quale verifichiamo le ipotesi.

Dalla (4.5) segue

$$\alpha \|v\|^2 \leq \langle Lv, v \rangle \leq \|Lv\|_* \|v\|$$

da cui la (3.7) con $c_1 = 1/\alpha$.

Per ottenere la (3.8), osserviamo che la (3.7) vale con L_* al posto di L e con la stessa costante $1/\alpha$. Grazie alla Proposizione 4.2 abbiamo allora per ogni $v' \in V'$

$$\|v'\|_* = \|Rv'\| \leq \frac{1}{\alpha} \|L_*Rv'\|_* = \frac{1}{\alpha} \|RL_*Rv'\| = \frac{1}{\alpha} \|L^*v'\| .$$

La (4.6) segue poi immediatamente: scelto $v = u$ in (4.1), grazie alla (4.5) otteniamo

$$\alpha \|u\|^2 \leq a(u, u) = \langle F, u \rangle \leq \|F\|_* \|u\|$$

e basta dividere per $\alpha \|u\|$ se $u \neq 0$, altrimenti la tesi è banale. ■

4.5. Osservazione. Si noti che le ipotesi del Teorema 4.4 non richiedono che la forma a si simmetrica, cioè che $a_* = a$. Nel caso simmetrico si può però dire qualcosa di più: la soluzione $u \in V$ del problema variazionale (4.1) è anche l'unico *punto di minimo* del funzionale quadratico

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle F, v \rangle, \qquad v \in V. \tag{4.7}$$

Sia infatti $u \in V$ la soluzione di (4.1). Allora, per ogni $v \in V$, si ha

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v-u, v-u) - \frac{1}{2} a(u,u)$$

grazie all'ipotesi di simmetria. Siccome, per la (4.5), risulta $a(w,w) \geq 0$ per ogni $w \in V$ e l'uguaglianza vale se e solo se $w = 0$, la scelta $v = u$ realizza il minimo di J ed è l'unica possibile.

Va osservato inoltre che il minimo di J esiste ed è unico anche nel caso in cui la forma a non è simmetrica, ferme restando le ipotesi di continuità e di ellitticità. Infatti la definizione di J non cambia se la forma a è sostituita dalla sua parte simmetrica che, come abbiamo notato, è una forma che verifica le stesse ipotesi soddisfatte da a e, in aggiunta, è simmetrica. Va da sé che, in mancanza di simmetria, le soluzioni dell'equazione (4.1) e del problema di minimo sono in generale diverse. Per quanto appena osservato, infatti, il punto di minimo di J è la soluzione del problema (4.1) relativo non alla forma a, ma alla sua parte simmetrica.

4.6. Esercizio. Siano V un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert $\widetilde{V}$ e $\widetilde{u} \in \widetilde{V}$. Presentare il problema della proiezione su V di $\widetilde{u}$ nella forma di minimizzazione di un funzionale quadratico di tipo (4.7) e nella forma di equazione variazionale di tipo (4.1).

5. Risolvente e spettro

Qui e nel seguito I denota l'operatore identità dello spazio considerato.

5.1. Definizione. *Siano V uno spazio di Hilbert, $L \in \mathcal{L}(V)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Diciamo che λ appartiene all'insieme risolvente dell'operatore L quando l'operatore $L - \lambda I$ è un isomorfismo di V su V, cioè quando*

$$N(L - \lambda I) = \{0\} \qquad e \qquad R(L - \lambda I) = V. \tag{5.1}$$

In tal caso l'operatore $(L - \lambda I)^{-1}$ è detto il risolvente di L in λ. Chiamiamo invece spettro dell'operatore L il complementare dell'insieme risolvente.

Infine, diciamo che λ è un autovalore di L, oppure che appartiene allo spettro puntuale di L, quando $L - \lambda I$ non è iniettivo. In tal caso il nucleo $N(L - \lambda I)$ è detto autospazio di L associato all'autovalore λ e i suoi vettori non nulli sono detti autovettori (oppure autosoluzioni) associati a λ. ■

L'insieme risolvente, lo spettro e lo spettro puntuale di L saranno denotati con

$$\rho(L), \qquad \sigma(L) \qquad \text{e} \qquad \sigma_p(L)$$

rispettivamente. In ogni caso abbiamo $\sigma_p(L) \subseteq \sigma(L) = \mathbb{R} \setminus \rho(L)$. Se V ha dimensione finita, come è ben noto, si ha anche $\sigma_p(L) = \sigma(L)$. Questa uguaglianza è invece falsa in generale: può infatti accadere che valga la prima e non la seconda delle (5.1).

5.2. Esercizio. Dare un esempio di spazio di Hilbert V e di operatori $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(V)$ verificanti, con $\lambda = 0$, solo la prima e, rispettivamente, solo la seconda delle (5.1). ■

Una proprietà elementare è la seguente:

5.3. Proposizione. *Siano V uno spazio di Hilbert, $L \in \mathcal{L}(V)$ e $u_1, \ldots, u_n$ autovettori di L associati agli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ rispettivamente. Se questi autovalori sono tutti diversi fra loro, allora gli autovettori considerati costituiscono un insieme indipendente.* ■

Dimostrazione. Possiamo supporre $n \geq 2$. Siccome l'insieme $\{u_1\}$ è indipendente, esiste il massimo dei k tali che $\{u_1, \ldots, u_k\}$ sia un insieme indipendente: sia esso m . Risulta $1 \leq m \leq n$ e la tesi equivale all'uguaglianza $m = n$. Per assurdo sia $m < n$. Allora, per certi scalari $c_1, \ldots, c_m$, risulta

$$u_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i.$$

Segue allora

$$\lambda_{m+1} u_{m+1} = L u_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} c_i L u_i = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i u_i \quad \text{e} \quad \lambda_{m+1} u_{m+1} = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_{m+1} u_i$$

da cui, sottraendo, otteniamo

$$\sum_{i=1}^{m} c_i (\lambda_i - \lambda_{m+1}) u_i = 0.$$

Siccome $\{u_1, \ldots, u_m\}$ è indipendente e $\lambda_i \neq \lambda_{m+1}$ per $i = 1, \ldots, m$, deduciamo $c_i = 0$ per $i = 1, \ldots, m$. Dunque $u_{m+1} = 0$, in contrasto con la definizione di autovettore. ■

5.4. Esercizi

1. Siano V uno spazio di Hilbert, V_0 un suo sottospazio chiuso diverso da $\{0\}$ e da V e $L \in \mathcal{L}(V)$ l'operatore di proiezione ortogonale su V_0 . Determinare spettro, autovalori e autospazi di L .

2. Sia $L : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore che manda la generica successione $\{v_n\}$ nella successione $\{w_n\}$ definita da $w_n = v_{n+1}$ per ogni n . Decidere se il valore $\lambda = 0$ appartiene a $\rho(L)$, $\sigma(L)$, $\sigma_p(L)$.

3. Sia $L : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore che manda la generica successione $\{v_n\}$ nella successione $\{w_n\}$ definita da $w_1 = 0$ e $w_n = v_{n-1}$ se $n > 1$. Decidere se il valore $\lambda = 0$ appartiene a $\rho(L)$, $\sigma(L)$, $\sigma_p(L)$.

4. Sia $L : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ l'operatore che alla generica funzione v associa la sua simmetrica $x \mapsto v(-x)$. Determinare spettro, autovalori e autospazi di L.

5. Sia $L : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ l'operatore che alla generica funzione v associa la traslata $x \mapsto v(x-1)$. Dimostrare che L non ha autovalori.

6. Sia $L : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ l'operatore che alla generica funzione v associa la funzione costante a tratti Lv definita dalle formule

$$(Lv)(x) = \int_n^{n+1} v(y)\,dy \qquad \text{se } \ n < x < n+1 \quad (n \in \mathbf{Z}).$$

Determinare spettro, autovalori e autospazi di L.

7. Fissata una successione $\{c_n\}$ limitata, sia $L : \ell^2 \to \ell^2$ l'operatore che manda la generica successione $\{v_n\}$ nella successione $\{c_n v_n\}$. Determinare spettro, autovalori e autospazi di L.

8. Fissata $\psi \in C^0[0,1]$, sia $L : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ l'operatore di moltiplicazione per ψ, cioè l'operatore definito da $(Lv)(x) = \psi(x)v(x)$ q.o. in $]0,1[$. Determinare spettro, autovalori e autospazi di L. Trattare poi il caso più delicato in cui ψ è misurabile e limitata ma non necessariamente continua.

6. Operatori compatti

Diamo subito la definizione.

6.1. Definizione. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L \in \mathcal{L}(V;W)$. Diciamo che L è compatto quando, per ogni sottoinsieme limitato $B \subset V$, l'immagine $L(B)$ è un sottoinsieme relativamente compatto di W, cioè ha in W chiusura compatta.* ∎

Useremo il simbolo $\mathcal{K}(V;W)$ per denotare il sottospazio di $\mathcal{L}(V;W)$ costituito dagli operatori compatti e abbrevieremo $\mathcal{K}(V;V)$ in $\mathcal{K}(V)$.

6.2. Esercizi

1. Sia $L \in \mathcal{L}(V;W)$. Dimostrare che se $\dim R(L) < \infty$ allora L è compatto.

2. Dimostrare che la palla unitaria chiusa di V è compatta se e solo se V ha dimensione finita.

3. Dimostrare che l'identità $I : V \to V$ è compatta se e solo se V ha dimensione finita.

4. Siano $L \in \mathcal{L}(V;W)$ e $M \in \mathcal{L}(W;Z)$ e si consideri la composizione $ML \in \mathcal{L}(V;Z)$. Dimostrare che, se almeno uno dei due operatori L e M è compatto, allora anche ML è compatto.

5. Dimostrare che, se $L \in \mathcal{L}(V;W)$ e $v \in V$, sono equivalenti le affermazioni

a) L è compatto;

b) l'immagine tramite L della palla unitaria di V è un sottoinsieme relativamente compatto di W;

c) da $v_n \rightharpoonup v$ in V segue $Lv_n \to Lv$ in W;

d) da $v_n \rightharpoonup 0$ in V segue $Lv_n \to 0$ in W.

6. Siano $L, L_n \in \mathcal{L}(V;W)$ per $n \in \mathbb{N}$. Dimostrare che, se $L_n \to L$ in $\mathcal{L}(V;W)$ e se tutti gli operatori L_n sono compatti, allora anche L è compatto.

7. A ogni successione $\{c_n\}$ limitata si associ l'operatore $L : \ell^2 \to \ell^2$ che manda la generica successione $\{v_n\}$ nella successione $\{c_n v_n\}$. Dimostrare che L è compatto se e solo se $\{c_n\}$ è infinitesima. ■

Una classe importante di operatori compatti è costituita dagli operatori integrali che verificano le ipotesi date di seguito. Una funzione K nelle condizioni dell'esempio è detta nucleo del tipo di Hilbert–Schmidt.

6.3. Esempio. Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $K \in L^2(\Omega \times \Omega)$. Per $v \in L^2(\Omega)$ poniamo

$$(Lv)(x) = \int_\Omega K(x,y)\, v(y)\, dy, \qquad x \in \Omega.$$

Allora $(Lv)(x)$ è finito q.o. e $Lv \in L^2(\Omega)$. Inoltre l'operatore L di $L^2(\Omega)$ in sé che risulta così definito è compatto.

Dimostriamo queste affermazioni. Risulta per quasi ogni $x \in \Omega$

$$|(Lv)(x)| = \left|\bigl(K(x,\,\cdot\,), v\bigr)_{L^2(\Omega)}\right| \le \|K(x,\,\cdot\,)\|_{L^2(\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)} \tag{6.1}$$

e, sempre per quasi ogni x, $K(x,\,\cdot\,) \in L^2(\Omega)$ grazie al Teorema di Fubini, il che implica la prima affermazione. La seconda segue pure immediatamente: infatti, sempre per il Teorema di Fubini, la funzione $x \mapsto \|K(x,\,\cdot\,)\|^2_{L^2(\Omega)}$ è integrabile. Si ha precisamente

$$\int_\Omega |(Lv)(x)|^2\, dx \le \|K\|_{L^2(\Omega\times\Omega)}\, \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

per cui l'operatore L è anche continuo.

Supponiamo ora $u_k \rightharpoonup 0$ in $L^2(\Omega)$ e dimostriamo che $Lu_k \to 0$ in $L^2(\Omega)$. Questo dimostra la compattezza. Sia M tale che $\|u_k\| \le M$ per ogni n. Allora, grazie alla (6.1), abbiamo

$$|(Lu_k)(x)| \le M\, \|K(x,\,\cdot\,)\|_{L^2(\Omega)}$$

e il secondo membro, come funzione di x, appartiene a $L^2(\Omega)$. D'altra parte, siccome $u_k \rightharpoonup 0$, per tutti i valori x per cui $K(x,\,\cdot\,) \in L^2(\Omega)$, cioè q.o., risulta

$$\lim_{n\to\infty} (Lu_k)(x) = \lim_{n\to\infty} \bigl(K(x,\,\cdot\,), u_k\bigr)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Allora il Teorema della convergenza dominata implica $Lu_k \to 0$ in $L^2(\Omega)$. ∎

Il risultato precedente vale più in generale, e con la stessa dimostrazione, se Ω è un qualunque spazio di misura $\sigma-$ finito.

6.4. Esercizio. Sia L l'operatore di $L^2(0,1)$ in sé che a ogni $v \in L^2(0,1)$ associa la funzione Lv definita dalla formula

$$(Lv)(x) = \int_0^x v(t)\,dt, \quad x \in \,]0,1[.$$

Dimostrare che L è compatto.

6.5. Teorema. *Siano V e W due spazi di Hilbert e $L \in \mathcal{L}(V;W)$. Allora la compattezza di uno qualunque dei quattro operatori*

$$L : V \to W, \qquad L^* : W \to V, \qquad LL^* : W \to W, \qquad L^*L : V \to V$$

implica quella degli altri tre. ∎

Dimostrazione. Se L^* è compatto, allora L^*L è compatto per l'Esercizio 6.2.4.

Supponiamo ora L^*L compatto e dimostriamo che è compatto l'operatore L utilizzando l'Esercizio 6.2.5 e ricordando che le successioni debolmente convergenti sono limitate. Sia $v_n \rightharpoonup 0$ in V. Allora $L^*Lv_n \to 0$ in V perché L^*L è compatto e la convergenza forte $Lv_n \to 0$ in W segue subito dalla catena

$$\|Lv_n\|_W^2 = (Lv_n, Lv_n)_W = (L^*Lv_n, v_n)_V \le \|L^*Lv_n\|_V \, \|v_n\|_V \, .$$

Per concludere, occorre vedere che la compattezza di L implica quella di LL^* e che questa implica a sua volta quella di L^*. Per dimostrare tutto ciò basta applicare a L^* quanto abbiamo già provato e ricordare che $L^{**} = L$. ∎

Un punto fondamentale della teoria degli operatori compatti è il risultato seguente, noto anche come *alternativa di Fredholm*:

6.6. Teorema. *Siano V uno spazio di Hilbert e $L \in \mathcal{K}(V)$. Allora, fissato comunque $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, valgono le affermazioni seguenti:*

$$R(L - \lambda I) = N(L^* - \lambda I)^\perp \tag{6.2}$$

$$\dim N(L - \lambda I) = \dim N(L^* - \lambda I) < \infty. \ ∎ \tag{6.3}$$

Dimostrazione. Scrivendo $L - \lambda I = \lambda((1/\lambda)L - I)$ e osservando che $(1/\lambda)L$ è nelle stesse condizioni di L, ci riconduciamo immediatamente al caso $\lambda = 1$.

Dimostriamo dapprima che

$$\dim N(L - I) < \infty \tag{6.4}$$

che è parte della tesi. Siano infatti $V_0 = N(L - I)$ e B la palla unitaria chiusa di V_0. Per ogni $v \in B$ risulta allora $v = Lv \in L(B)$. Dunque $B \subseteq L(B) \subseteq \overline{L(B)}$. Siccome

$\overline{L(B)}$ è compatto (in quanto L è un operatore compatto) e B è un chiuso, anche B è compatto e V_0 ha dimensione finita.

Passiamo alla (6.2). Grazie al Corollario 3.2, basta dimostrare che l'immagine $R(L-I)$ è chiusa. Supponiamo dunque $Lu_n - u_n \to x$ in V e deduciamo che $x \in R(L-I)$. Osservato che il sottospazio $N(L-I)$ è chiuso, decomponiamo u_n in

$$u_n = v_n + w_n \qquad \text{con } \ v_n \in N(L-I) \quad \text{e} \quad w_n \in N(L-I)^\perp.$$

Dimostriamo ora che $\{w_n\}$ è una successione limitata. Ragionando per assurdo, supponiamo che $\{\|w_n\|\}$ contenga una sottosuccessione divergente che denotiamo ancora con $\{\|w_n\|\}$ per semplificare la scrittura. Ponendo $z_n = w_n / \|w_n\|$, abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \|Lz_n - z_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{\|Lw_n - w_n\|}{\|w_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\|Lu_n - u_n\|}{\|w_n\|} = 0. \tag{6.5}$$

Siccome $\|z_n\| = 1$ per ogni n, possiamo già supporre $z_n \rightharpoonup z$ per un certo $z \in V$, dato che a questo caso ci riconduciamo estraendo un'ulteriore sottosuccessione. Allora vale la relazione $Lz_n - z_n \rightharpoonup Lz - z$ che, abbinata alla (6.5), fornisce $Lz - z = 0$, cioè $z \in N(L-I)$. D'altra parte, per costruzione, $z_n \in N(L-I)^\perp$ per ogni n, da cui $z \in N(L-I)^\perp$. Dunque $z = 0$. Mostriamo ora che $\|z\| = 1$, controllando che $\{z_n\}$ converge fortemente. Risulta infatti $z_n = Lz_n - (Lz_n - z_n)$, da cui leggiamo la convergenza forte di $\{z_n\}$ grazie alla compattezza di L e alla (6.5). Abbiamo dunque una contraddizione e la dimostrazione della limitatezza della successione $\{w_n\}$ è conclusa.

Riprendiamo allora l'ipotesi $Lu_n - u_n \to x$, che scriviamo nella forma $Lw_n - w_n \to x$. Siccome $\{w_n\}$ è limitata, possiamo supporre, almeno per una sottosuccessione, $w_n \rightharpoonup w$ per un certo $w \in V$. Segue $Lw_n \rightharpoonup Lw$ (di fatto fortemente per la compattezza di L) e $Lw_n - w_n \rightharpoonup Lw - w$. Dunque $x = Lw - w \in R(L-I)$ e $R(L-I)$ è un chiuso.

Vediamo ora che

$$N(L-I) = 0 \qquad \text{se e solo se} \qquad R(L-I) = V \tag{6.6}$$

considerando una delle due implicazioni: supponiamo $N(L-I) = \{0\}$ e deduciamo che $R(L-I) = V$. Ragionando per assurdo, poniamo $V_1 = R(L-I)$, osservando che V_1 è chiuso per quanto abbiamo appena dimostrato, e supponiamo $V_1 \neq V$. Poniamo inoltre $L_1 = L_{|V_1}$. Chiaramente $L_1 \in \mathcal{K}(V_1; V)$. D'altra parte, se $v \in V_1$, risulta $L_1 v = (Lv - v) + v \in V_1$. Dunque $L_1 \in \mathcal{K}(V_1)$. Osserviamo poi che $R(L_1 - I) \neq V_1$: se infatti $v \in V \setminus V_1$, allora $(L-I)v \notin R(L_1 - I)$ perché in caso contrario avremmo $v = L_1 v - (L_1 v - v) \in V_1$.

Posto allora, per $n \geq 1$, $V_n = (L-I)^n V$ e ragionando per induzione, vediamo che la successione $\{V_n\}$ è strettamente decrescente e che la restrizione $L_{|V_n}$ appartiene a $\mathcal{K}(V_n)$ per ogni n. Con la convenzione $V_0 = V$, per ogni $n \geq 0$ il sottospazio $V_{n+1}^\perp \cap V_n$ non si riduce a $\{0\}$ e contiene dunque un vettore u_n di norma unitaria. Mostriamo che la successione $\{Lu_n\}$ non ha sottosuccessioni di Cauchy, contraddicendo in tal modo la compattezza di L. Per $n > m$ abbiamo infatti

$$\begin{aligned} &Lu_n - Lu_m = (Lu_n - u_n) - (Lu_m - u_m) + u_n - u_m \\ &Lu_n - u_n, Lu_m - u_m, u_n \in V_{m+1} \qquad \text{e} \qquad u_m \in V_{m+1}^\perp \end{aligned}$$

per cui $\|Lu_n - Lu_m\| \geq \|u_m\| = 1$.

Per vedere l'implicazione opposta supponiamo $R(L-I) = V$. Allora, per la (3.1),

$$N(L^* - I) = R(L-I)^\perp = V^\perp = \{0\}.$$

Applicando a L^* , che è compatto per il Teorema 6.5, la prima implicazione di (6.6) appena dimostrata deduciamo quindi $R(L^* - I) = V$ e, usando la (3.2), concludiamo $N(L-I) = V^\perp = \{0\}$.

Venendo infine alla (6.3), osserviamo che basta verificare che

$$\dim N(L^* - I) \leq \dim N(L-I). \tag{6.7}$$

Infatti, applicando la (6.7) all'operatore compatto L^* e ricordando che $L^{**} = L$, otteniamo la disuguaglianza opposta.

Per comodità denotiamo con d^* e d i due membri della (6.7) e, ragionando per assurdo, supponiamo $d < d^*$. Scegliamo un'applicazione lineare, iniettiva e non suriettiva $J : N(L-I) \to N(L^* - I)$, osservando che J è continua dato che opera fra spazi di dimensione finita. Consideriamo allora l'applicazione $T \in \mathcal{L}(V)$ definita da $T = L + JP$, ove $P \in \mathcal{L}(V)$ è la proiezione ortogonale su $N(L-I)$, e osserviamo che T è un operatore compatto. Infatti L è compatto e $R(JP)$ ha dimensione finita per cui anche JP è compatto.

Dimostriamo che l'operatore $T - I$ è iniettivo. Se infatti $(T-I)v = 0$, allora

$$(L-I)v + JPv = (T-I)v = 0, \qquad \text{da cui} \qquad (L-I)v = 0 \quad \text{e} \quad JPv = 0$$

in quanto $(L-I)v \in R(L-I)$ e $JPv \in N(L^* - I) = R(L-I)^\perp$. Da $(L-I)v = 0$ deduciamo $v \in N(L-I)$, per cui $Pv = v$ e l'uguaglianza $JPv = 0$ si scrive $Jv = 0$. Siccome J è iniettiva, concludiamo che $v = 0$.

Applicando la (6.6) a T vediamo che $R(T-I) = V$ e da questo deduciamo che $R(J) = N(L^* - I)$ arrivando così a una contraddizione. Sia infatti $w \in N(L^* - I)$ e sia $u \in V$ una soluzione dell'equazione $(T-I)u = w$. Allora $(L-I)u + JPu = w$. Osservato che $Lu - u \in R(L-I) = N(L^* - I)^\perp$, deduciamo $JPu = w$ così che Pu è una controimmagine di w tramite J . Ciò conclude la dimostrazione. ∎

6.7. Osservazione. Parte dell'enunciato precedente può essere riscritta in termini meno precisi ma più espliciti come segue. Detta d la dimensione di $N(L - \lambda I)$, perché l'equazione $(L - \lambda I)u = w$, di incognita u e dato w , abbia soluzioni è necessario e sufficiente che w verifichi d condizioni di ortogonalità fra loro indipendenti e la soluzione è determinata a meno di d costanti arbitrarie. In particolare, la soluzione esiste senza condizioni di compatibilità sul dato se e solo se si può dimostrare un teorema di unicità.

7. Lo spettro di un operatore compatto

7.1. Teorema. *Siano V uno spazio di Hilbert e $L \in \mathcal{K}(V)$. Allora ogni numero reale non nullo λ che non sia autovalore di L appartiene all'insieme risolvente. Inoltre lo* *spettro di L è limitato e ha al più 0 come punto di accumulazione. In particolare lo spettro di L è un insieme al più numerabile.* ■

Dimostrazione. La prima affermazione segue immediatamente dal Teorema 6.6. Se infatti $\lambda \neq 0$ e $N(L - \lambda I) = \{0\}$, allora le (6.3) e (6.2) implicano $N(L^* - \lambda I) = \{0\}$ e $R(L - \lambda I) = V$. Dunque $L - \lambda I$ è iniettivo e suriettivo e $\lambda \in \rho(L)$.

Dimostriamo ora la seconda parte. Ragionando per assurdo, sia $\{\lambda_n\}$ una successione iniettiva di autovalori di L verificante $\inf \lambda_n > 0$. Per ogni n scegliamo un autovettore v_n associato all'autovalore λ_n. Per la Proposizione 5.3 l'insieme di tali autovettori è indipendente. Posto allora $V_n = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_n\}$, la successione $\{V_n\}$ è strettamente crescente per cui, per ogni n, l'intersezione $V_n^{\perp} \cap V_{n+1}$ non si riduce a $\{0\}$ e contiene un vettore u_n di norma unitaria. Siano ora m e n con $m < n$. Risulta

$$\begin{aligned}
&Lu_n - Lu_m = (L - \lambda_{n+1} I)u_n - (L - \lambda_{m+1} I)u_m - \lambda_{m+1} u_m + \lambda_{n+1} u_n \\
&(L - \lambda_{n+1} I)u_n, \ (L - \lambda_{m+1} I)u_m, \ \lambda_{m+1} u_m \in V_n \qquad \text{e} \qquad \lambda_{n+1} u_n \in V_n^{\perp}.
\end{aligned}$$

Vale allora la disuguaglianza

$$\|Lu_n - Lu_m\| \geq \|\lambda_{n+1} u_n\| = |\lambda_{n+1}|.$$

Dunque, siccome $\{\lambda_n\}$ non è infinitesima, la successione $\{Lu_n\}$ non ha sottosuccessioni di Cauchy e la compattezza di L viene contraddetta. ■

Notiamo che l'ipotesi di compattezza è stata utilizzata solo alla fine della dimostrazione. Se si suppone solo che L sia un operatore lineare e continuo si arriva comunque a concludere che $\{\lambda_n\}$ non può avere sottosuccessioni divergenti. Dunque lo spettro puntuale è limitato. Più in generale si può dimostrare, nella sola ipotesi $L \in \mathcal{L}(V)$, che lo spettro $\sigma(L)$ è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}$.

7.2. Esercizi

1. Trovare un esempio di spazio V e di operatore $L \in \mathcal{K}(V)$ con spettro vuoto.

2. Dimostrare che, se V ha dimensione infinita e $L \in \mathcal{K}(V)$, allora $0 \in \sigma(L)$.

3. Costruire $L_1, L_2 \in \mathcal{K}(\ell^2)$ tali che $0 \in \sigma_p(L_1)$ e $0 \notin \sigma_p(L_2)$.

4. Per ogni sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}$ limitato e avente al più 0 come punto di accumulazione, costruire $L \in \mathcal{K}(\ell^2)$ tale che $\sigma(L) = A \cup \{0\}$.

5. Fissata $\psi \in C^0[0,1]$ non identicamente nulla, sia $L : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ l'operatore di moltiplicazione per ψ, cioè l'operatore definito da $(Lv)(x) = \psi(x)v(x)$ q.o. in $]0,1[$. Dimostrare che L non è compatto.

8. Il caso del risolvente compatto

Consideriamo uno spazio di Hilbert V e un operatore lineare L a valori in V e definito solo su un sottospazio vettoriale $D(L) \subseteq V$. In tali condizioni, pur non escludendo il caso $L \in \mathcal{L}(V)$, si dice comunemente che L è un *operatore non limitato in* V. In ipotesi di compattezza del risolvente in un punto vale un risultato in un certo senso analogo al precedente. Abbiamo infatti il seguente

8.1. Teorema. *Siano* V *uno spazio di Hilbert,* $L : D(L) \subseteq V \to V$ *un operatore lineare non limitato e* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *tale che* $N(L - \lambda_0 I) = \{0\}$ *e l'inverso* $K = (L - \lambda_0 I)^{-1}$ *appartenga a* $\mathcal{K}(V)$. *Allora, se* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_0\}$ *e* $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *sono legati dalla relazione*

$$\lambda - \lambda_0 = 1/\mu, \tag{8.1}$$

valgono le conclusioni seguenti:

$$N(L - \lambda I) = N(K - \mu I); \tag{8.2}$$

$$\textit{se} \quad N(L - \lambda I) = \{0\} \quad \textit{allora} \quad (L - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}(V). \ \blacksquare \tag{8.3}$$

Dimostrazione. Per $u \in D(L)$ le righe che seguono sono equivalenti fra loro:

$$(L - \lambda I)u = 0 \tag{8.4}$$

$$(L - \lambda_0 I)u = (\lambda - \lambda_0)u$$

$$\mu u = (L - \lambda_0 I)^{-1} u$$

$$(K - \mu I)u = 0 \tag{8.5}$$

e nella (8.5) possiamo anche sostituire la richiesta $u \in D(L)$ con $u \in V$ dato che, per $u \in V$, la (8.5) implica $u = (1/\mu)Ku \in D(L)$. Dunque (8.2) vale.

Supponiamo ora che $N(L - \lambda I) = \{0\}$ e, fissato $w \in V$, dimostriamo che l'equazione $(L - \lambda I)u = w$ è risolubile in $D(L)$. Procedendo come sopra e usando ancora la (8.1), vediamo che il problema posto equivale alla ricerca di $u \in V$ soluzione dell'equazione

$$(K - \mu I)u = -\mu K w.$$

Usando le ipotesi $\mu \neq 0$, $K \in \mathcal{K}(V)$ e $N(L - \lambda I) = \{0\}$ e tenendo conto della (8.2) e del Teorema 7.1, vediamo che l'ultima equazione ha una e una sola soluzione in V e l'equazione di partenza ha una e una sola soluzione. Questa è data dalla formula

$$u = -\mu (K - \mu I)^{-1} K w$$

per cui l'operatore che a w associa u, cioè $(L - \lambda I)^{-1}$, è anche continuo e compatto. $\blacksquare$

Se si estendono al caso esaminato le nozioni di spettro, eccetera, la combinazione dei risultati ottenuti dice che lo spettro di L è puramente puntuale e non ha punti di accumulazione e che ogni autospazio ha dimensione finita. Si noti però che, se λ non è un autovalore, l'isomorfismo algebrico $L - \lambda I : D(L) \to V$ ha inverso continuo e compatto, ma non è in generale continuo.

9. Operatori compatti autoaggiunti

Nel caso di un operatore $L \in \mathcal{K}(V)$ che sia anche autoaggiunto, cioè tale che $L^* = L$, valgono risultati molto più precisi, che estendono quasi pari pari varie proprietà delle matrici simmetriche, ad esempio, la diagonalizzabilità. Risultati in un certo senso simili si ottengono nell'ipotesi che sia compatto il risolvente, anziché l'operatore di partenza. Tuttavia, per esigenze di spazio, non tratteremo questo secondo caso e passeremo direttamente ai problemi variazionali.

9.1. Teorema. *Siano V uno spazio di Hilbert e $L \in \mathcal{L}(V)$ un operatore compatto e autoaggiunto. Allora valgono le conclusioni seguenti:*

$$\text{autospazi associati a autovalori diversi sono ortogonali;} \tag{9.1}$$

$$V = \overline{\operatorname{span}} \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(L)} N(L - \lambda I). \tag{9.2}$$

In altre parole, V è la somma hilbertiana degli autospazi di L. ■

Dimostrazione. La (9.1) è immediata. Siano infatti u e v due autovettori associati rispettivamente ai due autovalori diversi λ e μ. Allora

$$(\lambda - \mu)(u, v) = (\lambda u, v) - (u, \mu v) = (Lu, v) - (u, Lv) = (Lu - L^* u, v) = 0$$

da cui $(u, v) = 0$ dato che $\lambda \neq \mu$.

Per quanto riguarda la (9.2), essa è ovvia se $L = 0$ e di dimostrazione abbastanza complessa in caso contrario. Supponiamo dunque $L \neq 0$ e procediamo per tappe.

Passo 1. Dimostriamo innanzi tutto che esiste $u \in V$ tale che $(Lu, u) \neq 0$. Per assurdo, sia $(Lv, v) = 0$ per ogni $v \in V$. Allora dall'identità

$$\big(L(u + v), u + v\big) = (Lu, u) + (Lv, v) + (Lu, v) + (L^* u, v)$$

e dall'ipotesi $L^* = L$ deduciamo $(Lu, v) = 0$ per ogni $u, v \in V$, cioè $L = 0$.

Dalla proprietà dimostrata segue che l'estremo superiore

$$\lambda = \sup_{v \in V,\ \|v\| = 1} |(Lv, v)|, \tag{9.3}$$

che è finito in quanto L è continuo, è strettamente positivo e la seconda tappa consiste nel provare che almeno uno dei due numeri reali $\pm\lambda$ è un autovalore.

Passo 2. Possiamo supporre che esista $u \in V$ tale che $(Lu, u) > 0$ e dimostrare che λ è un autovalore in quanto, in caso contrario, si può considerare $-L$.

Dalla definizione di λ segue l'esistenza di una successione $\{u_n\}$ tale che $\|u_n\| = 1$ per ogni n e $(Lu_n, u_n) \to \lambda$. Grazie al Teorema di compattezza debole, possiamo supporre $\{u_n\}$ debolmente convergente, dato che a questo caso ci riconduciamo prendendo una sottosuccessione opportuna. Detto u il limite debole, segue immediatamente la disuguaglianza $\|u\| \le 1$ e ora dimostriamo prima che $\|u\| = 1$ e poi che u è un autovettore associato a λ.

Per assurdo sia $\|u\| < 1$. Siccome L è compatto, $Lu_n \to Lu$ da cui la possibilità di passare al limite

$$(Lu, u) = \lim_{n\to\infty} (Lu_n, u_n) = \lambda.$$

In particolare, $u \ne 0$ dato che $\lambda > 0$. Posto allora $w = u / \|u\|$, risulta $\|w\| = 1$ e

$$(Lw, w) = \frac{(Lu, u)}{\|u\|^2} = \frac{\lambda}{\|u\|^2} > \lambda$$

e questo contraddice la definizione di λ. Dunque $\|u\| = 1$.

Concludiamo questa tappa dimostrando che u è un autovettore associato a λ utilizzando un procedimento tipico del calcolo delle variazioni. Fissato ad arbitrio $v \in V$ e posto per t reale $w(t) = u + tv$, osserviamo che, per un certo $\delta > 0$, risulta $w(t) \ne 0$ per ogni $t \in [-\delta, \delta]$. Poniamo allora

$$\varphi(t) = \frac{(Lw(t), w(t))}{\|w(t)\|^2}, \qquad t \in [-\delta, \delta],$$

e osserviamo che $\varphi(0) = \lambda$ e $\varphi(t) \le \lambda$ per ogni $t \in [-\delta, \delta]$. Deduciamo che $\varphi'(0) = 0$ non appena sia chiaro che φ è derivabile. Usando di nuovo l'ipotesi $L^* = L$ vediamo che

$$\varphi(t) = \frac{(Lu, u) + 2t(Lu, v) + t^2(Lv, v)}{\|u\|^2 + 2t(u, v) + t^2 \|v\|^2}.$$

Dunque φ è derivabile e

$$\varphi'(0) = \frac{2(Lu, v)\ \|u\|^2 - 2(Lu, u)\,(u, v)}{\|u\|^4}.$$

Dalle uguaglianze $\varphi'(0) = 0$, $\|u\| = 1$ e $(Lu, u) = \lambda$ ricaviamo allora

$$(Lu, v) - \lambda\,(u, v) = 0$$

e, ricordando che v è arbitrario, concludiamo che $(L - \lambda I)u = 0$.

Passo 3. Dimostriamo infine la (9.2). Poniamo

$$W = \operatorname{span} \bigcup_{\lambda \in \sigma_p(L)} N(L - \lambda I), \qquad \text{e} \qquad Z = W^\perp$$

e controlliamo dapprima che L manda Z in se stesso. Sia infatti $z \in Z$. Per ogni $w \in W$, scelti $\lambda_i \in \mathbb{R}$ e $w_i \in N(L - \lambda_i I)$ in numero finito tali che $w = \sum_i w_i$, osservato che $w_i \in W$ per ogni i, abbiamo

$$(Lz, w) = (z, Lw) = \sum_i \lambda_i\,(z, w_i) = 0$$

e dall'arbitrarietà di $w \in W$ deduciamo $Lz \in W^{\perp} = Z$.

Poniamo ora $L_0 = L_{|Z}$ e verifichiamo che $L_0 = 0$ ragionando per assurdo. Quanto abbiamo appena dimostrato assicura che $L_0 \in \mathcal{L}(Z)$ e la compattezza di L implica quella di L_0. Infine è evidente che $L_0^* = L_0$. Allora, dato che stiamo supponendo $L_0 \neq 0$, possiamo applicare a L_0 i due passi precedenti e concludere che L_0 ha almeno un autovalore λ e un corrispondente autovettore u. Dunque $u \in Z \setminus \{0\}$ e $Lu = \lambda u$, da cui anche $u \in W$, così che l'ortogonalità dei sottospazi W e Z viene contraddetta.

Concludiamo ora la dimostrazione. Da $L_0 = 0$ segue $Z \subseteq N(L) \subseteq W$, da cui $Z = \{0\}$. Deduciamo che W è denso in V e quindi che la (9.2) vale. ∎

9.2. Osservazione. Segue banalmente la cosiddetta *decomposizione spettrale di* L. Siano infatti $u \in V$ e u_λ la proiezione ortogonale di u sul sottospazio chiuso $N(L - \lambda I)$. Allora valgono le formule

$$u = \sum u_\lambda \qquad \text{e} \qquad Lu = \sum \lambda u_\lambda$$

ove le somme sono estese, di fatto, ai valori $\lambda \in \sigma_p(L)$ e, se infinite, convergono nel senso della convergenza forte. La prima delle due viene dalla teoria generale delle proiezioni e la seconda deriva dalla prima, dalla continuità di L e dalla definizione stessa di u_λ.

9.3. Esercizio. Sia $\{c_n\}$ una successione reale infinitesima e sia $L \in \mathcal{K}(\ell^2)$ l'operatore che alla generica successione $\{v_n\}$ associa la successione $\{c_n v_n\}$. Verificare direttamente le conclusioni del Teorema 9.1 e dell'Osservazione 9.2.

10. Problemi variazionali di autovalori

Scopo di questo paragrafo è la trattazione del problema astratto individuato nell'introduzione. Lo ricondurremo, in opportune ipotesi di compattezza che bene si adattano a problemi ai limiti per equazioni di tipo ellittico, a un problema di autovalori per un operatore compatto. Premettiamo alcune nozioni propedeutiche sulle terne hilbertiane.

Siano V e H due spazi di Hilbert tali che V sia un sottospazio vettoriale di H. Assumiamo senz'altro le ipotesi standard

$$\text{l'immersione di } V \text{ in } H \text{ è continua} \tag{10.1}$$

$$V \text{ è denso in } H \tag{10.2}$$

e adottiamo le seguenti notazioni di uso corrente:

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_V \qquad |\cdot| = \|\cdot\|_H \qquad (\,\cdot\,,\,\cdot\,) = (\,\cdot\,,\,\cdot\,)_H \qquad \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle = {}_{V'}\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V. \tag{10.3}$$

La (10.1) significa naturalmente che è continua l'applicazione $v \mapsto v$ di V in H, cioè che la topologia di V è fine almeno quanto quella che V eredita da H come sottospazio, vale a dire che esiste una costante c tale che

$$|v| \leq c\,\|v\| \qquad \forall\, v \in V. \tag{10.4}$$

Consideriamo ora un elemento $u \in H$ qualunque. A u associamo canonicamente il funzionale $Iu : v \mapsto (u,v)$, $v \in V$, che risulta lineare e continuo su V, cioè un elemento di V', in quanto, grazie alla disuguaglianza di Schwarz e alla (10.4), per ogni $v \in V$ si ha

$$|(u,v)| \le |u|\,|v| \le |u|\,c\,\|v\| = (c|u|)\,\|v\|$$

Inoltre, se $u \in H$ e $Iu = 0$, allora $u = 0$ grazie alla (10.2). Dunque l'applicazione lineare I che al generico $u \in H$ associa il corrispondente $Iu \in V'$ è anche iniettiva. Decidiamo allora di interpretare I come identificazione, cioè di scrivere sistematicamente u anziché Iu. In tal modo H diventa un sottospazio di V' e abbiamo lo schema

$$V \subseteq H \subseteq V'. \tag{10.5}$$

Si usa riassumere tutto ciò nella frase: (V,H,V') *è una terna hilbertiana.*

10.1. Proposizione. *Sia (V,H,V') una terna hilbertiana. Allora vale l'identità*

$$\langle u,v\rangle = (u,v) \qquad \forall\, u \in H \quad \forall\, v \in V. \tag{10.6}$$

Inoltre l'immersione di H in V' è continua e V e H sono densi in V'. ∎

Dimostrazione. Ritorniamo alla situazione che precede l'identificazione di H con un sottospazio di V'. Per la definizione stessa di I risulta

$$\langle Iu,v\rangle = (u,v) \qquad \forall\, u \in H \quad \forall\, v \in V \tag{10.7}$$

e la (10.6) segue grazie all'identificazione $Iu = u$.

La continuità dell'immersione di H in V' è pure immediata. Grazie alla (10.4), abbiamo infatti per ogni $u \in H$ e $v \in V$

$$|\langle u,v\rangle| = |(u,v)| \le |u|\,|v| \le |u|\,c\,\|v\|\,.$$

Segue allora $\|u\|_* \le c|u|$ per ogni $u \in H$.

Vediamo infine le densità osservando che basta controllare che V è denso in V'. Ritornando ancora alla situazione che precede l'identificazione di H con un sottospazio di V', vediamo che il vero significato dell'affermazione da dimostrare è il seguente: il sottospazio $I(V)$ è denso in V'. Dimostriamo allora questo fatto controllando che l'unico elemento di V' ortogonale a $I(V)$ è l'elemento nullo.

Sia dunque $u' \in V'$ tale che $(u', Iv)_{V'} = 0$ per ogni $v \in V$. Detto R l'operatore di Riesz dello spazio V, risulta per ogni $v \in V$

$$(v, Ru') = \langle Iv, Ru'\rangle = (Iv, u')_{V'} = 0.$$

Scegliendo in particolare $v = Ru'$ deduciamo $Ru' = 0$ e quindi $u' = 0$. ∎

Ora riprendiamo il problema astratto che ci siamo proposti di studiare e lo formuliamo in termini precisi. I dati sono una terna hilbertiana (V,H,V') e una forma a bilineare e continua su $V \times V$ e il problema è il seguente:

$$\begin{aligned} &\textit{dati } \lambda \in \mathbb{R} \textit{ e } F \in V' \textit{ trovare } u \in V \textit{ tale che} \\ &a(u,v) = \lambda\,(u,v) + \langle F,v\rangle \qquad \forall\, v \in V. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Accanto al problema posto, ne consideriamo altri due, detti *problema omogeneo associato* e, rispettivamente, *problema aggiunto*. Essi si ottengono sostituendo la (10.8) con le due equazioni variazionali

$$a(u,v) = \lambda\ (u,v) \qquad \forall\, v \in V \tag{10.9}$$

e rispettivamente

$$a_*(u,v) = \lambda\ (u,v) \qquad \forall\, v \in V \tag{10.10}$$

ove a_* è la forma aggiunta di a definita nella (4.3).

Diamo infine i concetti relativi alla teoria spettrale.

10.2. Definizione. *Nelle ipotesi e con le notazioni introdotte, diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ appartiene all'insieme risolvente quando per ogni $F \in V'$ il problema* (10.8) *ha una e una sola soluzione $u \in V$ e l'applicazione $F \mapsto u$ è un isomorfismo di V' su V, mentre diciamo che λ appartiene allo spettro quando non appartiene all'insieme risolvente. Diciamo poi che λ è un autovalore, oppure che appartiene allo spettro puntuale, se il problema omogeneo associato* (10.9) *ha almeno una soluzione $u \neq 0$ e chiamiamo autospazio l'insieme delle soluzioni e autovettore oppure autosoluzione ciascuna delle soluzioni non nulle.* ∎

L'enunciato che segue contiene i risultati astratti che applicheremo alla teoria variazionale dei problemi ai limiti per equazioni di tipo ellittico.

10.3. Teorema. *Sia (V,H,V') una terna hilbertiana tale che l'immersione di V in H sia compatta. Sia inoltre a una forma bilineare e continua su $V \times V$ verificante la seguente condizione di coercività (debole): esistono $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ tali che*

$$a(v,v) + \lambda_0 |v|^2 \geq \alpha\, \|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V. \tag{10.11}$$

Siano infine $\lambda \in \mathbb{R}$ e $F \in V'$. Allora valgono le conclusioni seguenti:

i) *λ è autovalore per* (10.9) *se e solo se è autovalore per* (10.10) *e gli autospazi dei due problemi hanno dimensione finita e uguale;* (10.12)

ii) *il problema* (10.8) *ha soluzioni se e solo se $\langle F, u_* \rangle = 0$ per ogni soluzione u_* del problema aggiunto* (10.10)*;* (10.13)

iii) *lo spettro è puramente puntuale, non ha punti di accumulazione ed è incluso nella semiretta $]-\lambda_0, +\infty[$.* (10.14)

Se, in aggiunta, $a_* = a$, allora due qualunque autovettori u e v associati ad autovalori diversi verificano

$$a(u,v) = (u,v) = 0, \tag{10.15}$$

e il sottospazio di V generato dall'unione di tutti gli autospazi è denso in ciascuno dei tre spazi V, H e V'. Più precisamente, H è la somma hilbertiana degli autospazi e, se muniamo V del nuovo prodotto scalare definito dalla formula

$$((u,v)) = a(u,v) + \lambda_0\, (u,v), \qquad u,v \in V, \tag{10.16}$$

anche V gode della stessa proprietà. ■

Dimostrazione. Denotiamo con $R \in \mathcal{L}(V'; V)$ l'operatore di Riesz dello spazio V, con con I_V l'identità di V e con I l'immersione di V in V', così che valgono le formule

$$\langle Iu, v \rangle = \langle Iv, u \rangle = (u, v) \qquad \forall\, u, v \in V.$$

Siano poi $L, L_* \in \mathcal{L}(V; V')$ associati alle forme a e a_* rispettivamente, così che

$$\langle Lu, v \rangle = a(u, v), \qquad \langle L_* u, v \rangle = a_*(u, v) \qquad \text{e} \qquad \langle L_* u, v \rangle = \langle Lv, u \rangle \qquad \forall\, u, v \in V$$

e le prime due affermazioni dell'enunciato del teorema possono essere riformulate nel modo seguente

$$i) \quad \dim N(L - \lambda I) = \dim N(L_* - \lambda I) < \infty \tag{10.17}$$

$$ii) \quad F \in (L - \lambda I)(V) \quad \text{se e solo se} \quad \langle F, u_* \rangle = 0 \quad \forall\, u_* \in N(L_* - \lambda I). \tag{10.18}$$

Poniamo poi

$$L_0 = L + \lambda_0 I \qquad \text{e} \qquad K = L_0^{-1} I \tag{10.19}$$

osservando che la definizione di K ha senso e fornisce un operatore lineare e continuo di V in sé in quanto L_0 è un isomorfismo di V su V' grazie al Teorema di Lax–Milgram. Per lo stesso motivo è un isomorfismo di V su V' l'operatore $L - \lambda I$ per ogni $\lambda \le -\lambda_0$, il che prova l'ultima affermazione della (10.14).

Osserviamo subito che $K \in \mathcal{K}(V)$. Infatti, decomposto I in $I = I_2 I_1$ ove i due fattori sono l'immersione di H in V' e, rispettivamente, quella di V in H, dalla continuità di I_2 e dalla compattezza di I_1 segue la compattezza di I e quindi anche quella di K.

Il ruolo svolto dall'operatore K è quindi analogo a quello del risolvente compatto in un punto e la dimostrazione del teorema consiste, sostanzialmente, nel collegare autovalori, autospazi, eccetera, dei due operatori L e K, nonché dei rispettivi aggiunti. Per questo poniamo, per $\lambda \ne -\lambda_0$,

$$\mu = 1/(\lambda + \lambda_0) \tag{10.20}$$

osservando che $\mu \ne 0$ e che ogni $\mu \ne 0$ ha la forma (10.20) per $\lambda \ne -\lambda_0$ opportuno.

Per quanto riguarda gli aggiunti, valgono le formule

$$L^* = R L_* R, \qquad I^* = RIR \qquad \text{e} \qquad (L - \lambda I)^* = R(L_* - \lambda I)R$$

grazie alla Proposizione 4.2.

Abbiamo inoltre

$$K - \mu I_V = -\mu L_0^{-1}(L - \lambda I) \qquad \text{e} \qquad (K - \mu I_V)^* = R(L_* - \lambda I) R \bigl(-\mu L_0^{-1}\bigr)^*. \tag{10.21}$$

Infatti

$$\begin{aligned} K - \mu I_V &= L_0^{-1} I - \mu I_V = -\mu L_0^{-1} \left(L_0 I_V - \frac{1}{\mu} I \right) \\ &= -\mu L_0^{-1} \bigl(L_0 - (\lambda + \lambda_0) I \bigr) = -\mu L_0^{-1} (L - \lambda I) \end{aligned}$$

e la seconda segue prendendo gli aggiunti.

Detto ciò, la (10.17) e le prime due affermazioni della (10.14) sono conseguenze immediate della teoria degli operatori compatti: basta infatti applicare a K il Teorema 7.1 e osservare che il valore $\mu = 0$ ora non interviene.

Proviamo ora l'alternativa di Fredholm espressa dalla (10.18), che segue immediatamente dalle affermazioni che ora enunciamo e dimostriamo.

i) Il problema da risolvere equivale a $-\mu L_0^{-1}(L-\lambda I)u = -\mu L_0^{-1}F$, cioè, grazie alla prima delle (10.21), all'equazione $(K-\mu I_V)u = -\mu L_0^{-1}F$.

ii) Risulta $u_* \in N(L_* - \lambda I)$ se e solo se $(L_* - \lambda I)u = 0$, cioè, grazie alla seconda delle (10.21), se e solo se $R^{-1}(K-\mu I_V)^*(-1/\mu)L_0^* R^{-1}u_* = 0$, cioè se e solo se $(-1/\mu)L_0^* R^{-1}u_* \in N\bigl((K-\mu I_V)^*\bigr)$.

iii) L'elemento $-\mu L_0^{-1}F$ appartiene all'immagine di $K-\mu I_V$ se e solo se vale l'uguaglianza $(-\mu L_0^{-1}F, v_*)_V = 0$ per ogni $v_* \in N\bigl((K-\mu I_V)^*\bigr)$ grazie al Teorema 7.1.

iv) Vale l'uguaglianza $\langle F, u_* \rangle = (\,(-\mu L_0^{-1})F, v_*)_V$ con $v_* = (-1/\mu)L_0^* R^{-1}u_*$ in quanto

$$\begin{aligned}\langle F, u_* \rangle &= (F, R^{-1}u_*)_{V'} = (R^{-1}u_*, F)_{V'} = (R^{-1}u_*, (-1/\mu)L_0(-\mu L_0)F)_V \\ &= (\,(-\mu L_0^{-1})^* R^{-1}u_*, (-1/\mu)L_0 F)_V = (\,(-1/\mu)L_0 F, v_*)_V .\end{aligned}$$

Ciò conclude la dimostrazione della (10.18).

Passiamo alle ultime affermazioni dell'enunciato, iniziando dalla (10.15) nell'ipotesi $a_* = a$. Se u e v sono associati agli autovalori distinti λ e μ , abbiamo

$$(\lambda-\mu)(u,v) = a(u,v) - a(v,u) = 0$$

da cui $(u,v) = 0$ e anche $a(u,v) = \lambda\,(u,v) = 0$.

Controlliamo ora che, grazie alle ipotesi di continuità, simmetria e coercività fatte sulla forma a , la (10.16) definisce effettivamente un prodotto scalare in V equivalente a quello preesistente. Risulta infatti per ogni $v \in V$

$$(\!(v,v)\!) \ge \alpha \, \|v\|^2 \qquad \text{e} \qquad (\!(v,v)\!) \le (M + |\lambda_0| c)\, \|v\|^2$$

ove M e c sono la costante di continuità della forma a e dell'immersione di V in H rispettivamente. Allora le (10.15) dicono che gli autospazi sono ortogonali sia in H , sia in V , purché V sia munito del prodotto scalare (10.16).

L'ultima verifica necessaria per concludere la dimostrazione riguarda le densità. Siccome V è denso sia in H sia in V' , basta controllare che il sottospazio W di V generato dall'unione degli autospazi è denso in V . Dimostriamo allora che K è autoaggiunto rispetto alla nuova struttura hilbertiana di V data dalle (10.16). Per ogni $u, v \in V$ risulta

$$(\!(Ku,v)\!) = \langle L_0 K u, v \rangle = \langle L_0 L_0^{-1} I u, v \rangle = \langle I u, v \rangle = (u,v)$$

da cui immediatamente $(\!(Ku,v)\!) = (\!(Kv,u)\!)$.

Il Teorema 9.1 assicura allora che V è la somma hilbertiana degli autospazi di K , e ciò implica immediatamente che W è denso in V . Infatti ai due valori $\mu = 0$ e

$\lambda = -\lambda_0$, eccezionali nel discorso in questione, non sono associati autospazi dato che K e L_0 sono operatori iniettivi e, d'altra parte, grazie alla prima delle (10.21), gli autospazi di K associati agli autovalori $\mu \neq 0$ coincidono ordinatamente con gli autospazi di L associati agli autovalori $\lambda \neq -\lambda_0$. ∎

10.4. Osservazione. Consideriamo, in particolare, il caso in cui a è simmetrica e V ha dimensione infinita. Siccome ogni autospazio ha dimensione finita, lo spettro è infinito e la (10.14) assicura che gli autovalori possono essere ordinati in una successione monotona divergente a $+\infty$. In tali condizioni è comodo ripetere il generico autovalore λ nella successione m volte se m è la dimensione dell'autospazio V_λ corrispondente e scegliere in V_λ una base ortogonale rispetto al prodotto scalare di H. Osservato che due qualunque vettori $u, v \in V_\lambda$ verificano $a(u,v) = \lambda\,(u,v)$, la base di V_λ considerata è ortogonale anche rispetto al prodotto scalare di V dato dalla (10.16). In tal modo vengono costruite una successione reale $\{\lambda_n\}$ monotona non decrescente e divergente e una successione $\{u_n\}$ di elementi non nulli di V tali che, per ogni n, il numero reale λ_n e il vettore u_n sono un autovalore e un corrispondente autovettore, tutti gli autovalori sono presenti nella successione e la successione degli autovettori genera sia V sia H in senso hilbertiano. Allora ogni elemento di V si scrive nella forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(u) u_n \qquad \text{con} \qquad c_n(u) = \frac{a(u,u_n) + \lambda_0\,(u,u_n)}{a(u_n,u_n) + \lambda_0 |u_n|^2}$$

e ogni elemento di H si scrive nella forma

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(u) u_n \qquad \text{con} \qquad c_n(u) = \frac{(u,u_n)}{|u_n|^2}$$

le serie essendo convergenti in V e in H rispettivamente. Naturalmente, se $u \in V$, il valore di $c_n(u)$ dato dalle due formule deve essere lo stesso. Questo fatto, che non ha bisogno di essere dimostrato, può tuttavia essere controllato immediatamente. Abbiamo infatti per ogni $v \in V$

$$a(v,u_n) + \lambda_0\,(v,u_n) = a(u_n,v) + \lambda_0\,(u_n,v) = (\lambda + \lambda_0)(u_n,v) = (\lambda + \lambda_0)(v,u_n)$$

per cui, scegliendo prima $v = u$ e poi $v = u_n$ e dividendo membro a membro, concludiamo. Si noti inoltre che λ_0 può essere sostituito da un qualunque valore $\lambda' \geq \lambda_0$.

Vediamo infine che anche gli elementi di V' possono essere sviluppati in serie di autosoluzioni. Preso infatti $F \in V'$ ad arbitrio e posto $w = L_0^{-1} F$, abbiamo, nel senso della convergenza in V',

$$F = L_0 w = L_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n(w) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(w) L_0 u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda_0) c_n(w) u_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(F) u_n$$

ove abbiamo posto $c_n(F) = (\lambda_n + \lambda_0) c_n(w)$. Ciò mostra l'esistenza dello sviluppo. L'espressione dei coefficienti direttamente in termini di F è la seguente:

$$\begin{aligned} c_n(F) &= (\lambda_n + \lambda_0) c_n(w) = (\lambda_n + \lambda_0) \frac{a(w,u_n) + \lambda_0\,(w,u_n)}{a(u_n,u_n) + \lambda_0 |u_n|^2} \\ &= (\lambda_n + \lambda_0) \frac{\langle F, u_n \rangle}{(\lambda_n + \lambda_0)|u_n|^2} = \frac{\langle F, u_n \rangle}{|u_n|^2}. \end{aligned}$$

10.5. Esercizi

1. Sia $\{c_n\}$ una successione reale tale che $\inf_n c_n > 0$ e si denoti con V lo spazio vettoriale delle successioni reali $v = \{v_n\}$ tali che $\{c_n v_n\} \in \ell^2$ munito della norma definita dall'uguaglianza

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 v_n^2.$$

Posto $H = \ell^2$, si dimostri che (V, H, V') è una terna hilbertiana.

Si consideri inoltre lo spazio W ottenuto sostituendo $1/c_n$ a c_n nella definizione di V, si dimostri che H è incluso in W con immersione continua e immagine densa e si costruisca un isomorfismo di W su V', così che la terna hilbertiana precedente può essere identificata alla terna (V, H, W).

Si controlli infine l'equivalenza delle affermazioni seguenti: *a*) l'immersione di V in H è compatta; *b*) l'immersione di H in V' è compatta; *c*) l'immersione di V in V' è compatta; *d*) la successione $\{c_n\}$ diverge.

2. Con le notazioni dell'esercizio precedente, si supponga $\{c_n\}$ divergente e si prenda come forma a il prodotto scalare di V. Verificare direttamente tutte le conclusioni del Teorema 10.3.

3. Sia (V, H, V') una terna hilbertiana. Dimostrare che la compattezza di una qualunque delle tre immersioni di V in H, di H in V' e di V in V' implica quella delle altre due.

4. Mostrare, costruendo un esempio, che le ipotesi dell'ultima parte del Teorema 10.3 non possono garantire, nel caso della dimensione infinita, che la successione delle dimensioni degli autospazi sia limitata. Mostrare, anzi, che questa può essere una arbitraria successione di interi positivi.

5. Sapendo dell'esistenza degli sviluppi in serie di autosoluzioni nel caso simmetrico, ritrovare l'alternativa di Fredholm e costruire formule esplicite per le soluzioni del problema (10.8) con $F = \sum_n d_n u_n$ e $u = \sum_n c_n u_n$, ove i d_n si intendono dati e i c_n sono le incognite.

6. Considerato ancora il caso simmetrico, imitare quanto è stato fatto nella dimostrazione del Teorema 9.1 e controllare che l'estremo inferiore

$$\lambda_1 = \inf_{v \in V,\ |v|=1} a(v, v)$$

è finito ed è un minimo, che ogni punto di minimo è un autovettore associato all'autovalore λ_1 e che λ_1 è il minimo degli autovalori. Si dice comunemente che λ_1 è il *primo autovalore*.

7. Sempre nel caso simmetrico, si supponga che la successione $\{u_n\}$ sia normalizzata in H, cioè che $|u_n| = 1$ per ogni n, e si consideri la serie formale $\sum_n c_n u_n$ la quale, come è ben noto, converge in H se e solo se $\sum c_n^2 < \infty$. Dimostrare che la serie stessa converge in V oppure in V' se e solo se valgono le condizioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n + \lambda_0) c_n^2 < \infty \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^2}{\lambda_n + \lambda_0} < \infty$$

rispettivamente.

Capitolo II

Spazi di Sobolev

Se il dato di un'equazione differenziale è irregolare, non ci si può aspettare l'esistenza di soluzioni classiche dell'equazione stessa e ha senso cercare solo soluzioni in un qualche senso generalizzato. Il problema che si pone in modo naturale è allora quello di estendere la nozione di derivata a funzioni irregolari, in particolare a funzioni definite a meno di insiemi di misura nulla, quali le funzioni di $L^2(\Omega)$, che sono classi di equivalenza di funzioni anziché funzioni definite punto per punto. Chiaramente la definizione usuale è del tutto inadatta, come si vede già nel caso monodimensionale: cambiando una funzione derivabile nel punto che si vuole considerare, si ottiene una funzione discontinua e la derivabilità è necessariamente compromessa; d'altro canto la nuova funzione ottenuta è identificata alla precedente, dato che con quella coincide q.o. La definizione usuale di derivata, dunque, dipende dal rappresentante della classe di equivalenza e non solo dalla classe stessa.

Un modo di risolvere il problema sollevato è l'introduzione degli spazi di Sobolev, i cui elementi sono (classi di) funzioni che, in un opportuno senso generalizzato, posseggono derivate fino ad un certo ordine. Alla loro introduzione è conveniente premettere alcune nozioni riguardanti le distribuzioni e le loro derivate.

Nel seguito sarà sempre inteso che Ω denoti un aperto (non vuoto) di $\mathbb{R}^n$. Inoltre useremo le notazioni che ora precisiamo. Per multi–indice intendiamo un vettore $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ le cui componenti sono interi non negativi. In tal caso poniamo

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} \quad \text{ove} \quad D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{e} \qquad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n .$$

1. Distribuzioni e funzioni

Sia $u \in L^2(\Omega)$. Alla funzione u associamo il funzionale Iu definito dalla formula

$$Iu : v \mapsto \int_\Omega uv \, dx, \qquad v \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{1.1}$$

ove $\mathcal{D}(\Omega)$ è lo spazio definito da

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{ v \in C^\infty(\Omega) : \ v \text{ è a supporto compatto} \} .$$

Ricordiamo che una funzione v è detta *a supporto compatto* quando esiste un compatto K incluso in Ω tale che $v = 0$ in $\Omega \setminus K$ e che $\mathcal{D}(\Omega)$ è un sottospazio denso di $L^2(\Omega)$.

Chiaramente, Iu è un funzionale lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$. Inoltre Iu è continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$ se $\mathcal{D}(\Omega)$ è munito della topologia indotta dallo spazio $L^2(\Omega)$. A maggior ragione, Iu è continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$ se $\mathcal{D}(\Omega)$ è munito di una topologia più fine di quella, in particolare, se $\mathcal{D}(\Omega)$ è munito della sua "topologia naturale". L'introduzione di questa topologia è piuttosto laboriosa per cui ci limitiamo a definire la convergenza che essa induce. Sebbene si tratti di una topologia non metrizzabile, rimane vero il risultato che vale per gli spazi metrici: una funzione definita in $\mathcal{D}(\Omega)$ e, ad esempio, a valori reali è continua se e solo se è continua per successioni. La definizione che diamo, dunque, è coerente con le conclusioni che si trarrebbero a partire dall'introduzione della topologia di $\mathcal{D}(\Omega)$.

1.1. Definizione. *Siano* $\{v_k\}$ *una successione in* $\mathcal{D}(\Omega)$ *e* $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. *Si dice che* $\{v_k\}$ *converge a* v *in* $\mathcal{D}(\Omega)$, *e si scrive* $v_k \to v$ *in* $\mathcal{D}(\Omega)$, *quando valgono le due condizioni*

$$D^\alpha v_k \to D^\alpha v \text{ uniformemente in } \Omega \text{ per ogni multi–indice } \alpha \tag{1.2}$$

$$\text{esiste un compatto } K \subset \Omega \text{ tale che } v_k = 0 \text{ in } \Omega \setminus K \text{ per ogni } k. \tag{1.3}$$

Si dice che un funzionale lineare $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathrm{I\!R}$ *è continuo su* $\mathcal{D}(\Omega)$, *oppure che è una distribuzione su* Ω , *quando* u *è continuo per successioni, cioè quando*

$$v_k \to v \quad \text{in } \mathcal{D}(\Omega) \qquad \text{implica} \qquad \lim_{k\to\infty} \langle u, v_k \rangle = \langle u, v \rangle. \ \blacksquare \tag{1.4}$$

Naturalmente $\langle u, v \rangle$ denota, come sempre, il valore del funzionale u nel punto v . Ora introduciamo la cosiddetta *convergenza nel senso delle distribuzioni* considerando, per fissare le idee, il caso di una successione, ma è chiaro che la definizione che diamo si adatta al caso in cui la successione è sostituita da una famiglia di distribuzioni dipendente ad esempio da un parametro reale. La nozione di serie si ottiene poi considerando, come sempre, il limite della successione delle ridotte. Anche la convergenza nel senso delle distribuzioni è indotta da una topologia, che però non costruiamo.

1.2. Definizione. *Con* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *denotiamo lo spazio vettoriale delle distribuzioni su* Ω *munito della convergenza definita come segue: una successione* $\{u_k\}$ *di distribuzioni converge alla distribuzione* u , *e in tal caso scriviamo* $u_n \to u$ *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$, *quando*

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, v \rangle = \langle u, v \rangle \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega). \ \blacksquare \tag{1.5}$$

1.3. Osservazione. Riprendiamo ora la (1.1). Siccome $v_k \to v$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ implica $v_k \to v$ in $L^2(\Omega)$, il funzionale Iu associato alla funzione $u \in L^2(\Omega)$ è continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$, cioè è una distribuzione su Ω . Inoltre, siccome $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $L^2(\Omega)$, dalla condizione $Iu = 0$, che significa che u è ortogonale a $\mathcal{D}(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, segue $u = 0$, così che l'applicazione lineare $I : L^2(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ che a ogni $u \in L^2(\Omega)$ associa la distribuzione Iu è iniettiva. D'ora in poi interpretiamo I come un'identificazione, denotiamo cioè la distribuzione Iu ancora con u . Abbiamo dunque

$$L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \langle u, v \rangle = \int_\Omega uv \, dx \qquad \forall\, u \in L^2(\Omega) \quad \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

e la nozione di distribuzione appare come una generalizzazione di quella di funzione di quadrato sommabile, così come la dualità tra $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathcal{D}(\Omega)$ diventa una generalizzazione del prodotto scalare di $L^2(\Omega)$.

Notiamo che, con qualche complicazione aggiuntiva per quanto riguarda la dimostrazione dell'iniettività della corrispondenza, lo stesso discorso si ripete se $L^2(\Omega)$

è sostituito dallo spazio $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ delle funzioni *localmente sommabili in* Ω, cioè delle funzioni misurabili in Ω e sommabili su tutti i compatti inclusi in Ω. Osservato che $L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per $1 \le p \le \infty$, abbiamo allora le immersioni

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \qquad 1 \le p \le \infty$$

e la formula

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv\, dx \qquad \forall\, u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \quad \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega). \ ■$$

Anche per facilitare la costruzione di esempi di distribuzioni che non sono funzioni è conveniente introdurre la nozione di supporto di una distribuzione. Dalla definizione stessa risulterà chiaro che esso è un sottoinsieme chiuso rispetto a Ω e che il supporto di una funzione continua u, cioè di una funzione di $L^2(\Omega)$ che ammette un rappresentante continuo (necessariamente unico, dopo di che è a questo che facciamo riferimento), è la chiusura in Ω dell'insieme in cui u non si annulla, così che le funzioni a supporto compatto sono proprio quelle il cui supporto (nel senso delle distribuzioni) è un sottoinseme compatto di Ω. Occorre premettere la definizione di restrizione di una distribuzione a un aperto $\omega \subset \Omega$. La formula ovvia

$$\int_\omega u\,|_\omega\, v\, dx = \int_\Omega u \widetilde{v}\, dx \qquad \forall\, u \in L^2(\omega) \quad \forall\, v \in \mathcal{D}(\omega),$$

ove $\widetilde{v}$ è il *prolungamento triviale di* v definito dalle condizioni $\widetilde{v} = v$ in ω e $\widetilde{v} = 0$ in $\Omega \setminus \omega$, suggerisce la seguente

1.4. Definizione. *Siano* $\omega \subseteq \Omega$ *un aperto e* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. *La restrizione di* u *a* ω *è la distribuzione* $u|_\omega$ *che verifica*

$${}_{\mathcal{D}'(\omega)}\langle u\,|_\omega, v \rangle_{\mathcal{D}(\omega)} = {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle u, \widetilde{v} \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}(\omega). \ ■$$

Notiamo allora che, se $u \in L^2(\Omega)$, la restrizione $u|_\omega$ coincide con l'usuale restrizione di u all'aperto ω ed è, quindi, ancora una funzione.

1.5. Definizione. *Il supporto di una distribuzione* $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *è il sottoinsieme* $\operatorname{supp} u$ *di* Ω *caratterizzato dalla condizione seguente: un punto* $x \in \Omega$ *non appartiene a* $\operatorname{supp} u$ *quando esiste un intorno aperto* $\omega \subseteq \Omega$ *di* x *tale che* $u|_\omega = 0$. ■

Molte distribuzioni importanti diverse dalla funzione nulla hanno supporto di misura nulla e nessuna di esse può essere una funzione. Se, infatti, u è una funzione, ad esempio di $L^2(\Omega)$, ogni punto $x \in \Omega \setminus \operatorname{supp} u$ ha un intorno in cui u è nulla q.o. Ciò implica $u = 0$ q.o. nel complementare del supporto e, se questo ha misura nulla, deduciamo $u = 0$.

L'esempio più semplice è quello della *massa di Dirac* $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definita dalla formula

$$\langle \delta, v \rangle = v(0), \qquad v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{1.6}$$

il cui supporto è ridotto all'origine; analogamente si definisce la massa di Dirac concentrata in un punto x_0 di un aperto Ω.

Un altro esempio è la seguente distribuzione $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbb{R}^2} \rho_\alpha(x,y) D^\alpha v(x,y,0)\, dx\, dy, \qquad v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3),$$

ove $m \geq 0$ è un intero e, per fissare le idee, $\rho_\alpha \in L^2(\mathbb{R}^2)$ per $|\alpha| \leq m$. Il supporto di u è incluso nell'iperpiano $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Analogamente si possono considerare integrali estesi a superfici curve oppure integrali di linea. ∎

Le distribuzioni condividono con le funzioni molte proprietà. Segnaliamo il risultato di *localizzazione* che enunciamo di seguito. Esso implica facilmente che una distribuzione che localmente è una funzione è essa stessa una funzione e che ogni distrubuzione $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è nulla nel complementare del suo supporto, cioè $u|_{\Omega \setminus \operatorname{supp} u} = 0$.

1.6. Teorema. *Siano $u_1, u_2 \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se u_1 e u_2 sono localmente uguali, cioè se per ogni punto $x \in \Omega$ esiste un intorno aperto $\omega \subseteq \Omega$ di x tale che $u_1|_\omega = u_2|_\omega$, allora $u_1 = u_2$.* ∎

Dimostrazione. Sia $u = u_1 - u_2$. Proviamo che $u = 0$. Sia $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ ad arbitrio e sia $K = \operatorname{supp} v$. Siccome K è un compatto, esiste un ricoprimento aperto finito $\{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ di K tale che $\omega_i \subseteq \Omega$ e $u|_{\omega_i} = 0$ per $i = 1, \ldots, m$. Ciò significa che da $\psi \in C^\infty(\Omega)$ e $\operatorname{supp} \psi \subset \omega_i$ segue ${}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle u, \psi \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = 0$. Detta $\{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$ una associata partizione dell'unità di classe C^∞ , abbiamo allora

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^m {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle u, \psi_i v \rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = 0. \ \blacksquare$$

1.7. Esercizi

1. Dimostrare che, se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $v = 0$ in un intorno di $\operatorname{supp} u$, allora $\langle u, v \rangle = 0$. Mostrare che, invece, la condizione $v|_{\operatorname{supp} u} = 0$ non è sufficiente per concludere che $\langle u, v \rangle = 0$.

2. Verificare che, se $u_k, u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, risulta $\sum_k u_k = u$ nel senso delle distribuzioni se e solo se, per ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, vale l'uguaglianza $\sum_k \langle u_k, v \rangle = \langle u, v \rangle$. Dedurre che, se $\sum_k u_k$ converge in $\mathcal{D}'(\Omega)$, allora $u_k \to 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3. Dimostrare che la serie $\sum_{k=1}^\infty c_k \sin kx$ converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qualunque sia la successione reale $\{c_k\}$ a crescita lenta, cioè tale che $c_k = O(k^p)$ per $k \to \infty$ per un certo $p \in \mathbb{R}$.

4. Sia $\{x_k\}$ una successione di punti di Ω convergente a un punto di $\partial\Omega$ oppure divergente. Detta δ_k la massa di Dirac concentrata in x_k , dimostrare che la serie $\sum_k c_k \delta_k$ converge in $\mathcal{D}'(\Omega)$ qualunque sia la successione reale $\{c_k\}$.

5. Sia $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} u = 1$. Posto $u_k(x) = k^n u(kx)$ per $k \geq 1$ intero e $x \in \mathbb{R}^n$, dimostrare che $u_k \to \delta$ nel senso delle distribuzioni.

6. Costruire una successione di funzioni $u_k \in L^1(\mathbb{R}^2)$ convergente nel senso delle distribuzioni alla distribuzione u definita dalla formula

$$\langle u, v \rangle = \int_{C_r} v\, ds, \qquad v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2),$$

ove C_r è la circonferenza di raggio r centrata nell'origine.

7. Sia χ_ε la funzione caratteristica di $\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$ e si consideri la funzione definita in $\mathbb{R}$ dalla formula $u_\varepsilon(x) = (1/x)\chi_\varepsilon(x)$. Dimostrare che, per $\varepsilon \to 0^+$, la famiglia $\{u_\varepsilon\}$ converge nel senso delle distribuzioni a una distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Verificare che u non è una funzione, mentre $u_{|\mathbb{R}\setminus\{0\}}$ lo è. ∎

L'Esercizio 1.7.1 assicura che, se il supporto di una distribuzione u è un compatto $K \subset \Omega$ e se ζ_1, ζ_2 sono due funzioni di $\mathcal{D}(\Omega)$ che valgono 1 in un intorno di K, allora

$$\langle u, \zeta_1 v\rangle = \langle u, \zeta_2 v\rangle \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue che quella che diamo di seguito è una buona definizione.

1.8. Definizione. *Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\operatorname{supp} u$ sia un compatto incluso in Ω. Allora il prolungamento triviale di u è la distribuzione $\widetilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definita dalla formula*

$$_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)}\langle \widetilde{u}, v\rangle_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)} = {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle u, \zeta v\,|_\Omega\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \tag{1.7}$$

ove $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$ vale 1 in un intorno di $\operatorname{supp} u$. ∎

2. Derivate

Se $u \in C^1(\Omega)$ e $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ allora vale la *formula di integrazione per parti*

$$\int_\Omega (D_i u) v \, dx = -\int_\Omega u (D_i v)\, dx, \qquad \text{cioè} \qquad \langle D_i u, v\rangle = -\langle u, D_i v\rangle,$$

per $i = 1, \ldots, n$. Ciò suggerisce la seguente

2.1. Definizione. *Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, per $i = 1, \ldots, n$ definiamo $D_i u$ mediante la formula*

$$\langle D_i u, v\rangle = -\langle u, D_i v\rangle \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega). \blacksquare \tag{2.1}$$

In particolare, ogni funzione $u \in L^2(\Omega)$ possiede le derivate parziali $D_i u$ le quali, tuttavia, sono di solito solo distribuzioni e non più funzioni.

Se u è una funzione derivabile in senso classico, la sua derivata classica, che per un attimo denotiamo con $\partial_i u$, coincide con la derivata nel senso delle distribuzioni $D_i u$ ora introdotta se e solo se $\partial_i u$ verifica la formula di integrazione per parti. Ciò avviene senz'altro se u è di classe C^1. Abbiamo invece ad esempio $\operatorname{sign}' = 2\delta$ nel senso delle distribuzioni in $\mathbb{R}$, ove sign è la funzione segno, la cui derivata classica è la funzione nulla q.o.

2.2. Esercizi

1. Definire la derivata $D_r u$ di una distribuzione u nella direzione del generico versore $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_n)$ e dimostrare che vale la formula classica

$$D_r u = \sum_{i=1}^n r_i D_i u$$

senza ipotesi aggiuntive.

2. Verificare che, per ogni $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, risulta

$$D_i D_j u = D_j D_i u \qquad \text{per} \ \ i, j = 1, \ldots, n.$$

Vale cioè, automaticamente, il Teorema di Schwarz. Questo fatto consente l'uso del simbolo D^α anche per le derivate di ordine superiore delle distribuzioni.

3. Definire il prodotto ψu della generica distribuzione $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ per la generica funzione $\psi \in C^\infty(\Omega)$ e dimostrare la formula di Leibniz

$$D_i(\psi u) = (D_i \psi) u + u (D_i \psi).$$

Dedurre che $x\delta' = -\delta$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

4. Dimostrare che

$$u_k \to u \quad \text{in} \ \ \mathcal{D}'(\Omega) \qquad \text{implica} \qquad D^\alpha u_k \to D^\alpha u \quad \text{in} \ \ \mathcal{D}'(\Omega)$$

per ogni multi–indice α. In particolare si ottiene: *se* $u_k \rightharpoonup u$ *in* $L^2(\Omega)$, *allora* $D^\alpha u_k \to D^\alpha u$ *in* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *per ogni multi–indice* α.

5. Detta $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e posto per $u \in L^2(\Omega)$ e h reale non nullo

$$u_{i,h}(x) = \frac{u(x + h e_i) - u(x)}{h} \quad \text{q.o. in} \ \ \mathbb{R}^n,$$

dimostrare che $u_{i,h} \to D_i u$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ per $h \to 0$.

6. Dimostrare che, se una funzione u è lipschitziana in un aperto Ω, allora le sue derivate $D_i u$ nel senso delle distribuzioni coincidono q.o. con le rispettive derivate classiche. In particolare $D_i u \in L^\infty(\Omega)$ per $i = 1, \ldots, n$.

Osserviamo che, se Ω è un aperto sufficientemente regolare (lipschitziano), allora le funzioni lipschitziane in Ω sono tutte e sole quelle per cui $D_i u \in L^\infty(\Omega)$ per $i = 1, \ldots, n$. La dimostrazione di questo fatto, tuttavia, non è banale.

7. Dare un esempio di aperto Ω e di funzione u di classe C^1 in Ω, limitata con le sue derivate prime, ma non lipschitziana.

2.3. Osservazione. Si può naturalmente parlare di gradiente e di divergenza. Introdotta la dualità fra $\mathcal{D}'(\Omega)^n$ e $\mathcal{D}(\Omega)^n$ mediante la formula

$${}_{(\mathcal{D}')^n}\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}^n} = \sum_{i=1}^n {}_{\mathcal{D}'}\langle u_i, v_i \rangle_{\mathcal{D}} \qquad \text{se} \qquad \mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n),$$

abbiamo per definizione

$$\langle \nabla u, \mathbf{v} \rangle = -\langle u, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^n \tag{2.2}$$

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{u}, v \rangle = -\langle \mathbf{u}, \nabla v \rangle \qquad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}'(\Omega)^n \quad \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.3}$$

Equivalentemente si può scrivere $\nabla u = (D_1 u, \ldots, D_n u)$ e $\operatorname{div} \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n D_i u_i$. Il laplaciano è poi $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u = \sum_{i=1}^n D_i^2 u$.

2.4. Teorema. *Sia $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tale che $\nabla u = 0$ e si supponga Ω connesso. Allora u è una funzione costante.* ∎

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso particolare in cui Ω è un rettangolo $n-$ dimensionale e mostriamo innanzi tutto che lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ si può scrivere nella forma

$$\mathcal{D}(\Omega) = \operatorname{span}\{v_0\} + \sum_{i=1}^n D_i\bigl(\mathcal{D}(\Omega)\bigr)$$

per opportuna scelta di $v_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$. Decomponiamo infatti la generica $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ in

$$v = v_0 \int_\Omega v + \sum_{i=1}^n D_i v_i \tag{2.4}$$

con opportune $v_i \in \mathcal{D}(\Omega)$ (dipendenti da v).

Apriamo una parentesi per ricordare un fatto ben noto: siccome stiamo assumendo che Ω sia un rettangolo $n-$ dimensionale, ogni funzione $v \in C^\infty(\Omega)$ con integrale nullo può essere scritta come $\operatorname{div} \mathbf{v}$ con $\mathbf{v} \in C^\infty(\Omega)^n$. La (2.4) implica che, se v ha integrale nullo e supporto compatto, allora si può scegliere più precisamente $\mathbf{v}$ a supporto compatto. Se poi v non ha integrale nullo, l'uguaglianza $v = \operatorname{div} \mathbf{v}$ è necessariamente falsa per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^n$ e occorre un termine di correzione: si tratta di dimostrare che questo può essere scelto come indicato nella (2.4), con v_0 dipendente solo da Ω.

Assumiamo per semplicità $n = 2$, ma il caso generale è del tutto analogo. Sia dunque Ω il prodotto dei due intervalli $]a_i, b_i[$, $i = 1, 2$. Prendiamo v_0 della forma $v_0(x, y) = \alpha_1(x)\alpha_2(y)$ ove $\alpha_i \in \mathcal{D}(a_i, b_i)$ sono fissate tali che $\int_{a_i}^{b_i} \alpha_i = 1$.

Sia ora $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ ad arbitrio. Ad essa associamo le funzioni w_1 e w_2 seguenti

$$w_1(x, y) = \int_{a_1}^x \left(v(\xi, y) - \alpha_1(\xi) \int_{a_1}^{b_1} v(s, y)\, ds \right) d\xi$$
$$w_2(x, y) = \int_{a_2}^y \left(v(x, \eta) - \alpha_2(\eta) \int_{a_2}^{b_2} v(x, t)\, dt \right) d\eta$$

così che $w_1, w_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ e valgono le uguaglianze

$$v(x, y) = \partial_x w_1(x, y) + \alpha_1(x) \int_{a_1}^{b_1} v(s, y)\, ds \quad \text{e} \quad v(x, y) = \partial_y w_2(x, y) + \alpha_2(y) \int_{a_2}^{b_2} v(x, t)\, dt.$$

Combinando otteniamo

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \partial_x w_1(x, y) + \alpha_1(x) \int_{a_1}^{b_1} \left(\partial_y w_2(s, y) + \alpha_2(y) \int_{a_2}^{b_2} v(s, t)\, dt \right) ds \\ &= \partial_x v_1(x, y) + \partial_y v_2(x, y) + v_0(x, y) \int_\Omega v(s, t)\, ds\, dt \end{aligned}$$

con $v_1(x,y) = w_1(x,y)$ e $v_2(x,y) = \alpha_1(x) \int_{a_1}^{b_1} w_2(s,y)\,ds$.

Deduciamo ora dalla (2.4) che una distribuzione $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ con gradiente nullo è una funzione costante. Posto $c = \langle u, v_0 \rangle$, abbiamo infatti

$$\langle u, v \rangle = c \int_\Omega v + \sum_{i=1}^n \langle u, D_i v_i \rangle = \int_\Omega cv - \sum_{i=1}^n \langle D_i u, v_i \rangle = \int_\Omega cv = \langle c, v \rangle$$

così che u è la costante c.

Consideriamo ora il caso generale in cui Ω è un aperto qualunque. Per ogni punto $x \in \Omega$ scegliamo un rettangolo $n-$ dimensionale aperto $\omega \subseteq \Omega$ contenente x. Siccome il gradiente della restrizione $u|_\omega$ coincide con la restrizione del gradiente, la prima parte della dimostrazione assicura che $u|_\omega$ è una funzione costante, che denotiamo con c_ω. D'altra parte, se ω' e ω'' sono due dei rettangoli considerati e se la loro intersezione non è vuota, è chiaro che $c_{\omega'} = c_{\omega''}$, per cui, grazie all'ipotesi di connessione fatta su Ω, tutte le costanti c_ω coincidono con un'unica costante c. Allora la distribuzione u e la funzione costante c sono localmente uguali e il Teorema 1.6 di localizzazione assicura che $u = c$. ∎

2.5. Esercizi

1. Detta χ la funzione caratteristica del primo quadrante di $\mathbb{R}^2$, esprimere le dualità $\langle D_1\chi, v \rangle$ e $\langle D_2\chi, v \rangle$ mediante integrali, le dualità essendo fra $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ e $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Si noti che ciascuna delle due derivate ha supporto non vuoto e incluso nell'insieme di discontinuità di χ. Calcolare poi la derivata seconda mista $D_1 D_2 \chi$ e restringere tutto a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$. Il risultato mostra che una derivata di ordine superiore di una funzione può essere una funzione senza che lo siano le derivate di ordine intermedio.

2. Estesa la definizione di prolungamento triviale al caso dei valori vettoriali, dimostrare che, se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ha supporto compatto, allora il gradiente di $\widetilde{u}$ è il prolungamento triviale di ∇u.

3. Spazi di Sobolev

Iniziamo con una costruzione astratta.

3.1. Teorema. *Siano Z e V due spazi di Hilbert e $\mathcal{Z}$ uno spazio vettoriale munito anche di una topologia di Hausdorff e si supponga che Z sia un sottospazio vettoriale di $\mathcal{Z}$. Sia inoltre $L : V \to \mathcal{Z}$ un operatore lineare. Si supponga infine che l'immersione di Z in $\mathcal{Z}$ e l'operatore L siano continui per successioni. Poniamo*

$$W = \{v \in V : \; Lv \in Z\} \qquad \text{e, per } v \in W, \qquad \|v\|_W^2 = \|v\|_V^2 + \|Lv\|_Z^2. \tag{3.1}$$

Allora W è uno spazio di Hilbert incluso in V con immersione continua e la restrizione di L a W risulta un operatore continuo da W in Z. ∎

Dimostrazione. Chiaramente W è un sottospazio vettoriale di V e $\|\cdot\|$ è effettivamente una norma associata a un prodotto scalare, precisamente a quello definito dalla formula

$$(u,v)_W = (u,v)_V + (Lu, Lv)_Z, \qquad u, v \in W.$$

Verifichiamo la completezza di W. Sia $\{v_n\}$ una successione di Cauchy in W. Allora $\{v_n\}$ e $\{Lv_n\}$ sono successioni di Cauchy in V e in Z rispettivamente. Siano $v \in V$ e $z \in Z$ tali che

$$v_n \to v \quad \text{in } V \qquad \text{e} \qquad Lv_n \to z \quad \text{in } Z.$$

Dalle ipotesi di continuità fatte deduciamo

$$Lv_n \to Lv \quad \text{in } \mathcal{Z} \qquad \text{e} \qquad Lv_n \to z \quad \text{in } \mathcal{Z}.$$

Siccome $\mathcal{Z}$ è uno spazio di Hausdorff, deduciamo $Lv = z$. Riassumendo

$$v \in V, \qquad Lv \in Z, \qquad v_n \to v \quad \text{in } V \qquad \text{e} \qquad Lv_n \to Lv \quad \text{in } Z.$$

Dunque $v \in W$ e $v_n \to v$ in W e la completezza è dimostrata.

Abbiamo infine

$$\|v\|_V \le \|v\|_W \qquad \text{e} \qquad \|Lv\|_Z \le \|v\|_W \qquad \forall\, v \in W$$

da cui seguono le altre affermazioni dell'enunciato. ∎

La norma data dalla (3.1) è detta comunemente *norma del grafico* in quanto lo spazio ottenuto risulta isomorfo al grafico della restrizione considerata dell'operatore che interviene nella definizione.

Il teorema precedente si presta a definire numerosi spazi e noi vedremo due applicazioni importanti nelle quali, salvo avviso contrario, tutte le derivate che intervengono sono intese nel senso delle distribuzioni. La prima di esse riguarda gli spazi di Sobolev propriamente detti.

3.2. Definizione. *Fissato un intero $m \ge 0$, definiamo lo spazio di Sobolev*

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \; D^\alpha v \in L^2(\Omega) \text{ per } |\alpha| \le m\} \tag{3.2}$$

e lo muniamo della norma definita dall'uguaglianza

$$\|v\|_{m,\Omega}^2 = \sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha v\|_{L^2(\Omega)}^2 \,. \;\blacksquare \tag{3.3}$$

Detto N il numero dei multi–indici α tali che $|\alpha| \le m$ e applicando il Teorema 3.1 con $V = L^2(\Omega)$, $Z = L^2(\Omega)^N$, $\mathcal{Z} = \mathcal{D}'(\Omega)^N$ e L definito da $Lv = \{D^\alpha v\}_{|\alpha| \le m}$, otteniamo immediatamente il seguente

3.3. Teorema. *Lo spazio di Sobolev $H^m(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Inoltre $H^m(\Omega)$ è incluso in $L^2(\Omega)$ con immersione continua e, se $|\alpha| \le m$, l'operatore di derivazione D^α è continuo da $H^m(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$.* ∎

Chiaramente $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ per cui $\|\cdot\|_{0,\Omega} = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$; inoltre $H^{m+1}(\Omega) \subset H^m(\Omega)$ con immersione continua. Il caso che considereremo più spesso è il seguente:

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : \; \nabla v \in L^2(\Omega)^n\} \tag{3.4}$$

$$\|v\|_{1,\Omega}^2 = \int_\Omega \left(v^2 + |\nabla v|^2\right) dx \qquad \text{e} \qquad (u,v)_{1,\Omega} = \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx. \tag{3.5}$$

L'altra applicazione del Teorema 3.1, che interverrà nella teoria delle tracce, si ottiene prendendo $V = L^2(\Omega)^n$, $Z = L^2(\Omega)$, $\mathcal{Z} = \mathcal{D}'(\Omega)$ e $L = \operatorname{div}$. Abbiamo allora la definizione e il teorema enunciato di seguito.

3.4. Definizione. *Poniamo*

$$H(\operatorname{div},\Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n : \ \operatorname{div}\mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\} \tag{3.6}$$

e muniamo $H(\operatorname{div},\Omega)$ *della norma definita dall'uguaglianza*

$$\|\mathbf{v}\|^2_{H(\operatorname{div})} = \|\mathbf{v}\|^2_{0,\Omega} + \|\operatorname{div}\mathbf{v}\|^2_{0,\Omega} \,. \ \blacksquare \tag{3.7}$$

3.5. Teorema. *Lo spazio* $H(\operatorname{div},\Omega)$ *è uno spazio di Hilbert. Inoltre* $H(\operatorname{div},\Omega)$ *è incluso in* $L^2(\Omega)^n$ *con immersione continua e l'operatore* div *è continuo da* $H(\operatorname{div},\Omega)$ *in* $L^2(\Omega)$. $\blacksquare$

Chiaramente $H^1(\Omega)^n \subseteq H(\operatorname{div},\Omega)$ e nel caso monodimensionale i due spazi coincidono. Se $n > 1$, invece, gli spazi $H^1(\Omega)^n$ e $H(\operatorname{div},\Omega)$ sono effettivamente distinti. Consideriamo, ad esempio, il caso $\Omega = \,]-1,1[^2$. Allora la funzione $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2$ definita dalla formula $\mathbf{u}(x,y) = (0, \operatorname{sign} x)$ appartiene a $H(\operatorname{div},\Omega)$ dato che $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ come subito si verifica, mentre $\mathbf{u} \notin H^1(\Omega)^2$ dato che la derivata $D_x u_2$ non è una funzione. $\blacksquare$

Tornando agli spazi di Sobolev, consideriamo dapprima il caso $m = n = 1$ supponendo che Ω sia un intervallo aperto, limitato o meno. Abbiamo in proposito la caratterizzazione seguente:

3.6. Proposizione. *Sia* $u \in L^2(a,b)$. *Allora* $u \in H^1(a,b)$ *se e solo se* $u \in C^0(a,b)$ *ed esiste* $w \in L^2(a,b)$ *tale che*

$$u(y) = u(x) + \int_x^y w(t)\,dt \qquad \forall\, x,y \in \,]a,b[. \tag{3.8}$$

Inoltre $w = u'$ *necessariamente, per cui vale la formula fondamentale del calcolo.* $\blacksquare$

In altre parole, una funzione $u \in H^1(a,b)$ ha un (unico) rappresentante *assolutamente continuo* in ogni intervallo compatto incluso in $]a,b[$ e la derivata classica di questo (definita q.o.) è la derivata di u nel senso delle distribuzioni. Viceversa, se una funzione $u \in L^2(a,b)$ ha un rappresentante assolutamente continuo in ogni intervallo compatto incluso in $]a,b[$ e se la derivata classica di questo appartiene a $L^2(a,b)$, allora u appartiene a $H^1(a,b)$. Si noti che, se l'intervallo $]a,b[$ è limitato, il rappresentante continuo si prolunga per continuità alla chiusura $[a,b]$ e il prolungamento risulta assolutamente continuo in $[a,b]$.

Dimostrazione. Supponiamo che valga la formula (3.8) e dimostriamo che $w = u'$ e che $u \in H^1(a,b)$. Dalla (3.8) segue che u è del tipo

$$u(x) = C + \int_c^x w(t)\,dt$$

con $c \in \,]a,b[$ e $C \in \mathbb{R}$ e, siccome una costante ha derivata nulla, non è restrittivo supporre $C = 0$. Se $v \in \mathcal{D}(a,b)$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\langle u', v\rangle = -\langle u, v'\rangle &= -\int_a^b u(x)v'(x)\,dx \\
&= -\int_a^c u(x)v'(x)\,dx - \int_c^b u(x)v'(x)\,dx \\
&= \iint_{\{a<x<t<c\}} w(t)v'(x)\,dt\,dx - \iint_{\{c<t<x<b\}} w(t)v'(x)\,dt\,dx \\
&= \int_a^c w(t)\left(\int_a^t v'(x)\,dx\right)dt - \int_c^b w(t)\left(\int_t^b v'(x)\,dx\right)dt \\
&= \int_a^c w(t)v(t)\,dt + \int_c^b w(t)v(t)\,dt = \langle w, v\rangle.
\end{aligned}$$

Dunque $u' = w \in L^2(a,b)$ e $u \in H^1(a,b)$. Si noti che abbiamo provato anche l'ultima affermazione dell'enunciato.

Viceversa supponiamo $u \in H^1(a,b)$. Fissato $c \in \,]a,b[$ definiamo

$$v(x) = \int_c^x u'(t)\,dt, \qquad x \in \,]a,b[.$$

Per la prima parte della dimostrazione abbiamo $v' = u'$ e il Teorema 2.4 assicura che $u - v$ è una funzione costante C. Dunque $v + C$ è il rappresentante continuo di u. La (3.8) è poi immediata. Abbiamo infatti

$$u(y) - u(x) = v(y) - v(x) = \int_x^y u'(t)\,dt \qquad \forall\, x, y \in \,]a,b[. \ \blacksquare$$

3.7. Osservazione. La possibilità di trovare un rappresentante continuo cade invece se $n > 1$. Infatti una funzione di $H^1(\Omega)$ può non essere limitata, anzi può non essere limitata in alcun aperto incluso in Ω. Un esempio semplice si ottiene prendendo come Ω il disco di $\mathbb{R}^2$ di raggio $1/2$ centrato nell'origine. Se $0 < \alpha < 1/2$, la funzione $u(x) = \bigl|\ln|x|\bigr|^\alpha$, singolare nell'origine, appartiene a $H^1(\Omega)$. Infatti un facile controllo mostra che il suo gradiente in senso classico, definito in $\Omega \setminus \{0\}$, è di quadrato sommabile; d'altra parte esso coincide con il gradiente in Ω nel senso delle distribuzioni, come ora mostriamo. Se $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^2$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla u, \mathbf{v}\rangle = -\langle u, \operatorname{div}\mathbf{v}\rangle \\
&= -\iint_{\{|x|<1/2\}} u(x)\operatorname{div}\mathbf{v}(x)\,dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\{\varepsilon<|x|<1/2\}} u(x)\operatorname{div}\mathbf{v}(x)\,dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{\{\varepsilon<|x|<1/2\}} \nabla u(x)\cdot\mathbf{v}(x)\,dx - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\{|x|=\varepsilon\}} u(x)\mathbf{v}(x)\cdot\frac{x}{|x|}\,ds \\
&= \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\mathbf{v}(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Esempi analoghi in dimensione $n \geq 3$ si ottengono prendendo come Ω, ad esempio, la palla unitaria e $u(x) = |x|^{-\alpha}$ con $0 < \alpha < (n/2) - 1$ e mostrano che il risultato seguente, che enunciamo soltanto, è ottimale:

3.8. Teorema. *Se $m > n/2$ allora*

$$H^m(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

con immersione continua e ogni elemento di $H^m(\mathbb{R}^n)$ ha un rappresentante continuo e infinitesimo all'infinito.

Se $m = n/2$ allora

$$H^m(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, p \in [2, \infty[$$

con immersione continua.

Se infine $m < n/2$ allora

$$H^m(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \qquad \forall\, p \in [2, q]$$

con immersione continua, ove q è definito dalla formula

$$-\frac{n}{q} = m - \frac{n}{2}. \ \blacksquare$$

3.9. Osservazione. Nel primo caso la funzione u, definita solo a meno di insiemi di misura nulla, viene identificata con il suo rappresentante continuo, il quale gode di ulteriori proprietà di regolarità. Valgono infatti le conclusioni seguenti: *i*) se $m - (n/2)$ non è intero, scritta la decomposizione $m - (n/2) = k + \alpha$ con k intero e $\alpha \in]0,1[$, allora u è di classe C^k e le sue derivate di ordine k sono hölderiane di esponente α; *ii*) se $m - (n/2)$ è l'intero $k + 1$, allora u è di classe C^k e le sue derivate di ordine k sono hölderiane di ogni esponente $\alpha \in]0,1[$. $\blacksquare$

Ci limitiamo a controllare la prima affermazione del teorema nel caso $m = n = 1$ e la corrispondente proprietà enunciata nell'osservazione precedente.

Tenendo conto della Proposizione 3.6, dobbiamo solo mostrare che u (cioè il suo rappresentante continuo) tende a 0 all'infinito e stimare la sua norma del massimo. Siccome u è una funzione assolutamente continua in ogni intervallo compatto di $\mathbb{R}$, della stessa proprietà gode la funzione u^2, per la quale, dunque, vale la formula fondamentale del calcolo. La sua derivata classica è $2uDu$ ove Du è la derivata di u in senso classico. Ma Du coincide con u', derivata di u nel senso delle distribuzioni. Abbiamo allora

$$u^2(x) = u^2(0) + \int_0^x 2u(t)u'(t)\,dt \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Siccome $uu' \in L^1(\mathbb{R})$ dato che $u \in H^1(\mathbb{R})$, il secondo membro ha limite finito per $x \to +\infty$. Della stessa proprietà gode allora anche il primo membro $u^2(x)$. Siccome però

$u^2 \in L^1(\mathbb{R})$, il suo limite non può essere diverso da 0. Ciò mostra che u è infinitesima a $+\infty$ e allo stesso modo si ragiona per $x \to -\infty$.

Per stimare la norma del massimo applichiamo la formula fondamentale del calcolo

$$\begin{aligned} u^2(x) &= u^2(y) + \int_y^x 2u(t)u'(t)\,dt \\ &\le u^2(y) + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ u^2(t) + (u'(t))^2 \right\} dt = u^2(y) + \|u\|_{H^1}^2 . \end{aligned}$$

Prendendo la media rispetto a y sull'intervallo $[0, \ell]$ troviamo

$$u^2(x) \le \frac{1}{\ell} \int_0^\ell u^2(y)\,dy + \|u\|_{H^1}^2$$

e passando al limite per $\ell \to +\infty$ concludiamo

$$u^2(x) \le \|u\|_{H^1}^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dunque $\|u\|_{L^\infty} \le \|u\|_{H^1}$ e la continuità dell'immersione è provata.

Per dimostrare che u è hölderiana di esponente $1/2$ basta applicare la formula fondamentale del calcolo e la disuguaglianza di Schwarz:

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t)\,dt \right| \le |x-y|^{1/2} \, \|u'\|_{L^2} .$$

3.10. Esercizi

1. Dimostrare che, se $f_\alpha \in L^2(\Omega)$ per $|\alpha| \le m$, allora la formula

$$\langle F, v \rangle = \sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega f_\alpha D^\alpha v\,dx, \qquad v \in H^m(\Omega),$$

definisce un funzionale lineare e continuo su $H^m(\Omega)$ e che ogni funzionale lineare e continuo su $H^m(\Omega)$ è di questo tipo. La rappresentazione, tuttavia, è unica solo nel caso $m = 0$.

2. Dedurre dall'esercizio precedente che la convergenza debole $u_k \rightharpoonup u$ in $H^m(\Omega)$ equivale alla condizione

$$D^\alpha u_k \rightharpoonup D^\alpha u \quad \text{in} \quad L^2(\Omega) \qquad \text{per} \quad |\alpha| \le m.$$

4. Regole di calcolo

Per le funzioni di $H^1(\Omega)$ valgono alcune regole di calcolo. In sostanza possiamo dire che le formule classiche continuano a valere purché i loro due membri abbiano senso nel nuovo contesto. Premettiamo due lemmi. Il primo di questi estende alle funzioni di $H^1(\mathbb{R}^n)$ una proprietà ben nota nel caso delle funzioni regolari e la sua dimostrazione si ottiene regolarizzando per convoluzione. A questo proposito diamo qualche richiamo.

La convoluzione $u * v$ di due funzioni misurabili u e v in $\mathbb{R}^n$ e a valori scalari, ma le stesse cose si dicono se una delle due assume valori vettoriali, è definita da

$$(u * \rho)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\rho(y)\,dy \qquad \text{q.o. in } \mathbb{R}^n$$

non appena l'integrale esista per quasi ogni x. Si dimostra che ciò avviene ad esempio se $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$. In tal caso abbiamo anche

$$u * \rho \in L^2(\mathbb{R}^n) \qquad \text{e} \qquad \|u * \rho\|_{L^2} \le \|u\|_{L^2}\,\|\rho\|_{L^1}\,.$$

Fissata $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, valgono inoltre le proprietà enunciate di seguito: *i)* se $\operatorname{supp}\rho$ è incluso nella palla di raggio r centrata nell'origine, allora $\operatorname{supp}(u*\rho)$ è incluso nell'intorno di raggio r di $\operatorname{supp} u$; *ii)* se ρ è di classe C^1 con derivate prime in $L^1(\mathbb{R}^n)$, allora

$$\nabla(u * \rho) = u * \nabla\rho;$$

iii) fissata $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$ e posto per $k > 0$ intero

$$\rho_k(x) = k^n \rho(kx)$$

la successione $\{u * \rho_k\}$ converge a u in $L^2(\mathbb{R}^n)$; *iv)* con la notazione $\rho_s(x) = \rho(-x)$, vale la formula

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u * \rho)v\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(\rho_s * v)\,dx$$

per ogni $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

4.1. Lemma. *Se* $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, *allora* $\nabla(u * \rho) = \rho * \nabla u$. ∎

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n$. Con la notazione ρ_s introdotta sopra si ha

$$\begin{aligned} \big\langle \nabla(u * \rho), \mathbf{v} \big\rangle &= -\big\langle u * \rho, \operatorname{div}\mathbf{v} \big\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} (u * \rho)\operatorname{div}\mathbf{v}\,dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} u(\rho_s * \operatorname{div}\mathbf{v})\,dx = -\big\langle u, \rho_s * \operatorname{div}\mathbf{v} \big\rangle = -\big\langle u, \operatorname{div}(\rho_s * \mathbf{v}) \big\rangle \\ &= \big\langle \nabla u, \rho_s * \mathbf{v} \big\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot (\rho_s * \mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^n} (\rho * \nabla u) \cdot \mathbf{v} = \big\langle \rho * \nabla u, \mathbf{v} \big\rangle. \ \blacksquare \end{aligned}$$

Nel lemma successivo e nel seguito la scrittura $\omega \subset\subset \Omega$ significa che ω è un aperto limitato tale che $\overline{\omega} \subset \Omega$.

4.2. Lemma. *Per ogni* $u \in H^1(\Omega)$ *esiste una successione* $\{u_k\}$ *in* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *tale che*

$$u_k|_{\Omega} \to u \qquad \textit{in} \quad L^2(\Omega) \tag{4.1}$$

$$\nabla u_k|_{\omega} \to \nabla u|_{\omega} \qquad \textit{in} \quad L^2(\omega)^n \qquad \forall\, \omega \subset\subset \Omega. \ \blacksquare \tag{4.2}$$

Dimostrazione. Supponiamo dapprima Ω limitato e sia $\widetilde{u}$ il prolungamento triviale di u a tutto $\mathbb{R}^n$. Fissata una funzione $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int \rho = 1$, poniamo per $k > 0$

$$\rho_k(x) = k^n \rho(kx) \qquad \text{e} \qquad u_k = \widetilde{u} * \rho_k.$$

Per le proprietà della convoluzione abbiamo che $\{u_k\}$ tende a $\widetilde{u}$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e da ciò segue immediatamente la (4.1).

Per dimostrare la (4.2) fissiamo $\omega \subset\subset \Omega$ e scegliamo due aperti ω' e ω'' tali che

$$\omega \subset\subset \omega' \subset\subset \omega'' \subset\subset \Omega$$

e una funzione $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\zeta = 1 \quad \text{in } \omega' \qquad \text{e} \qquad \zeta = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \setminus \omega''.$$

Allora ζu ha supporto compatto in Ω e $\zeta\widetilde{u}$ è il prolungamento triviale di ζu. Per l'Esercizio 2.5.2, il gradiente di $\zeta\widetilde{u}$ è il prolungamento triviale del gradiente di ζu così che $\zeta\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Il Lemma 4.1 assicura allora che $\nabla(\rho_k * (\zeta\widetilde{u})) = \rho_k * \widetilde{\nabla(\zeta u)}$ e come sopra deduciamo che

$$\rho_k * \widetilde{\nabla(\zeta u)} \to \widetilde{\nabla(\zeta u)} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n)^n, \qquad \text{cioè} \qquad \nabla(\rho_k * (\zeta\widetilde{u})) \to \widetilde{\nabla(\zeta u)} \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n)^n.$$

Allora $\nabla(\rho_k * (\zeta\widetilde{u}))|_\omega \to \nabla(\zeta u)|_\omega$ in $L^2(\omega)^n$ e possiamo concludere rapidamente. Infatti $\zeta = 1$ in ω' e il supporto di ρ_k cade in un arbitrario intorno di 0 per k abbastanza grande, per cui in ω abbiamo $\nabla(\zeta u) = \nabla u$ e, per k grande, $\rho_k * (\zeta\widetilde{u}) = u_k$.

Se Ω non è limitato le funzioni costruite sopra non hanno necessariamente supporto limitato e occorre anche troncare. A questo scopo basta sostituire u_k con $u_k\eta_k$, ove $\eta_k(x) = \eta(|x|/k)$ e $\eta \in C^\infty[0,\infty[$ verifica $\eta = 1$ in $[0,1]$ e $\eta = 0$ in $[2,\infty[$. Infatti, la convergenza in $L^2(\Omega)$ è ancora assicurata in quanto $\|u_k\eta_k - u\| \le \|u_k - u\| \sup|\eta| + \|u\eta_k - u\|$; inoltre, fissato $\omega \subset\subset \Omega$, risulta $u_k\eta_k = u_k$ in ω per k grande. ∎

Sebbene si possano dare enunciati più generali, ci limitiamo ai risultati che seguono.

4.3. Proposizione. *Siano $u, v \in H^1(\Omega)$. Allora vale la formula di Leibniz*

$$\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v. \tag{4.3}$$

La stessa formula vale se $u \in H^1(\Omega)$, $v \in L^\infty(\Omega)$ e $\nabla v \in L^\infty(\Omega)^n$. ∎

Dimostrazione. Si noti che il secondo membro della (4.3) è una funzione, nel primo caso di $L^1(\Omega)^n$, di $L^2(\Omega)^n$ nel secondo.

Consideriamo dapprima un arbitrario aperto $\omega \subset\subset \Omega$. Applicato il Lemma 4.2 a u e costruite le corrispondenti u_k, scriviamo la (4.3) per u_k e v in ω, cioè

$$\nabla(u_k v) = v\nabla u_k + u_k\nabla v \qquad \text{in } \omega.$$

Ora prendiamo $k \to \infty$ nei due membri considerando solo il caso in cui $v \in H^1(\Omega)$ in quanto l'altro è analogo. Siccome $u_k \to u$ in $H^1(\omega)$, abbiamo

$$\begin{aligned} u_k v \to uv \quad &\text{in } L^1(\omega), \qquad \text{da cui} \qquad \nabla(u_k v) \to \nabla(uv) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\omega)^n \\ v\nabla u_k \to v\nabla u \quad &\text{in } L^1(\omega)^n, \qquad \text{da cui} \qquad v\nabla u_k \to v\nabla u \quad \text{in } \mathcal{D}'(\omega)^n \\ u_k\nabla v \to u\nabla v \quad &\text{in } L^1(\omega)^n, \qquad \text{da cui} \qquad u_k\nabla v \to u\nabla v \quad \text{in } \mathcal{D}'(\omega)^n \end{aligned}$$

e concludiamo che la (4.3) vale in ω.

Siccome i due membri della (4.3) sono due distribuzioni localmente uguali per quanto abbiamo appena dimostrato, la (4.3) stessa vale in Ω grazie al Teorema 1.6. ∎

4.4. Proposizione. *Sia* $\mathbf{G} : \Omega' \to \Omega$ *un omeomorfismo tale che le due applicazioni* $\mathbf{G}$ *e* $\mathbf{G}^{-1}$ *siano di classe* C^1 *e abbiano derivate prime limitate. Allora l'applicazione* $u \mapsto u \circ \mathbf{G}$ *è un isomorfismo di* $H^1(\Omega)$ *su* $H^1(\Omega')$ *e per* $i = 1, \ldots, n$ *valgono le formule*

$$D_i(u \circ \mathbf{G})(x') = \sum_{j=1}^{n} (D_j u)(\mathbf{G}(x')) D_i G_j(x') \quad \text{q.o. in } \Omega'. \; ■ \tag{4.4}$$

Dimostrazione. Innanzi tutto si osservi che $u \circ \mathbf{G}$ e il secondo membro della (4.4) appartengono a $L^2(\Omega')$. Tutto è dunque ricondotto alla sola dimostrazione della (4.4). Per questo applichiamo ancora il Lemma 4.2 e ne seguiamo le notazioni. Detta $J\mathbf{G}^{-1}$ la matrice jacobiana di $\mathbf{G}^{-1}$ e posto $M = \sup_\Omega |\det J\mathbf{G}^{-1}|$, abbiamo

$$\int_{\Omega'} |u_k \circ \mathbf{G} - u \circ \mathbf{G}|^2 \, dx' \le M \int_\Omega |u_k - u|^2 \, dx$$

per cui $u_k \circ \mathbf{G} \to u \circ \mathbf{G}$ in $L^2(\Omega')$. Deduciamo $D_i(u_k \circ \mathbf{G}) \to D_i(u \circ \mathbf{G})$ in $\mathcal{D}'(\Omega')$ e, grazie al Teorema 1.6, la (4.4) segue se dimostriamo che per ogni $\omega' \subset\subset \Omega'$ risulta

$$\big((D_j u_k) \circ \mathbf{G}\big) D_i G_j \to \big((D_j u) \circ \mathbf{G}\big) D_i G_j \qquad \text{in } L^2(\omega') \qquad \text{per } j = 1, \ldots, n.$$

Posto $\omega = \mathbf{G}(\omega')$ e $M'_{ij} = \sup_{\Omega'} |D_i G_j|$, abbiamo

$$\begin{aligned} &\int_{\omega'} \big| \big((D_j u_k) \circ \mathbf{G}\big) D_i G_j - \big((D_j u) \circ \mathbf{G}\big) D_i G_j \big|^2 \, dx' \\ &\le M'_{ij} \int_{\omega'} |(D_j u_k) \circ \mathbf{G} - (D_j u) \circ \mathbf{G}|^2 \, dx' \le M'_{ij} M \int_\omega |D_j u_k - D_j u|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Ma l'ultimo integrale tende a 0 per $k \to \infty$ dato che $\omega \subset\subset \Omega$. ∎

Segnaliamo che il risultato appena dimostrato si estende al caso delle trasformazioni bilipschitziane. Ciò comporta che ipotesi di tipo C^1 dovute all'uso della Proposizione 4.4 possono nel seguito essere generalizzate di conseguenza. Questa generalizzazione è utile per la teoria delle tracce in domini con frontiera solamente lipschitziana.

5. Tracce

Come abbiamo accennato nell'introduzione, siccome una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è definita solo a meno di insiemi di misura nulla, la sua restrizione a $\partial\Omega$ non ha senso e occorre definirne un buon surrogato. La soluzione di questo problema sta nel metodo del prolungamento di un operatore per continuità e si fonda sul seguente lemma di dimostrazione immediata:

5.1. Lemma. *Siano V e W due spazi di Hilbert, V_0 un sottospazio vettoriale denso in V e $L_0 : V_0 \to W$ un operatore lineare e continuo. Allora esiste uno e un solo operatore $L : V \to W$ lineare e continuo che prolunga L_0 .* ■

L'operatore L_0 sarà naturalmente $v \mapsto v_{|\partial\Omega}$ definito su un sottospazio di funzioni regolari fino al bordo, per le quali la restrizione ha senso, e il tutto funziona se si suppone che Ω sia un *aperto regolare*. Ciò significa che, localmente, la frontiera $\partial\Omega$, che qui e nel seguito è denotata con Γ, l'aperto stesso Ω e il complementare di $\overline{\Omega}$ si presentano come grafico, sopragrafico e sottografico di una funzione regolare. Ecco una definizione precisa.

5.2. Definizione. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$. Diciamo che Ω è regolare quando, per ogni $x \in \Gamma = \partial\Omega$, a meno di permutazioni e scambi delle coordinate vale la condizione seguente: posto $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, esistono un intorno aperto $\omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ di x', un numero reale $\delta > 0$ e una funzione $\psi \in C^1(\omega')$ tali che, posto*

$$\omega = \{(y', y_n) \in \omega' \times \mathbb{R} : \ |y_n - \psi(y')| < \delta\},$$

si abbia

$$\begin{aligned} \omega \cap \Gamma &= \{(y', y_n) \in \omega : \ y_n = \psi(y')\} \\ \omega \cap \Omega &= \{(y', y_n) \in \omega : \ y_n > \psi(y')\} \\ \omega \setminus \overline{\Omega} &= \{(y', y_n) \in \omega : \ y_n < \psi(y')\} . \ ■ \end{aligned}$$

5.3. Osservazione. Chiaramente, se Ω è regolare, per ogni $x \in \Gamma$ esistono due aperti $\omega, \omega_0 \subset \mathbb{R}^n$, intorni di x e dell'origine rispettivamente, e un omeomorfismo $\mathbf{G} : \omega_0 \to \omega$, dotato con il suo inverso di derivate continue e limitate, in modo che siano soddisfatte le condizioni

$$\mathbf{G}\left(\omega_0 \cap \partial\mathbb{R}^n_+\right) = \omega \cap \Gamma, \quad \mathbf{G}\left(\omega_0 \cap \mathbb{R}^n_+\right) = \omega \cap \Omega, \quad \mathbf{G}\left(\omega_0 \setminus \overline{\mathbb{R}^n_+}\right) = \omega \setminus \overline{\Omega},$$

ove $\mathbb{R}^n_+$ è il semispazio descritto dalla disuguaglianza $x_n > 0$. Infatti, con le notazioni della Definizione 5.2, possiamo prendere ad esempio

$$\omega_0 = \left(\omega' - x'\right) \times \left]-\delta, \delta\right[\qquad \text{e} \qquad \mathbf{G}(y', y_n) = \left(y' + x', y_n + \psi(y' + x')\right), \quad (y', y_n) \in \omega_0,$$

dopo aver rimpicciolito, se necessario, l'intorno ω' di x'.

Osserviamo inoltre che, sempre in riferimento alla Definizione 5.2, se si sostituisce la richiesta di regolarità C^1 fatta su ψ con l'ipotesi che ψ sia lipschitziana, si ottiene la definizione di aperto lipschitziano e segnaliamo che la teoria che svilupperemo nel caso degli aperti regolari può essere estesa al caso degli aperti lipschitziani, in particolare al caso dei poligoni di $\mathbb{R}^2$ e dei poliedri di $\mathbb{R}^3$. ■

L'applicazione del Lemma 5.1 comporta la dimostrazione di un risultato di densità. Preliminare a questo è il lemma seguente, di interesse autonomo:

5.4. Lemma. *Il sottospazio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ di $H^m(\mathbb{R}^n)$ è denso in $H^m(\mathbb{R}^n)$.* ■

Dimostrazione. Detto $H^m_c(\mathbb{R}^n)$ il sottospazio di $H^m(\mathbb{R}^n)$ costituito dalle funzioni di $H^m(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto, dimostriamo che $H^m_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $H^m(\mathbb{R}^n)$ e che $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $H^m_c(\mathbb{R}^n)$.

Sia $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$. Fissata una funzione $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\zeta(x) = 1$ per $|x| < 1$, definiamo la successione $\{u_k\}$ mediante la formula

$$u_k(x) = \zeta(x/k)u(x).$$

Allora $u_k \in H^m_c(\mathbb{R}^n)$, come si vede subito iterando la formula di Leibniz. Inoltre, usando anche il Teorema della convergenza dominata, si controlla facilmente che $u_k \to u$ in $H^m(\mathbb{R}^n)$ per $k \to \infty$. Infatti per $|\alpha| \le m$ risulta

$$D^\alpha u(x) = \zeta(x/k)D^\alpha u(x) + \sum_{\beta,\gamma} c_{\alpha\beta\gamma} k^{-|\beta|} D^\beta \zeta(x/k)\, D^\gamma u(x)$$

ove $c_{\alpha\beta\gamma}$ sono certe costanti e la somma è estesa a un certo insieme di coppie (β, γ) di multi–indici ciascuna delle quali verifica senz'altro le disuguaglianze $|\beta| > 0$ e $|\gamma| \le m$. Ciò prova la prima delle due densità.

Sia ora $u \in H^m_c(\mathbb{R}^n)$. Fissata una funzione $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\int \rho = 1$, poniamo per $k > 0$ intero

$$\rho_k(x) = k^n \rho(kx) \qquad \text{e} \qquad u_k = u * \rho_k.$$

Iterando l'applicazione del Lemma 4.1, abbiamo

$$D^\alpha u_k = (D^\alpha u) * \rho_k \qquad \text{per } |\alpha| \le m$$

così che $D^\alpha u_k \to D^\alpha u$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ per $|\alpha| \le m$. Dunque $u_k \to u$ in $H^m(\mathbb{R}^n)$ e la seconda densità è dimostrata. ■

Il prossimo risultato preliminare riguarda la possibilità di prolungare le funzioni di $H^1(\Omega)$ a funzioni definite in tutto $\mathbb{R}^n$.

5.5. Lemma. *Se Ω è il semispazio $\mathbb{R}^n_+$ oppure un aperto limitato e regolare, allora esiste un operatore $\mathcal{P}$ lineare e continuo da $H^1(\Omega)$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $(\mathcal{P}u)_{|\Omega} = u$ per ogni $u \in H^1(\Omega)$.* ■

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso del semispazio e supponiamo $n > 1$, ma il caso $n = 1$ si dimostra con varianti ovvie. La via che seguiamo è quella del cosiddetto *prolungamento per riflessione*. A ogni $v \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, associamo le due funzioni $v^*, v^\star \in L^2(\mathbb{R}^n)$ definite dalle formule

$$v^*(x) = v(x_1, \ldots, x_{n-1}, |x_n|) \qquad \text{e} \qquad v^\star(x) = v(x_1, \ldots, x_{n-1}, |x_n|) \operatorname{sign} x_n$$

osservando che le due applicazioni $v \mapsto v^*$ e $v \mapsto v^\star$ sono lineari e continue da $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ora dimostriamo che, se $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$, allora $u^* \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e che l'applicazione che a ogni $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ associa la corrispondente u^* è lineare e continua. Chiaramente basta provare le due formule

$$D_i u^* = (D_i u)^* \quad \text{per } i < n \qquad \text{e} \qquad D_n u^* = (D_n u)^\star. \tag{5.1}$$

Poniamo per comodità $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Per $i < n$ e $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ risulta

$$\begin{aligned} \big\langle D_i u^*, v \big\rangle &= -\big\langle u^*, D_i v \big\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n} u^*(x) D_i v(x)\, dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n_+} u(x', x_n)\big(D_i v(x', x_n) + D_i v(x', -x_n)\big)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} u(x) D_i \overline{v}(x)\, dx \end{aligned}$$

ove abbiamo posto $\overline{v}(x) = v(x', x_n) + v(x', -x_n)$. Fissata $\zeta \in C^\infty([0, \infty[)$ tale che $\zeta(t) = 0$ per $t \leq 1$ e $\zeta(t) = 1$ per $t \geq 2$ e posto $\zeta_k(x', x_n) = \zeta(k x_n)$, possiamo usare ripetutamente il Teorema della convergenza dominata e continuare la catena precedente come segue

$$\begin{aligned} \big\langle D_i u^*, v \big\rangle &= -\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x)\zeta_k(x) D_i \overline{v}(x)\, dx = -\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x) D_i(\zeta_k \overline{v})(x)\, dx \\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n_+} D_i u(x)(\zeta_k \overline{v})(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} D_i u(x) \overline{v}(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (D_i u)^*(x) v(x)\, dx. \end{aligned}$$

Ciò prova la prima delle (5.1).

La seconda si dimostra con lo stesso procedimento, ma con una complicazione supplementare dovuta al fatto che ζ_k non è più indipendente dalla variabile rispetto alla quale stiamo derivando. Con calcoli analoghi abbiamo infatti

$$\big\langle D_n u^*, v \big\rangle = -\int_{\mathbb{R}^n_+} u(x) D_n \overline{v}(x)\, dx$$

ove ora $\overline{v}(x) = v(x', x_n) - v(x', -x_n)$. Dunque

$$\begin{aligned} \big\langle D_n u^*, v \big\rangle &= -\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x)\zeta_k(x) D_n \overline{v}(x)\, dx \\ &= -\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x) D_n(\zeta_k \overline{v})(x)\, dx + \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x)\overline{v}(x) D_n \zeta_k(x)\, dx \end{aligned}$$

e si arriva alla formula voluta se si dimostra che l'ultimo limite è nullo. Siccome vale la disuguaglianza $|\overline{v}(x)| \le M|x_n|$ per $M \ge 0$ opportuno, posto $M_1 = \sup|\zeta'|$ e detto R il raggio di una palla che include il supporto di $\overline{v}$, abbiamo

$$\begin{aligned}\Bigl|\int_{\mathbb{R}^n_+} u(x)\overline{v}(x) D_n\zeta_k(x)\,dx\Bigr| &\le \int_{\{0<x_n<2/k\}} |u(x)|\,|\overline{v}(x)||k\zeta'(kx_n)|\,dx \\ &\le 2MM_1 \int_{\{|x|\le R\}\cap\{0<x_n<2/k\}} |u(x)|\,dx\end{aligned}$$

e l'ultimo integrale tende a 0 per $k \to \infty$.

Passiamo ora all'altro caso, supponiamo cioè che Ω sia un aperto limitato e regolare. Per ogni punto $x \in \Gamma$ costruiamo l'applicazione $\mathbf{G}$ data dall'Osservazione 5.3 supponendo, senza ledere la generalità, che il dominio di $\mathbf{G}$ sia, ad esempio, una palla di centro l'origine. Siccome Γ è un compatto di $\mathbb{R}^n$, ci riconduciamo al caso di un numero finito di omeomorfismi $\mathbf{G}_j : \omega_{0j} \to \omega_j$, $j = 1,\dots,r$, di classe C^1 con i corrispondenti inversi, tali che la famiglia $\{\omega_j,\ 1 \le j \le r\}$ ricopra Γ. Poniamo per comodità $\omega_0 = \Omega$ e introduciamo una partizione dell'unità $\{\psi_j,\ 0 \le j \le r\}$ di classe C^1 relativa al compatto $\overline{\Omega}$ e al suo ricoprimento aperto $\{\omega_j,\ 0 \le j \le r\}$. Abbiamo allora

$$u = \sum_{j=0}^{r} u_j \qquad \text{ove} \qquad u_j = u\psi_j \quad \text{per } j = 0,\dots,r$$

e dobbiamo prolungare tutte le u_j e stimare le norme dei relativi prolungamenti. La funzione u_0 si tratta prendendone il prolungamento triviale $\widetilde{u}_0$, che denotiamo con $\mathcal{P}_0 u$. Si vede facilmente che esso appartiene a $H^1(\mathbb{R}^n)$ e che la sua norma verifica

$$\|\mathcal{P}_0 u\|_{1,\mathbb{R}^n} = \|u_0\|_{1,\Omega} \le M_0\,\|u\|_{1,\Omega} \tag{5.2}$$

ove M_0 dipende solo da ψ_0. Per $j \ge 1$ la costruzione è invece più complessa. Denotando ancora con u_j la restrizione di u_j a $\omega_j \cap \Omega$, consideriamo la funzione composta $w_j = u_j \circ \mathbf{G}_j$, la quale appartiene a $H^1(\omega_{0j} \cap \mathbb{R}^n_+)$, e il suo prolungamento triviale $\widetilde{w}_j$ a $\mathbb{R}^n_+$. Anche in questo caso si vede facilmente che $\widetilde{w}_j$ appartiene a $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ e che la sua norma è stimata da quella di u_j, dunque da quella della funzione u originaria, come nella (5.2). Consideriamo allora il prolungamento per riflessione $(\widetilde{w}_j)^*$ di $\widetilde{w}_j$ a tutto $\mathbb{R}^n$, denotiamo con lo stesso simbolo la sua restrizione alla palla ω_{0j}, consideriamo la funzione composta $(\widetilde{w}_j)^* \circ \mathbf{G}_j^{-1}$ e denotiamo con $\mathcal{P}_j u$ il suo prolungamento triviale a tutto $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\|\mathcal{P}_j u\|_{1,\mathbb{R}^n} \le M_j\,\|u\|_{1,\Omega}$$

ove M_j dipende solo da ψ_j. Definiamo quindi $\mathcal{P}$ ponendo

$$\mathcal{P}u = \sum_{j=0}^{r} \mathcal{P}_j u.$$

Allora è chiaro che l'operatore $\mathcal{P}$ è lineare e continuo ed è un operatore di prolungamento in quanto la restrizione a Ω di $\mathcal{P}u$ vale $\sum_{j=0}^{r} u_j$, cioè u. ∎

5.6. Definizione. *Con $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denotiamo l'insieme costituito dalle restrizioni a Ω delle funzioni di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.* ∎

Dai Lemmi 5.4 e 5.5 segue immediatamente il risultato che ci interessa:

5.7. Teorema. *Se Ω è il semispazio $\mathbb{R}^n_+$ oppure un aperto limitato e regolare, allora $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è denso in $H^1(\Omega)$.* ∎

Grazie al Teorema 5.7, siamo pronti ad applicare il Lemma 5.1 con le scelte $V = H^1(\Omega)$ e $V_0 = \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Per $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ il simbolo $v|_\Gamma$ ha significato ovvio: esso denota la restrizione a Γ di un qualunque prolungamento $\overline{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ della funzione v. Allora $v|_\Gamma$ appartiene a ogni spazio ragionevole W di funzioni definite su Γ e il problema è scegliere W in modo che l'applicazione $v \mapsto v|_\Gamma$ sia continua a valori in W quando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è munito della topologia indotta da $H^1(\Omega)$.

5.8. Teorema. *Se $n > 1$ e Ω è il semispazio oppure un aperto limitato e regolare, l'applicazione $u \mapsto u|_\Gamma$ definita in $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ si prolunga in uno e un solo modo a un operatore $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ lineare e continuo. Inoltre vale la formula di integrazione per parti*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \mathbf{v} \, dx = -\int_\Omega u \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)\,(\gamma_0 \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, ds \qquad \forall\, u \in H^1(\Omega) \quad \forall\, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^n \tag{5.3}$$

ove $\boldsymbol{\nu}$ è la normale esterna e $\gamma_0 \mathbf{v} = (\gamma_0 v_1, \ldots, \gamma_0 v_n)$. ∎

Dimostrazione. La prima parte del teorema è conseguenza immediata del Lemma 5.1 una volta che abbiamo dimostrato che l'operatore $v \mapsto v|_\Gamma$ da $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ in $L^2(\Gamma)$ è continuo quando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ è munito della topologia indotta da $H^1(\Omega)$. Controlliamo dunque questo fatto. Come nella dimostrazione del Teorema 5.7, il caso dell'aperto limitato e regolare è ricondotto per carte locali e partizione dell'unità a quello del semispazio. Dobbiamo dunque controllare solo che vale una disuguaglianza del tipo

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x', 0)|^2 \, dx' \le c \, \|u\|^2_{1,\mathbb{R}^n_+} \qquad \forall\, u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$$

ove ancora abbiamo usato la notazione $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Sia dunque $u \in \mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Per $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ fissato e per ogni $x_n \in \,]0,1[$ abbiamo

$$u(x', 0) = u(x', x_n) - \int_0^{x_n} D_n u(x', t) \, dt$$

da cui, grazie alla disuguaglianza elementare $(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$ e alla disuguaglianza di Schwarz, deduciamo

$$|u(x', 0)|^2 \le 2|u(x', x_n)|^2 + 2 \int_0^1 |D_n u(x', t)|^2 \, dt.$$

Integriamo ora rispetto a x' su $\mathbb{R}^{n-1}$ e rispetto a x_n su $]0,1[$. Otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',0)|^2\,dx' \le 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times]0,1[} |u(x',x_n)|^2\,dx'\,dx_n + 2\int_{\mathbb{R}^{n-1}\times]0,1[} |D_n u(x',t)|^2\,dx'\,dt$$

e la disuguaglianza desiderata segue con $c=2$.

Per quanto riguarda la formula (5.3), essa vale se u e $\mathbf{v}$ sono regolari. Siano ora $u \in H^1(\Omega)$ e $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^n$ e siano $\{u_k\}$ e $\{\mathbf{v}_k\}$ due successioni in $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ e in $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^n$ convergenti a u e a $\mathbf{v}$ in $H^1(\Omega)$ e in $H^1(\Omega)^n$ rispettivamente. Scritta la (5.3) per u_k e $\mathbf{v}_k$, si passa al limite immediatamente anche nell'integrale di bordo, grazie alla continuità dell'operatore γ_0. ∎

5.9. Osservazione. La funzione $\gamma_0 u$ viene detta *traccia di* u. Per semplificare le notazioni, scriveremo in genere $u|_\Gamma$ anziché $\gamma_0 u$ e negli integrali di bordo scriveremo più semplicemente u.

Sottolineiamo poi il caso particolare in cui $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_i$ ove $\{\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Dalla (5.3) deduciamo

$$\int_\Omega (D_i u)v\,dx = -\int_\Omega u(D_i v)\,dx + \int_\Gamma uv\nu_i\,ds \qquad \forall\, u,v \in H^1(\Omega), \qquad i=1,\dots,n.$$

Osserviamo inoltre che, per quanto riguarda la dimensione $n=1$, abbiamo già dimostrato la Proposizione 3.6 che, nel caso dell'intervallo $]a,b[$ limitato, consente di attribuire un senso ai due valori $u(a)$ e $u(b)$ per ogni funzione $u \in H^1(a,b)$. Si noti che i discorsi fatti dopo l'Osservazione 3.9 si ripetono in questo caso e forniscono la continuità dell'operatore $u \mapsto u(x_0)$ da $H^1(a,b)$ in $\mathbb{R}$ qualunque sia $x_0 \in [a,b]$. ∎

Ciò che abbiamo detto per la traccia su Γ si ripete in altre situazioni analoghe. Abbiamo ad esempio il risultato che enunciamo di seguito e che corrisponde a sostituire Γ con un suo aperto Γ_0, ma considerazioni analoghe valgono quando il bordo Γ è sostituito da un sottoinsieme $\Sigma \subset \overline{\Omega}$ abbastanza regolare, ad esempio con una varietà compatta e regolare di dimensione $n-1$ con o senza bordo.

5.10. Corollario. *L'applicazione* $v \mapsto v|_{\Gamma_0}$ *definita in* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *si prolunga in uno e un solo modo a un operatore lineare e continuo di* $H^1(\Omega)$ *in* $L^2(\Gamma_0)$. ∎

5.11. Osservazione. Spesso è utile supporre Γ_0 regolare e la condizione di regolarità che interessa può essere precisata come segue: la chiusura $\overline{\Gamma_0}$ è una sottovarietà di classe C^1 con o senza bordo di Γ e Γ_0 è l'interno (relativo a Γ) di $\overline{\Gamma_0}$. In modo equivalente possiamo descrivere la regolarità per carte locali. Nel caso in cui Γ_0 ha bordo $\partial\Gamma_0$ richiediamo che, per ogni $x \in \partial\Gamma_0$, esista una trasformazione $\mathbf{G}$ che verifichi, oltre alle proprietà elencate nell'Osservazione 5.3 della quale seguiamo le notazioni, le condizioni supplementari seguenti:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{G}\,(\omega_0 \cap \{x_n = 0,\ x_{n-1} > 0\}) = \omega \cap \Gamma_0 \\
&\mathbf{G}\,(\omega_0 \cap \{x_n = 0,\ x_{n-1} < 0\}) = \omega \cap (\Gamma \setminus \overline{\Gamma}_0) \\
&\mathbf{G}\,(\omega_0 \cap \{x_n = 0,\ x_{n-1} = 0\}) = \omega \cap (\overline{\Gamma}_0 \setminus \Gamma_0).
\end{aligned}$$

Notiamo però che la funzione $\mathbf{G}$ costruita nell'osservazione citata a partire dalla funzione ψ non verifica, di solito, le condizioni supplementari richieste, in quanto $\mathbf{G}$ "spiana" Γ ma non necessariamente $\partial\Gamma_0$. Sebbene non sia sempre necessario, supporremo Γ_0 regolare in ogni caso. ∎

Come abbiamo già detto, la teoria svolta si estende in modo da coprire il caso più generale degli aperti lipschitziani, quali i poligoni. In particolare vale il risultato che ci accingiamo a presentare e che implica, ad esempio, che le funzioni globalmente continue e regolari a tratti appartengono a $H^1(\Omega)$.

Supponiamo che l'aperto regolare Ω sia suddiviso da un'interfaccia Σ in due aperti Ω_1 e Ω_2. Naturalmente dobbiamo supporre che Σ sia abbastanza regolare, ad esempio che sia l'interno di una varietà di classe C^1 con bordo, il bordo essendo incluso in Γ. In queste condizioni gli aperti Ω_i non sono in generale di classe C^1, ma al più lipschitziani, e ciò avviene se $\overline{\Sigma}$ e Γ non sono tangenti nei punti della loro intersezione.

5.12. Corollario. *Nelle condizioni descritte, siano $u_i \in H^1(\Omega_i)$ per $i = 1,2$ e si consideri la funzione $u \in L^2(\Omega)$ definita dalle formule $u = u_1$ in Ω_1 e $u = u_2$ in Ω_2. Allora $u \in H^1(\Omega)$ se e solo se $u_{1|\Sigma} = u_{2|\Sigma}$.* ∎

Dimostrazione. Calcoliamo il gradiente di u. Denotando con $\boldsymbol{\nu}_i$ la normale su Σ esterna rispetto a Ω_i, per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^n$ abbiamo

$$\begin{aligned}\langle \nabla u, \mathbf{v} \rangle = -\langle u, \operatorname{div} \mathbf{v} \rangle = -\int_{\Omega_1} u_1 \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega_2} u_2 \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \\ = \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_\Sigma u_1 \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}_1 \, ds + \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_\Sigma u_2 \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}_2 \, ds \\ = \int_\Omega \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_\Sigma (u_1 - u_2) \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}_1 \, ds\end{aligned}$$

ove $\mathbf{w}$ è la funzione di $L^2(\Omega)^2$ che vale ∇u_1 in Ω_1 e ∇u_2 in Ω_2. Abbiamo perciò

$$\nabla u = \mathbf{w} + \mathbf{r}$$

dove il "resto" $\mathbf{r}$ è la distribuzione (vettoriale) definita dall'ultimo integrale su Σ. Ora, se $u_{1|\Sigma} = u_{2|\Sigma}$, abbiamo $\mathbf{r} = 0$ e $\nabla u = \mathbf{w}$, da cui $u \in H^1(\Omega)$, dato che $\mathbf{w} \in L^2(\Omega)^n$.

Per dimostrare l'affermazione reciproca osserviamo preliminarmente che l'insieme descritto da $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}_1$ al variare di $\mathbf{v}$ in $\mathcal{D}(\Omega)^n$ è denso in $L^2(\Sigma)$. Infatti, procedendo per carte locali e partizione dell'unità, ci riconduciamo al caso in cui Σ è sostituito dall'iperpiano $x_n = 0$ e l'analogo risultato di densità si dimostra facilmente per regolarizzazione mediante convoluzione e con un successivo prolungamento rispetto alla variabile x_n.

Supponiamo dunque diverse le due tracce $u_{1|\Sigma}$ e $u_{2|\Sigma}$. Allora, grazie alla densità di cui sopra, esiste $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^n$ tale che $\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$, per cui $\mathbf{r}$ non è la distribuzione nulla. Siccome $\operatorname{supp} \mathbf{r} \subseteq \Sigma$ e Σ ha misura $n-$dimensionale nulla, segue che ∇u non è una funzione e, quindi, che $u \notin H^1(\Omega)$. ∎

Gli esercizi proposti di seguito mostrano, in particolare, l'impossibilità di definire le tracce delle funzioni di H^1 su varietà di dimensione $< n-1$ con il metodo del prolungamento degli operatori.

5.13. Esercizi

1. Fissata $\zeta : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ monotona, di classe C^1 e tale che $\zeta(t) = 0$ per $t \le 1$ e $\zeta(t) = 1$ per $t \ge 2$, per $k \ge 1$ intero si definisca

$$\zeta_k(x) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \zeta(2^j |x|), \qquad x \in \mathbb{R}^2.$$

Si dimostri che $v\zeta_k \to v$ in $H^1(\mathbb{R}^2)$ per ogni $v \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Conviene dimostrare preliminarmente che $\zeta_k(x) \to 1$ q.o. e, grazie alla struttura diadica della definizione di ζ_k, che $\nabla\zeta_k \to 0$ in $L^2(\mathbb{R}^2)^2$.

2. Dedurre dalla densità di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ in $H^1(\mathbb{R}^2)$ e dall'esercizio precedente che le funzioni di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ nulle in un intorno dell'origine, l'intorno potendo variare da funzione a funzione, costituiscono un sottospazio denso di $H^1(\mathbb{R}^2)$.

3. Generalizzare l'esercizio precedente dimostrando che, se $n > 2$, le funzioni di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nulle in un intorno dell'insieme descritto dalle condizioni $x_n = x_{n-1} = 0$ costituiscono un sottospazio denso di $H^1(\mathbb{R}^n)$.

4. Dimostrare che, se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è regolare e $x_0 \in \overline{\Omega}$, le funzioni di $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ nulle in un intorno di x_0 costituiscono un sottospazio denso di $H^1(\Omega)$.

5. Generalizzare l'esercizio precedente dimostrando che, se $n > 2$, le funzioni di $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ nulle in un intorno di una fissata varietà compatta regolare di dimensione $< n-1$ inclusa in Ω oppure in Γ costituiscono un sottospazio denso di $H^1(\Omega)$.

6. Alcuni sottospazi

Siccome $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $L^2(\Omega)$, a maggior ragione è denso in $L^2(\Omega)$ un qualunque sottospazio V di $H^m(\Omega)$ che contiene $\mathcal{D}(\Omega)$. Se poi V è anche un sottospazio chiuso di $H^m(\Omega)$, allora $(V, L^2(\Omega), V')$ è una terna hilbertiana. Ha dunque interesse studiare i sottospazi di $H^m(\Omega)$ in queste condizioni. Il più semplice di essi, che è anche il più piccolo, è l'oggetto della seguente

6.1. Definizione. *Denotiamo con $H_0^m(\Omega)$ la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$.* ■

Per il Lemma 5.4 abbiamo $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$. Se invece Ω è limitato, l'appartenenza di una funzione $u \in H^m(\Omega)$ al sottospazio $H_0^m(\Omega)$ comporta certe condizioni di annullamento al bordo che trattiamo con qualche dettaglio nel caso $m = 1$. Anzi generalizziamo la definizione di $H_0^1(\Omega)$ imponendo l'annullamento solo su un aperto $\Gamma_0 \subset \Gamma$.

6.2. Definizione. *Denotiamo con $H_{0,\Gamma_0}^1(\Omega)$ la chiusura in $H^1(\Omega)$ del sottospazio descritto dalla restrizione $v|_\Omega$ al variare di v in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sotto la condizione che v sia nulla in un intorno di $\overline{\Gamma}_0$.* ■

Sottolineiamo, per maggior chiarezza, che l'intorno di cui tratta la definizione precedente può variare da funzione a funzione. Inoltre possiamo convenire di non escludere il caso $\Gamma_0 = \Gamma$ così che $H^1_{0,\Gamma}(\Omega) = H^1_0(\Omega)$. Questa convenzione è tacitamente adottata nel seguito.

6.3. Proposizione. *Supponiamo Ω e Γ_0 regolari. Allora una funzione $u \in H^1(\Omega)$ appartiene a $H^1_{0,\Gamma_0}(\Omega)$ se e solo se la traccia $u_{|\Gamma_0}$ è nulla.* ■

Dimostrazione. Denotiamo con $\mathcal{V}_0$ l'insieme delle funzioni $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nulle in un intorno di $\overline{\Gamma}_0$, l'intorno potendo variare con la funzione considerata. Sia $u \in H^1_{0,\Gamma_0}(\Omega)$ e sia $\{u_k\}$ una successione in $\mathcal{V}_0$ tale che $u_{k|\Omega} \to u$ in $H^1(\Omega)$. Allora $u_{k|\Gamma_0} = 0$ per ogni k, da cui $u_{|\Gamma_0} = 0$ per la continuità dell'operatore di traccia.

Viceversa, supponiamo $u \in H^1(\Omega)$ e $u_{|\Gamma_0} = 0$. Dobbiamo dimostrare che esiste una successione $\{u_k\}$ in $\mathcal{V}_0$ tale che $u_{k|\Omega} \to u$ in $H^1(\Omega)$. Per carte locali e partizione dell'unità ci riconduciamo alla situazione in cui l'aperto è il semispazio $\mathbb{R}^n_+$, Γ_0 è l'aperto di $\partial\mathbb{R}^n_+$ descritto dalle condizioni $x_n = 0$ e $x_{n-1} > 0$ e $\operatorname{supp} u$ è limitato. Poniamo

$$\widetilde{\Omega} = \mathbb{R}^n_+ \cup \{x \in \mathbb{R}^n : x_{n-1} > 0\}$$

e consideriamo il prolungamento triviale $\widetilde{u}$ di u a $\widetilde{\Omega}$. Allora $\widetilde{u} \in H^1(\widetilde{\Omega})$, come si vede imitando la dimostrazione del Corollario 5.12. Siccome poi $\widetilde{\Omega}$ si comporta localmente come un aperto lipschitziano, esiste $u^* \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tale che $u^* = \widetilde{u}$ in $\widetilde{\Omega}$ con supporto limitato. Definiamo allora la successione $\{u^*_k\}$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$ mediante

$$u^*_k(x) = u^*(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} + 1/k, x_n - 1/k)$$

così che $u^*_k \to u^*$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$ e $\operatorname{supp} u^*_k$ non interseca $\overline{\Gamma}_0$. A questo punto, per costruire la successione $\{u_k\}$ nelle condizioni volute, basta regolarizzare mediante convoluzione. ■

Dalla Proposizione 6.3 e dal Corollario 5.12 deduciamo:

6.4. Corollario. *Se Ω è regolare, una funzione $u \in H^1(\Omega)$ appartiene a $H^1_0(\Omega)$ se e solo se il suo prolungamento triviale $\widetilde{u}$ appartiene a $H^1(\mathbb{R}^n)$.* ■

6.5. Esercizi

1. Dimostrare che, se $m > 1$ e $u \in H^m_0(\Omega)$, allora $D^\alpha u \in H^1_0(\Omega)$ per $|\alpha| \le m - 1$.

2. Dimostrare che l'applicazione $u \mapsto \widetilde{u}$ opera da $H^m_0(\Omega)$ in $H^m(\mathbb{R}^n)$ ed è continua anche quando Ω è un aperto qualunque.

7. Spazi di tracce

In questo paragrafo descriviamo alcune proprietà dello spazio descritto da $u_{|\Gamma}$ al variare di u in $H^1(\Omega)$. Questa costruzione ha interesse in quanto lo spazio in questione non è $L^2(\Gamma)$ ma un suo sottospazio proprio. Infatti il risultato che ora dimostriamo implica che

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |w(x' + h) - w(x' - h)|^2 \, dx' = O(|h|) \quad \text{per} \quad h \to 0 \tag{7.1}$$

per ogni $w \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ che sia traccia di qualche funzione di $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ e, chiaramente, non ogni funzione di $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ verifica la (7.1).

7.1. Proposizione. *Per ogni $v \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ e per ogni $h \in \mathbb{R}^{n-1}$ la traccia $\gamma_0 v \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ di v verifica la disuguaglianza*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\gamma_0 v(x'+h) - \gamma_0 v(x'-h)|^2 \, dx' \le 8|h| \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla v(x)|^2 \, dx. \ \blacksquare \tag{7.2}$$

Dimostrazione. Siccome γ_0 è un operatore continuo da $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ in $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ e $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ è denso in $H^1(\mathbb{R}^n_+)$, possiamo limitarci alle funzioni v di $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n_+})$. Per ogni $x', h \in \mathbb{R}^{n-1}$ abbiamo

$$|v(x'+h,0) - v(x'-h,0)|^2 \le 2|v(x'+h,0) - v(x',|h|)|^2 + 2|v(x'-h,0) - v(x',|h|)|^2.$$

Il primo quadrato al secondo membro (e l'altro è analogo) si tratta come segue:

$$\begin{aligned} |v(x'+h,0) - v(x',|h|)|^2 &= \left| \int_0^1 \nabla v(x'+th,(1-t)|h|) \cdot (h,-|h|) \, dt \right|^2 \\ &\le 2|h|^2 \int_0^1 \bigl|\nabla v(x'+th,(1-t)|h|)\bigr|^2 \, dt. \end{aligned}$$

Integrando rispetto a x' su $\mathbb{R}^{n-1}$ deduciamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(x'+h,0) - v(x',|h|)|^2 \, dx' &\le 2|h|^2 \int_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,1)} \bigl|\nabla v(x'+th,(1-t)|h|)\bigr|^2 \, dx' \, dt \\ = 2|h| \int_{\mathbb{R}^{n-1}\times(0,|h|)} |\nabla v(y',y_n)|^2 \, dy' \, dy_n &\le 2|h| \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla v(y',y_n)|^2 \, dy' \, dy_n. \ \blacksquare \end{aligned}$$

7.2. Definizione. *Se Ω è il semispazio oppure un aperto limitato e regolare poniamo*

$$H^{1/2}(\Gamma) = \left\{ v\,|_\Gamma : \ v \in H^1(\Omega) \right\} \tag{7.3}$$

e muniamo $H^{1/2}(\Gamma)$ della norma

$$\|w\|_{1/2,\Gamma} = \inf\{\|v\|_{H^1(\Omega)} : \ v \in H^1(\Omega), \ v\,|_\Gamma = w\}. \ \blacksquare \tag{7.4}$$

7.3. Teorema. *Lo spazio $H^{1/2}(\Gamma)$ è uno spazio di Hilbert incluso in $L^2(\Gamma)$ con immersione continua. Inoltre l'operatore di traccia $v \mapsto v|_\Gamma$ è continuo da $H^1(\Omega)$ in $H^{1/2}(\Gamma)$ ed esiste un operatore $\mathcal{R} : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ lineare e continuo che rileva le tracce, cioè tale che*

$$(\mathcal{R}v)\,|_\Gamma = v \qquad \forall\, v \in H^{1/2}(\Gamma). \ \blacksquare$$

Dimostrazione. Il tutto rientra in modo ovvio nella situazione astratta che ora descriviamo. Siano V e W due spazi di Hilbert e $T \in \mathcal{L}(V;W)$. Consideriamo l'immagine $R(T)$ con la norma

$$\|w\|_{R(T)} = \inf\{\|v\|_V : \ v \in V, \ Tv = w\}.$$

Osserviamo subito che $\|Tv\|_{R(T)} \leq \|v\|_V$ per ogni $v \in V$, per cui l'operatore T è continuo da V in $R(T)$.

Le conclusioni corrispondenti alle altre affermazioni dell'enunciato si ottengono facilmente introducendo il nucleo $N(T)$, il suo ortogonale V_1 in V e la restrizione $T_1 = T|_{V_1}$, come ora vediamo.

Mostriamo che T_1 è un isomorfismo isometrico di V_1 su $R(T)$. Controlliamo la suriettività. Sia $w \in R(T)$. Scelto $v \in V$ tale che $Tv = w$, decomponiamo v in $v_0 + v_1$ con $v_0 \in N(T)$ e $v_1 \in V_1$. Allora $Tv_1 = w$ per cui $w \in R(T_1)$. L'iniettività è anche più immediata: se infatti $v \in V_1$ e $T_1 v = 0$, allora v appartiene anche a $N(T)$, per cui $v = 0$. Vediamo infine che T_1 conserva le norme. Sia infatti $v \in V_1$. Allora le controimmagini tramite T di Tv sono tutti e soli i vettori del tipo $v + u$ con $u \in N(T)$. Dalla relazione pitagorica $\|v+u\|_V^2 = \|v\|_V^2 + \|u\|_V^2$ deduciamo allora

$$\|T_1 v\|_{R(T)} = \inf \{ \|v+u\|_V : \ u \in N(T) \} = \|v\|_V .$$

Dunque T_1 è un isomorfismo isometrico. Ciò implica che $R(T)$ è uno spazio di Hilbert e che l'operatore di rilevamento esiste: possiamo prendere infatti $\mathcal{R} = T_1^{-1}$.

Vediamo infine che l'immersione di $R(T)$ in W è continua. Sia M la norma di T in $\mathcal{L}(V;W)$ e sia w generico in $R(T)$. Per ogni $v \in V$ tale che $Tv = w$ si ha $\|w\|_W \leq M \|v\|_V$. Passando all'estremo inferiore deduciamo $\|w\|_W \leq M \|w\|_{R(T)}$. ∎

In modo del tutto analogo si procede nel dare la definizione di $H^{1/2}(\Gamma_0)$ e per dimostrare il risultato enunciato di seguito.

7.4. Definizione. *Poniamo*

$$H^{1/2}(\Gamma_0) = \Big\{ v\,|_{\Gamma_0} : \ v \in H^1(\Omega) \Big\} \tag{7.5}$$

e muniamo $H^{1/2}(\Gamma_0)$ *della norma*

$$\|w\|_{1/2,\Gamma_0} = \inf \{ \|v\|_{H^1(\Omega)} : \ v \in H^1(\Omega), \ v\,|_{\Gamma_0} = w \} . \ \blacksquare \tag{7.6}$$

7.5. Teorema. *Lo spazio* $H^{1/2}(\Gamma_0)$ *è uno spazio di Hilbert incluso in* $L^2(\Gamma_0)$ *con immersione continua. Inoltre l'operatore di traccia* $v \mapsto v|_{\Gamma_0}$ *è continuo da* $H^1(\Omega)$ *in* $H^{1/2}(\Gamma_0)$ *ed esiste un operatore* $\mathcal{R} : H^{1/2}(\Gamma_0) \to H^1(\Omega)$ *lineare e continuo che rileva le tracce, cioè tale che*

$$(\mathcal{R}v)\,|_{\Gamma_0} = v \qquad \forall\, v \in H^{1/2}(\Gamma_0). \ \blacksquare$$

7.6. Esercizi

1. Identificato $\partial \mathbb{R}^n_+$ con $\mathbb{R}^{n-1}$, dimostrare che $H^1(\mathbb{R}^{n-1})$ è incluso in $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ con immersione continua. Questo fatto, abbinato al Teorema 5.8 e alla definizione stessa di $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, mostra che $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ è intermedio fra $H^1(\mathbb{R}^{n-1})$ e $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

2. Dimostrare che $H^{1/2}(\Gamma)$ contiene tutte le funzioni lipschitziane definite su Γ. Si possono invece costruire funzioni continue su Γ che non appartengono a $H^{1/2}(\Gamma)$.

3. Dimostrare che, se Γ_0 è un aperto regolare di Γ, allora esiste un operatore di prolungamento lineare e continuo da $H^{1/2}(\Gamma_0)$ in $H^{1/2}(\Gamma)$.

4. Dimostrare che le restrizioni a Γ delle funzioni di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ formano un sottospazio denso di $H^{1/2}(\Gamma)$. Dedurre che $H^{1/2}(\Gamma)$ è denso in $L^2(\Gamma)$.

5. Dimostrare che, se Ω è limitato e regolare e se $w \in L^2(\Gamma)$, allora $w \in H^{1/2}(\Gamma)$ se e solo se $w(\psi_{|\Gamma}) \in H^{1/2}(\Gamma)$ per ogni $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

6. Sia $(\omega, \omega', \mathbf{G})$ una delle terne della Definizione 5.2. Posto $\gamma = \omega \cap \Gamma$ e $\gamma' = \omega' \cap \partial\mathbb{R}^n_+$, dimostrare che, se $w \in L^2(\Gamma)$, allora $w \in H^{1/2}(\gamma)$ se e solo se $w \circ \mathbf{G} \in H^{1/2}(\gamma')$. Questo risultato, abbinato a quello dell'esercizio precedente, mostra che $H^{1/2}(\Gamma)$ può essere definito per carte locali a partire dalla definizione di $H^{1/2}(\partial\mathbb{R}^n_+)$.

7. Siano Ω l'aperto di $\mathbb{R}^2$ descritto dalle condizioni $|x| < 1/2$ e $x_2 > 0$ e $\Gamma_0 =]0, 1/2[\times \{0\}$. Dimostrare che, se $\alpha < 1/2$, le funzioni $v(x_1) = |\ln x_1|^\alpha$ e $\sin v(x_1)$ appartengono a $H^{1/2}(\Gamma_0)$. Si noti che per $x_1 \to 0$ la prima diverge e la seconda oscilla. In particolare le funzioni di $H^{1/2}(\Gamma_0)$ non hanno, in generale, traccia su $\partial\Gamma_0$.

8. Dimostrare che i sottospazi chiusi di $H^1(\Omega)$ che contengono $H^1_0(\Omega)$ sono tutti e soli quelli del tipo

$$V = \Big\{ v \in H^1(\Omega) : \ v\,|_\Gamma \in W \Big\}$$

con W sottospazio chiuso di $H^{1/2}(\Gamma)$. ∎

Osserviamo che la (7.1) non è la caratterizzazione di $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ perché le funzioni che la soddisfano formano uno spazio diverso, chiamato $B^{1/2}_{2,\infty}(\mathbb{R}^{n-1})$. Questo contiene infatti anche le funzioni caratteristiche di tutti gli aperti limitati e regolari di $\mathbb{R}^{n-1}$, come si verifica senza eccessive difficoltà. Al contrario, nessuna di queste funzioni appartiene a $H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$, anche se non è banale dimostrare questa affermazione. Più in generale, escluso il caso in cui l'aperto regolare Γ_0 di Γ sia l'unione di componenti connesse di Γ, il prolungamento triviale di una funzione di $H^{1/2}(\Gamma_0)$ non appartiene a $H^{1/2}(\Gamma)$. Introduciamo allora uno spazio nuovo.

7.7. Definizione. *Poniamo*

$$H^{1/2}_{00}(\Gamma_0) = \{ w \in H^{1/2}(\Gamma_0) : \ \widetilde{w} \in H^{1/2}(\Gamma) \} \tag{7.7}$$

e muniamo $H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)$ *della norma definita dalla formula*

$$\|w\|_{H^{1/2}_{00}} = \|\widetilde{w}\|_{1/2,\Gamma} \,. \ \blacksquare \tag{7.8}$$

Siccome la costruzione fatta rientra nel caso astratto della norma del grafico, abbiamo:

7.8. Teorema. *Lo spazio* $H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)$ *è uno spazio di Hilbert.* ∎

7.9. Esercizi

1. Utilizzare gli Esercizi 5.13 per dimostrare che le restrizioni a Γ_0 delle funzioni $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nulle in un intorno di $\partial\Gamma_0$ (l'intorno dipendendo dalla funzione considerata) costituiscono un insieme denso sia in $H^{1/2}(\Gamma_0)$ sia in $L^2(\Gamma_0)$.

2. Dedurre dall'esercizio precedente che $H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)$ è denso in $H^{1/2}(\Gamma_0)$ e che questi spazi sono entrambi densi in $L^2(\Gamma_0)$.

3. Sia $w \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ e sia $\{v_k\}$ una successione di funzioni di $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ nulle in un intorno di $\Gamma \setminus \overline{\Gamma_0}$ tale che $v_{k|\Gamma_0} \to w$ in $H^{1/2}(\Gamma_0)$. Discutere la convergenza della successione $\{v_{k|\Gamma}\}$ in $L^2(\Gamma)$ e in $H^{1/2}(\Gamma)$.

8. Spazi duali

Fra i duali degli spazi introdotti nei paragrafi precedenti alcuni sono di interesse particolare. Diamo la seguente

8.1. Definizione. *Denotiamo con $H^{-m}(\Omega)$ il duale dello spazio $H^m_0(\Omega)$.* ∎

Si noti che $H^{-m}(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)'$. Useremo la notazione $\|\cdot\|_{-m,\Omega}$ per indicare la norma di $H^{-m}(\Omega)$. Notazioni analoghe verranno utilizzate nei simboli di dualità.

Siccome $\mathcal{D}(\Omega)$ è incluso in $H^m_0(\Omega)$ con immersione continua e, per definizione, $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $H^m_0(\Omega)$, il duale $H^{-m}(\Omega)$ è immerso in modo naturale nello spazio $\mathcal{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni. Precisamente, se $u \in H^{-m}(\Omega)$, cioè se u è un funzionale lineare e continuo su $H^m_0(\Omega)$, la restrizione di u al sottospazio $\mathcal{D}(\Omega)$ è una distribuzione e solo all'elemento nullo di $H^{-m}(\Omega)$ corrisponde la distribuzione nulla. Identificando pertanto il generico funzionale $u \in H^{-m}(\Omega)$ con la corrispondente distribuzione otteniamo l'immersione desiderata $H^{-m}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Si noti che, allora, ha senso chiedersi se una distribuzione assegnata u appartiene o meno a $H^{-m}(\Omega)$. Ebbene, affermare che la distribuzione u appartiene a $H^{-m}(\Omega)$ significa dire che essa è prolungabile a un funzionale lineare e continuo su $H^m_0(\Omega)$, cioè che il funzionale u è continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$ anche quando $\mathcal{D}(\Omega)$ è munito della topologia indotta da $H^m(\Omega)$, cioè che vale una disuguaglianza del tipo

$$|\langle u, v\rangle| \le c\,\|v\|_{m,\Omega} \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

con una certa costante c.

Si noti inoltre che valgono le inclusioni

$$L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset H^{-2}(\Omega) \subset \ldots$$

e che tutte le immersioni sono continue.

Non va invece confuso lo spazio $H^{-1}(\Omega)$ con il duale di $H^1(\Omega)$. Benché i due spazi siano isomorfi in quanto entrambi spazi di Hilbert separabili di dimensione infinita, vi sono buoni motivi per non identificarli fra loro. Infatti la teoria degli spazi di Sobolev gravita intorno alla nozione di distribuzione e, siccome $\mathcal{D}(\Omega)$ non è denso in $H^1(\Omega)$, non è possibile identificare in modo canonico il duale di $H^1(\Omega)$ con un sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$ mentre $H^{-1}(\Omega)$ è immerso in $\mathcal{D}'(\Omega)$ in modo naturale. Le stesse considerazioni valgono poi per $H^{-m}(\Omega)$ e per il duale di $H^m(\Omega)$ con $m > 1$.

8.2. Teorema. *Per ogni multi–indice α e per ogni intero m l'operatore di derivazione D^α è lineare e continuo da $H^m(\Omega)$ in $H^{m-|\alpha|}(\Omega)$.* ∎

Dimostrazione. Basta considerare il caso delle derivate prime D_i in quanto il caso generale segue per iterazione. Se $m \geq 1$ è chiaro che D_i è lineare e continuo da $H^m(\Omega)$ in $H^{m-1}(\Omega)$. Consideriamo ora il caso $m = -|m| \leq 0$. Per ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ abbiamo

$$\begin{aligned} |\langle D_i u, v\rangle| &= |\langle u, D_i v\rangle| \leq \|u\|_{-|m|,\Omega} \|D_i v\|_{|m|,\Omega} \\ &\leq \|u\|_{-|m|,\Omega} \|v\|_{|m|+1,\Omega} = \|u\|_{m,\Omega} \|v\|_{|m|+1,\Omega} \end{aligned}$$

per cui $D_i u \in H^{-|m|-1}(\Omega) = H^{m-1}(\Omega)$ e vale anche la disuguaglianza

$$\|D_i u\|_{m-1,\Omega} \leq \|u\|_{m,\Omega}$$

che mostra la continuità dell'operatore D_i. ∎

L'altro caso interessante riguarda i duali di $H^{1/2}(\Gamma)$ e di $H^{1/2}(\Gamma_0)$.

8.3. Definizione. *Denotiamo con* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *e* $H^{-1/2}(\Gamma_0)$ *i duali di* $H^{1/2}(\Gamma)$ *e di* $H^{1/2}(\Gamma_0)$ *rispettivamente.* ∎

Per indicare la norma ad esempio di $H^{-1/2}(\Gamma)$ useremo la notazione $\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma}$. Notazioni analoghe verranno utilizzate nei simboli di dualità.

8.4. Osservazione. Vanno invece tenuti accuratamente distinti gli spazi $H^{-1/2}(\Gamma_0)$ e $H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)'$ in quanto essi sono duali di due spazi diversi.

Osserviamo inoltre che l'Esercizio 7.9.2 consente di costruire le terne hilbertiane

$$\big(H^{1/2}(\Gamma), L^2(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma)\big), \qquad \big(H^{1/2}(\Gamma_0), L^2(\Gamma_0), H^{-1/2}(\Gamma_0)\big),$$
$$\big(H^{1/2}_{00}(\Gamma_0), L^2(\Gamma_0), H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)'\big).$$

In particolare abbiamo ad esempio

$$L^2(\Gamma) \subset H^{-1/2}(\Gamma)$$

con immersione continua e immagine densa. ∎

In analogia con quanto abbiamo fatto per le distribuzioni, possiamo introdurre la restrizione a Γ_0 di un elemento di $H^{-1/2}(\Gamma)$. Siccome per le funzioni vale l'identità

$$\int_{\Gamma_0} u\,|_{\Gamma_0}\, v\, ds = \int_\Gamma u\widetilde{v}\, ds$$

ove $\widetilde{v}$ è il prolungamento triviale di v a tutto Γ, la definizione naturale è quella che si ottiene scrivendo le dualità al posto degli integrali. La restrizione di un elemento $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ è dunque il funzionale $v \mapsto \langle u, \widetilde{v}\rangle$ del quale occorre precisare con cura il dominio. Ebbene, perché tutto abbia significato in corrispondenza a una certa funzione v, è necessario che la corrispondente $\widetilde{v}$ appartenga al dominio di u, che è $H^{1/2}(\Gamma)$. Dunque v deve appartenere a $H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)$. Abbiamo perciò

8.5. Proposizione. *Sia* $u \in H^{-1/2}(\Gamma)$. *Allora la formula*

$$_{H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)'}\langle u\,|_{\Gamma_0}, v\rangle_{H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)} = {}_{-1/2,\Gamma}\langle u, \widetilde{v}\rangle_{1/2,\Gamma} \qquad \forall\, v \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)$$

definisce $u|_{\Gamma_0} \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)'$ *e l'applicazione* $u \mapsto u|_{\Gamma_0}$ *è un operatore lineare e continuo da* $H^{-1/2}(\Gamma)$ *nello spazio* $H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)'$. ∎

9. Tracce di funzioni vettoriali

Se $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^n$ allora tutte le componenti di $\mathbf{u}$ hanno traccia. In particolare ha senso considerare la funzione definita su Γ

$$\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}\,|_\Gamma = \sum_{i=1}^n u_i\,|_\Gamma\, \nu_i$$

ove $\boldsymbol{\nu}$ è la normale esterna. Vogliamo ora attribuire un senso a $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}|_\Gamma$ per ogni $\mathbf{u} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ seguendo anche in questo caso la via del prolungamento dell'operatore. L'applicazione del Lemma 5.1 comporta allora la dimostrazione di un risultato di densità.

9.1. Lemma. *Lo spazio* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^n$ *è denso in* $H(\mathrm{div}, \Omega)$. ■

Dimostrazione. Dimostriamo che l'unico elemento di $H(\mathrm{div}, \Omega)$ ortogonale a $\mathcal{D}(\Omega)^n$ in $H(\mathrm{div}, \Omega)$ è la funzione nulla. Sia dunque $\mathbf{u} \in H(\mathrm{div}, \Omega)$ tale che

$$\int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + w \,\mathrm{div}\, \mathbf{v})\, dx = 0 \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})^n \tag{9.1}$$

ove abbiamo posto $w = \mathrm{div}\, \mathbf{u}$. Potendo scegliere in particolare $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)^n$, deduciamo

$$\nabla w = \mathbf{u}, \qquad \text{da cui} \qquad w \in H^1(\Omega).$$

Considerati ora i prolungamenti triviali di $\mathbf{u}$ e di w riscriviamo la (9.1) nella forma

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\widetilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} + \widetilde{w} \,\mathrm{div}\, \mathbf{v})\, dx = 0 \qquad \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)^n$$

e deduciamo

$$\nabla \widetilde{w} = \widetilde{\mathbf{u}}, \qquad \text{da cui} \qquad \widetilde{w} \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Il Corollario 6.4 fornisce allora $w \in H_0^1(\Omega)$, così che esiste una successione $\{w_k\}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente a w in $H^1(\Omega)$. Osservato che per ogni k risulta

$$\int_\Omega (\nabla w_k \cdot \mathbf{u} + w_k \,\mathrm{div}\, \mathbf{u})\, dx = \langle \mathbf{u}, \nabla w_k \rangle + \langle \mathrm{div}\, \mathbf{u}, w_k \rangle = 0$$

per definizione di $\mathrm{div}\, \mathbf{u}$, concludiamo

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H(\mathrm{div})} = \int_\Omega (\nabla w \cdot \mathbf{u} + w \,\mathrm{div}\, \mathbf{u})\, dx = \lim_{k \to \infty} \int_\Omega (\nabla w_k \cdot \mathbf{u} + w_k \,\mathrm{div}\, \mathbf{u})\, dx = 0. \ ■$$

9.2. Teorema. *Se* $n > 1$ *e* Ω *è il semispazio* $\mathbb{R}^n_+$ *oppure un aperto limitato e regolare, l'applicazione* $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}|_\Gamma$ *definita in* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^n$ *si prolunga in uno e un solo modo a un operatore* $\overline{\gamma} : H(\mathrm{div}, \Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$ *lineare e continuo. Inoltre vale la formula di integrazione per parti*

$$\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla v\, dx = -\int_\Omega (\mathrm{div}\, \mathbf{u}) v\, dx + {}_{-1/2,\Gamma}\langle \overline{\gamma}\mathbf{u}, v\,|_\Gamma \rangle_{1/2,\Gamma} \tag{9.2}$$

per ogni $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ *e per ogni* $v \in H^1(\Omega)$. ■

Dimostrazione. Grazie ai Lemmi 5.1 e 9.1, per costruire $\overline{\gamma}$ basta dimostrare che l'operatore da prolungare è lineare e continuo da $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^n$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$ quando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^n$ è munito della topologia indotta da $H(\operatorname{div}, \Omega)$. Grazie alla formula di integrazione per parti (5.3), abbiamo per ogni $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})^n$ e $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}\, v\, ds = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u}) v\, dx$$

per cui vale la disuguaglianza

$$\left| \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}\, v\, ds \right| \le \|\mathbf{u}\|_{0,\Omega} \|\nabla v\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \le \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div})} \|v\|_{1,\Omega} .$$

Sia ora $\mathcal{R}$ un operatore lineare e continuo da $H^{1/2}(\Gamma)$ in $H^1(\Omega)$ che rileva le tracce e sia c la sua norma. Per ogni $w \in H^{1/2}(\Gamma)$, grazie alla disuguaglianza precedente applicata a $\mathcal{R}w$, abbiamo

$$\left| \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}\,|_\Gamma\, w\, ds \right| \le \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div})} \|\mathcal{R}w\|_{1,\Omega} \le c \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div})} \|w\|_{1/2,\Gamma}$$

vale a dire

$$\|\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}\,|_\Gamma\|_{-1/2,\Gamma} \le c \|\mathbf{u}\|_{H(\operatorname{div})} \qquad \forall\, \mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$$

cioè la continuità desiderata.

Dimostriamo ora l'estensione della formula di integrazione per parti. Fissate $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, consideriamo due successioni $\{\mathbf{u}_k\}$ e $\{v_k\}$ in $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^n$ e in $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ convergenti a $\mathbf{u}$ e a v in $H(\operatorname{div}, \Omega)$ e in $H^1(\Omega)$ rispettivamente, scriviamo la (9.2) per $\mathbf{u}_k$ e v_k e passiamo al limite senza difficoltà. Controlliamo solo che il passaggio al limite nel termine di bordo è corretto. Infatti

$$\mathbf{u}_k \cdot \boldsymbol{\nu}\,|_\Gamma = \overline{\gamma} u_k \to \overline{\gamma}\mathbf{u} \quad \text{in} \quad H^{-1/2}(\Gamma) \qquad \text{e} \qquad v_k\,|_\Gamma \to v\,|_\Gamma \quad \text{in} \quad H^{1/2}(\Gamma)$$

grazie alle continuità dell'operatore $\overline{\gamma}$ da $H(\operatorname{div}, \Omega)$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$ e dell'operatore di traccia $v \mapsto v|_\Gamma$ da $H^1(\Omega)$ in $H^{1/2}(\Gamma)$. ■

9.3. Osservazione. Anche in questo caso semplifichiamo le notazioni e scriviamo $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}|_\Gamma$ anziché $\overline{\gamma}\mathbf{u}$ e, anzi, potremmo addirittura convenire di scrivere ancora l'integrale di bordo anziché la dualità.

Osserviamo inoltre che la traccia su un aperto regolare di Γ è pure ben definita: basta infatti prendere la restrizione della traccia $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}|_\Gamma$ nel senso della Proposizione 8.5. Se Γ_0 e Γ_1 sono i due aperti ottenuti suddividendo Γ mediante un'interfaccia Σ di dimensione $n-2$ e se vogliamo considerare, per fissare le idee, la restrizione a Γ_1 , per ogni $\mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ abbiamo $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\Gamma_1} \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)'$ e la formula di integrazione per parti

$$\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \nabla v\, dx = -\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{u}) v\, dx + {}_{H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)'}\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}\,|_{\Gamma_1}, v\,|_{\Gamma_1} \rangle_{H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)} \tag{9.3}$$

vale per ogni $v \in H^1(\Omega)$ tale che $v_{|\Gamma}$ sia il prolungamento triviale di $v_{|\Gamma_1}$, cioè per ogni $v \in H^1_{0,\Gamma_0}(\Omega)$.

Osserviamo infine che, se $\mathbf{u} \in H(\mathrm{div},\Omega)$, ha senso in generale solo la traccia della componente normale di $\mathbf{u}$ e le tracce delle componenti nelle altre direzioni possono non esistere. Un esempio semplice si ottiene prendendo $\Omega =]0,1[^2$ e $\mathbf{u}(x) = (0, \ln x_1)$ e considerando il problema delle tracce su $\{0\} \times]0,1[$. ∎

Supponiamo ora che l'aperto regolare Ω sia suddiviso da un'interfaccia Σ in due aperti Ω_1 e Ω_2 come abbiamo fatto a proposito del Corollario 5.12. Precisiamo che con Σ vogliamo intendere l'interno dell'intersezione dei due bordi $\partial\Omega_i$. Denotata con $\boldsymbol{\nu}_i$ la normale su Σ esterna rispetto a Ω_i abbiamo allora

9.4. Corollario. *Nelle condizioni dette, siano $\mathbf{u}_i \in H(div,\Omega_i)$ per $i=1,2$ e si consideri la funzione $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n$ definita dalle formule $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ in Ω_1 e $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2$ in Ω_2. Allora $\mathbf{u} \in H(\mathrm{div},\Omega)$ se e solo se vale la condizione*

$$\mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}_1 |_\Sigma + \mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}_2 |_\Sigma = 0. \tag{9.4}$$

Se tale condizione è soddisfatta, allora $\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ è la funzione $w \in L^2(\Omega)$ che vale $\mathrm{div}\,\mathbf{u}_1$ in Ω_1 e $\mathrm{div}\,\mathbf{u}_2$ in Ω_2. ∎

Dimostrazione. Calcoliamo la divergenza di $\mathbf{u}$. Per ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ la restrizione di v a $\partial\Omega_i$ è nulla in un intorno di $(\partial\Omega_i) \setminus \Sigma$ e, dunque, appartiene a $H^{1/2}_{00}(\Sigma)$, così che possiamo usare la formula di integrazione per parti (9.3) per ciascuno dei due aperti. Otteniamo

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{div}\,\mathbf{u}, v\rangle = -\langle \mathbf{u}, \nabla v\rangle &= -\sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \mathbf{u}_i \cdot \nabla v \, dx \\ = \sum_{i=1}^2 \Bigl(\int_{\Omega_i} (\mathrm{div}\,\mathbf{u}_i) v \, dx &- {}_{H^{1/2}_{00}(\Sigma)'}\langle \mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\nu}_i |_\Sigma, v|_\Sigma \rangle_{H^{1/2}_{00}(\Sigma)} \Bigr) \\ &= {}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle w - r, v\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} \end{aligned}$$

ove r è la distribuzione definita su $\mathcal{D}(\Omega)$ dalla formula

$${}_{\mathcal{D}'(\Omega)}\langle r, v\rangle_{\mathcal{D}(\Omega)} = {}_{H^{1/2}_{00}(\Sigma)'}\langle \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}_1 |_\Sigma + \mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}_2 |_\Sigma, v|_\Sigma \rangle_{H^{1/2}_{00}(\Sigma)}.$$

Supponiamo ora che valga la (9.4). Allora $r = 0$ e $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = w$.

Viceversa, supponiamo $\mathrm{div}\,\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$ e dimostriamo che vale la (9.4). Siccome $\mathrm{supp}\, r$ è incluso in Σ e Σ ha misura $n-$ dimensionale nulla, deve essere $r = 0$, altrimenti $\mathrm{div}\,\mathbf{u}$ non sarebbe una funzione. Dunque

$${}_{H^{1/2}_{00}(\Sigma)'}\langle \mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\nu}_1 |_\Sigma + \mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\nu}_2 |_\Sigma, v|_\Sigma \rangle_{H^{1/2}_{00}(\Sigma)} = 0 \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

e la (9.4) segue dal fatto che le restrizioni a Σ delle funzioni di $\mathcal{D}(\Omega)$ formano un sottospazio denso in $H^{1/2}_{00}(\Sigma)$. ∎

9.5. Esercizi

1. Sia Ω il semipiano $\mathbb{R}^2_+$ oppure un aperto limitato e regolare di $\mathbb{R}^2$ e si introduca il campo vettoriale $\boldsymbol{\tau}$ tangente a Γ mediante $\boldsymbol{\tau} = (-\nu_2, \nu_1)$. Per $w \in H^{1/2}(\Gamma)$ si definisca la derivata tangente di w per mezzo della formula

$$D_{\boldsymbol{\tau}} w = (D_2 u, -D_1 u) \cdot \boldsymbol{\nu}\,|_{\Gamma}$$

ove $u \in H^1(\Omega)$ è tale che $u|_\Gamma = w$.

Si verifichi che la costruzione ha senso, di fatto non dipende dalla scelta di u e fornisce $D_{\boldsymbol{\tau}} w \in H^{-1/2}(\Gamma)$ e che l'operatore $D_{\boldsymbol{\tau}}$ definito di conseguenza è lineare e continuo da $H^{1/2}(\Gamma)$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Si verifichi inoltre che, nel caso del semipiano, la derivata $D_{\boldsymbol{\tau}} w$ è la derivata di w nel senso delle distribuzioni sulla retta $\mathbb{R} = \partial\mathbb{R}^2_+$.

2. In riferimento all'esercizio precedente, si controlli che, se si sostituisce Γ con un suo aperto regolare Γ_0, la costruzione fatta porta a un operatore lineare e continuo da $H^{1/2}(\Gamma_0)$ in $H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)'$.

Sia inoltre v la funzione definita nell'Esercizio 7.6.7, la cui derivata v', in base a quanto appena asserito, appartiene a $H^{1/2}_{00}(0,1/2)'$. Si dimostri che $v' \notin H^{-1/2}(0,1/2)$, così che l'inclusione di $H^{-1/2}(0,1/2)$ in $H^{1/2}_{00}(0,1/2)'$ è stretta.

Si noti che dal fatto che l'inclusione di $H^{-1/2}(\Gamma_0)$ in $H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)'$ è stretta si deduce che è stretta anche l'inclusione di $H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)$ in $H^{1/2}(\Gamma_0)$, cioè che non per tutte le v di $H^{1/2}(\Gamma_0)$ il prolungamento triviale $\widetilde{v}$ appartiene a $H^{1/2}(\Gamma)$.

10. Immersioni compatte

Dal ben noto Teorema di Riesz–Fréchet–Kolmogorov si deduce immediatamente il criterio di compattezza che enunciamo nella forma di lemma.

10.1. Lemma. *Siano $\mathcal{U}$ un sottoinsieme limitato di $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $L, \alpha > 0$ tali che*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x+h) - u(x)|^2\,dx \le L|h|^\alpha \qquad \forall\, u \in \mathcal{U} \quad \forall\, h \in \mathbb{R}^n. \tag{10.1}$$

Allora, per ogni $\omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, l'insieme delle restrizioni a ω delle funzioni di $\mathcal{U}$ è relativamente compatto in $L^2(\omega)$. ∎

La prima conseguenza, nota come *Teorema di Rellich*, è la seguente:

10.2. Teorema. *Se Ω è un aperto limitato e regolare di $\mathbb{R}^n$, l'immersione di $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ è compatta.* ∎

Dimostrazione. Proviamo una disuguaglianza nella direzione della (10.1). Siano $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ e $h \in \mathbb{R}^n$. Allora, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, risulta

$$|v(x+h) - v(x)|^2 = \left| \int_0^1 \nabla v(x+th) \cdot h\,dt \right|^2 \le |h|^2 \int_0^1 |\nabla v(x+th)|^2\,dt.$$

Integrando deduciamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x+h)-v(x)|^2\,dx \le |h|^2 \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_0^1 |\nabla v(x+th)|^2\,dt$$
$$= |h|^2 \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(x+th)|^2\,dx = |h|^2 \int_0^1 dt \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v(y)|^2\,dy$$

e concludiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x+h)-v(x)|^2\,dx \le |h|^2\, \|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 . \tag{10.2}$$

Siccome $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ è denso in $H^1(\mathbb{R}^n)$, la (10.2) vale poi per ogni $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$.

Sia ora $\mathcal{B}$ un sottoinsieme limitato di $H^1(\Omega)$. Scelto un operatore $\mathcal{P}$ lineare e continuo da $H^1(\Omega)$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$ di prolungamento, poniamo $\mathcal{U} = \mathcal{P}(\mathcal{B})$. Allora $\mathcal{U}$ è limitato in $H^1(\mathbb{R}^n)$ e, se $v \in \mathcal{U}$, il secondo membro della (10.2) si maggiora con $L|h|^2$ per un certo $L > 0$. Il Lemma 10.1 assicura allora che $\mathcal{B}$ è relativamente compatto in $L^2(\Omega)$. ∎

Ecco l'altro risultato che vogliamo presentare:

10.3. Teorema. *Se Ω è limitato e regolare, allora l'operatore di traccia $u \mapsto u|_\Gamma$ è compatto da $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Gamma)$ e l'immersione di $H^{1/2}(\Gamma)$ in $L^2(\Gamma)$ è compatta.* ∎

Dimostrazione. Per ogni punto $x \in \Gamma$ costruiamo i due intorni ω e ω_0 e l'applicazione $\mathbf{G}$ dati dall'Osservazione 5.3 supponendo senz'altro che ω_0 sia limitato. Siccome Γ è un compatto di $\mathbb{R}^n$, ci riconduciamo al caso di un numero finito di terne $(\omega_j, \omega_{0j}, \mathbf{G}_j)$, $j = 1, \ldots, r$. Introduciamo poi una partizione dell'unità $\{\psi_j,\ 1 \le j \le r\}$ di classe C^1 relativa al compatto Γ e al suo ricoprimento aperto $\{\omega_j,\ 1 \le j \le r\}$. Costruiamo ora, per ogni j, i tre operatori L_j, L'_j e T_j come segue.

Se $u \in H^1(\Omega)$, consideriamo la restrizione di $\psi_j u$ a $\Omega \cap \omega_j$ e denotiamola ancora con $\psi_j u$ per non appesantire le notazioni. Consideriamo inoltre la restrizione di $\mathbf{G}_j$ a $\mathbb{R}^n_+ \cap \omega_{0j}$ e denotiamola ancora con $\mathbf{G}_j$. Costruiamo allora la funzione composta $(\psi_j u) \circ \mathbf{G}_j$ e denotiamola con $L_j u$. La funzione $L_j u$ appartiene a $H^1(\mathbb{R}^n_+ \cap \omega_{0j})$; inoltre, siccome essa è nulla vicino a $\partial\omega_{0j}$, il suo prolungamento triviale $L'_j u$ al semispazio $\mathbb{R}^n_+$ appartiene a $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Consideriamone allora la traccia su $\partial\mathbb{R}^n_+$ e denotiamo con $T_j u$ la restrizione di quest'ultima all'aperto limitato $\partial\mathbb{R}^n_+ \cap \omega_{0j}$.

Chiaramente T_j è lineare e continuo da $H^1(\Omega)$ in $L^2(\mathbb{R}^n_+ \cap \omega_{0j})$. Inoltre, applicata la (7.2) a $L'_j u$, vediamo che, se u descrive un limitato di $H^1(\Omega)$, allora $T_j u$ descrive un insieme relativamente compatto in $L^2(\mathbb{R}^n_+ \cap \omega_{0j})$. Dunque l'operatore T_j è anche compatto.

Detto ciò, dimostriamo la compattezza dell'operatore di traccia controllando che esso trasforma le successioni convergenti debolmente in successioni convergenti fortemente. Supponiamo dunque $u_k \rightharpoonup 0$ in $H^1(\Omega)$. Quanto abbiamo appena dimostrato implica $T_j u_k \to 0$ in $L^2(\mathbb{R}^n_+ \cap \omega_{0j})$ per $j = 1, \ldots, r$. Ricostruite allora le tracce $u_k|_\Gamma$ per mezzo delle funzioni $T_j u_k$ e delle trasformazioni $\mathbf{G}_j^{-1}$, è chiaro che $u_k|_\Gamma \to 0$ in $L^2(\Gamma)$.

La seconda affermazione dell'enunciato segue allora immediatamente. Infatti l'immersione in questione coincide con $\gamma_0 \circ \mathcal{R}$, ove $\mathcal{R} : H^{1/2}(\Gamma) \to H^1(\Omega)$ è un qualunque operatore lineare e continuo che rileva le tracce e $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ è l'operatore di traccia che abbiamo appena dimostrato essere compatto. ■

10.4. Esercizi

1. Dimostrare che, se Ω è limitato e regolare, per ogni $m \geq 0$ intero l'immersione di $H^{m+1}(\Omega)$ in $H^m(\Omega)$ è compatta.

2. Dimostrare che l'immersione di $H_0^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ è compatta nella sola ipotesi che Ω sia limitato.

3. Dedurre che l'immersione di $L^2(\Omega)$ in $H^{-1}(\Omega)$ è compatta se Ω è limitato.

4. Dimostrare che, se esistono $r > 0$ e una successione divergente $\{x_k\}$ di punti di Ω tali che, per ogni k, la palla $B_r(x_k)$ sia inclusa in Ω, allora le immersioni di $H_0^1(\Omega)$ e di $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ non sono compatte. Si noti che $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n_+$ verificano banalmente questa condizione. Dunque non basta la regolarità dell'aperto per avere le immersioni compatte e, nel caso in cui Ω non sia limitato, occorre imporre che Ω sia in qualche modo "piccolo" all'infinito.

5. Dimostrare che, anche se Ω è limitato e regolare, l'operatore di traccia non può essere compatto da $H^1(\Omega)$ in $H^{1/2}(\Gamma)$.

6. Dimostrare che, se Ω e Γ_0 sono regolari, l'operatore di traccia $v \mapsto v|_{\Gamma_0}$ è compatto da $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Gamma_0)$ e che l'immersione di $H^{1/2}(\Gamma_0)$ in $L^2(\Gamma_0)$ è compatta.

7. Dimostrare che, se Ω è limitato e regolare, l'immersione di $L^2(\Gamma)$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$ è compatta.

Capitolo III

Problemi ellittici

Ora applichiamo i risultati dei capitoli precedenti allo studio dei problemi ai limiti per equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico. Sebbene gli strumenti visti si possano utilizzare anche per le equazioni di ordine superiore e per i sistemi, e su questi daremo qualche esempio particolarmente semplice, per lasciare alla trattazione il suo carattere elementare discutiamo in dettaglio il caso del secondo ordine in aperti limitati. Va notato che questa categoria copre una quantità notevole di problemi relativi a equazioni a derivate parziali ellittiche in forma di divergenza importanti nelle applicazioni.

1. Terne hilbertiane e forme coercive

In vista dell'utilizzo del Teorema I.10.3 (e del Teorema di Lax–Milgram) nella discussione e nella risoluzione dei problemi del secondo ordine, conviene introdurre una classe abbastanza vasta di sottospazi di $H^1(\Omega)$ e di forme bilineari e continue su $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ che ne verifichino le ipotesi.

Nella costruzione della terna hilbertiana prendiamo

$$H = L^2(\Omega) \tag{1.1}$$

con il prodotto scalare usuale. Per quanto riguarda V, assumiamo

$$V \text{ è un sottospazio chiuso di } H^1(\Omega) \text{ denso in } L^2(\Omega)\,. \tag{1.2}$$

In tali condizioni (V, H, V') è una terna hilbertiana e l'immersione $H \subset V'$ significa

$$\langle u, v \rangle = \int_\Omega uv\,dx \qquad \forall\, u \in L^2(\Omega) \quad \forall\, v \in V.$$

In particolare, se $V = H^1_0(\Omega)$, essa coincide con l'immersione usuale di $L^2(\Omega)$ in $H^{-1}(\Omega)$.

Per quanto riguarda la forma bilineare poniamo formalmente

$$a(u,v) = \int_\Omega \bigl((A\nabla u) \cdot \nabla v + (\mathbf{b} \cdot \nabla u)v + (\mathbf{c}u) \cdot \nabla v + duv \bigr)\, dx \tag{1.3}$$

ove $A = (a_{ij})$ è una matrice $n \times n$ di funzioni definite in Ω, le funzioni $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$ sono definite in Ω e a valori in $\mathbb{R}^n$, mentre d è una funzione scalare definita in Ω. In forma più esplicita possiamo scrivere

$$a(u,v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(D_j u)(D_i v) + \sum_{i=1}^n \bigl(b_i (D_i u) v + c_i u D_i v \bigr) + duv \right) dx$$

Benché si possano dare ipotesi ancora più generali, ci limiteremo al caso in cui tutti i coefficienti introdotti sono limitati. Assumiamo precisamente

$$A \in L^\infty(\Omega)^{n\times n}, \qquad \mathbf{b}, \mathbf{c} \in L^\infty(\Omega)^n \qquad \text{e} \qquad d \in L^\infty(\Omega). \tag{1.4}$$

In tali condizioni, la (1.3) definisce una forma bilineare e continua su $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$. Abbiamo infatti

$$|a(u,v)| \le M \, \|u\|_{1,\Omega} \, \|v\|_{1,\Omega} \qquad \forall \, u, v \in H^1(\Omega) \tag{1.5}$$

ove M dipende solo da n e dalla massima delle norme relative alle (1.4).

La condizione che assicura qualche tipo di coercività su $H^1(\Omega)$ o su un suo sottospazio è detta condizione di *uniforme ellitticità* e si esprime così: esiste $\alpha_0 > 0$ tale che

$$(A(x)\xi) \cdot \xi \ge \alpha_0 |\xi|^2 \qquad \forall \, \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{1.6}$$

Abbiamo infatti il risultato seguente:

1.1. Proposizione. *Nelle ipotesi* (1.4) *e* (1.6) *sui coefficienti della forma* (1.3), *per ogni* $\alpha < \alpha_0$ *esiste* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$a(v,v) + \lambda_0 \, \|v\|^2_{0,\Omega} \ge \alpha \, \|v\|^2_{1,\Omega} \qquad \forall \, v \in H^1(\Omega). \; \blacksquare \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Sia $v \in H^1(\Omega)$. La (1.6) assicura che

$$\int_\Omega (A\nabla v) \cdot \nabla v \, dx \ge \alpha_0 \, \|\nabla v\|^2_{0,\Omega} \, .$$

D'altra parte, grazie alla disuguaglianza elementare $2ab \le \varepsilon a^2 + (1/\varepsilon) b^2$, valida per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e ogni $\varepsilon > 0$, abbiamo

$$\left| \int_\Omega (\mathbf{b} \cdot \nabla v) v \, dx \right| \le \|\mathbf{b}\|_{L^\infty} \, \|\nabla v\|_{0,\Omega} \, \|v\|_{0,\Omega} \le \varepsilon \, \|\nabla v\|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{4\varepsilon} \, \|\mathbf{b}\|^2_{L^\infty} \, \|v\|^2_{0,\Omega}$$

e il termine relativo a $\mathbf{c}$ è analogo. Abbiamo pertanto

$$a(v,v) \ge \alpha_0 \, \|\nabla v\|^2_{0,\Omega} - 2\varepsilon \, \|\nabla v\|^2_{0,\Omega} - \frac{1}{4\varepsilon} \left(\|\mathbf{b}\|^2_{L^\infty} + \|\mathbf{c}\|^2_{L^\infty} \right) \|v\|^2_{0,\Omega} + \left(\inf_\Omega d \right) \|v\|^2_{0,\Omega}$$

da cui la tesi. $\blacksquare$

Notiamo che la forma (1.3) contiene come casi particolari anche integrali su varietà di dimensione $n-1$. Preso come Ω, ad esempio, il quadrato $]-1,1[^2$ di $\mathbb{R}^2$, siano $\Sigma = \Omega \cap \{x_1 = 0\}$, χ la funzione caratteristica di $\Omega \cap \{x_1 < 0\}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{c} = (\chi, 0)$. Allora, come si verifica immediatamente, per $u, v \in \mathcal{D}(\Omega)$ vale l'uguaglianza

$$\int_\Sigma uv \, ds = \int_\Omega \big((\mathbf{b} \cdot \nabla u) v + (\mathbf{c} u) \cdot \nabla v \big) \, dx.$$

Per densità, la stessa uguaglianza vale almeno se $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Dunque l'aggiunta di integrali superficiali alla forma (1.3) può essere ritenuta ridondante. Ciò nonostante, consideriamo in modo esplicito un integrale superficiale, per fissare le idee un integrale di bordo, e sostituiamo la definizione (1.3) della forma a con la seguente

$$a(u,v) = \int_\Omega \big((A\nabla u) \cdot \nabla v + (\mathbf{b} \cdot \nabla u)v + (\mathbf{c}u) \cdot \nabla v + duv \big)\, dx + \int_\Gamma \varphi uv \, ds. \tag{1.8}$$

Perché il termine nuovo abbia significato supponiamo che Ω sia il semispazio oppure un aperto limitato e regolare e che

$$\varphi \in L^\infty(\Gamma). \tag{1.9}$$

In tali condizioni abbiamo

$$\left| \int_\Gamma \varphi uv \, ds \right| \le \|\varphi\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u\|_{L^2(\Gamma)} \|v\|_{L^2(\Gamma)} \le c^2 \|\varphi\|_{L^\infty(\Gamma)} \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}$$

ove c è la norma dell'operatore di traccia da $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Gamma)$.

In vista dell'estensione della (1.7), presentiamo due risultati astratti di interesse anche più generale.

1.2. Lemma. *Siano V e E due spazi di Hilbert, $L \in \mathcal{K}(V;E)$ e $|\cdot|$ una norma in V prehilbertiana e continua. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una costante $C_\varepsilon > 0$ tale che*

$$\|Lv\|_E \le \varepsilon \|v\|_V + C_\varepsilon |v| \qquad \forall\, v \in V. \;\blacksquare \tag{1.10}$$

Dimostrazione. Per assurdo, esistano un numero $\varepsilon > 0$ e una successione $\{v_k\}$ in V tali che

$$\|Lv_k\|_E > \varepsilon \|v_k\|_V + k\,|v_k| \qquad \forall\, k.$$

Osservato che $v_k \ne 0$, poniamo $u_k = v_k / \|v_k\|_V$ così che

$$\|u_k\|_V = 1 \qquad \text{e} \qquad \|Lu_k\|_E > \varepsilon + k\,|u_k|. \tag{1.11}$$

Tenendo conto del Teorema di compattezza debole, possiamo senz'altro supporre $u_k \rightharpoonup u$ in V per un certo $u \in V$. Siccome la successione $\{Lu_k\}$ è limitata in E dato che L è lineare e continuo, dalla (1.11) deduciamo che $|u_k| \to 0$ e ora vediamo che ciò implica $u = 0$.

Detto infatti $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ il prodotto scalare in V associato alla norma $|\cdot|$, l'applicazione $v \mapsto (u,v)$ è lineare e continua, per cui la convergenza debole $u_k \rightharpoonup u$ in V e la disuguaglianza di Schwarz implicano

$$|u|^2 = (u,u) = \lim_{k\to\infty} (u, u_k) \le \liminf_{k\to\infty} |u|\,|u_k|.$$

Siccome $|u_k| \to 0$, concludiamo che $u = 0$.

Dunque $u_k \rightharpoonup 0$ in V. D'altra parte, per la (1.11), abbiamo $\|Lu_k\|_E \ge \varepsilon$ per ogni k e ciò contraddice la compattezza di L. $\blacksquare$

1.3. Lemma. *Siano* V, H, W *e* Z *quattro spazi di Hilbert con* V *sottospazio vettoriale di* H. *Siano inoltre* $A \in \mathcal{L}(V;W)$ *e* $B \in \mathcal{L}(V;Z)$. *Supponiamo che*

$$\text{l'immersione di } V \text{ in } H \text{ sia compatta (in particolare continua)} \tag{1.12}$$

$$N(A) \cap N(B) = \{0\} \tag{1.13}$$

$$\text{esista } M > 0 \text{ tale che} \qquad \|v\|_V \le M\,(\|Av\|_W + \|v\|_H) \quad \forall\, v \in V. \tag{1.14}$$

Allora esiste una costante c *tale che*

$$\|v\|_H \le c\,(\|Av\|_W + \|Bv\|_Z) \qquad \forall\, v \in V \tag{1.15}$$

e il secondo membro della (1.15) *definisce una norma in* V *equivalente a quella preesistente.*

Se, in aggiunta, B *è un operatore compatto, allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste una costante* $C_\varepsilon > 0$ *tale che*

$$\|Bv\|_Z \le \varepsilon\,\|Av\|_W + C_\varepsilon\,\|v\|_H \qquad \forall\, v \in V. \; \blacksquare \tag{1.16}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la (1.15) applicando il Lemma 1.2 agli spazi V e H e prendendo come L l'immersione di V in H, che è compatta per ipotesi, e come $|\cdot|$ la norma in V definita dall'uguaglianza

$$|v|^2 = \|Av\|_W^2 + \|Bv\|_Z^2 .$$

Si osservi che $|\cdot|$ è effettivamente una norma, in particolare grazie all'ipotesi (1.13). La disuguaglianza (1.10) diventa allora

$$\|v\|_H \le \varepsilon\,\|v\|_V + C_\varepsilon\,(\|Av\|_W + \|Bv\|_Z) .$$

Utilizzando la (1.14) e scegliendo ε abbastanza piccolo concludiamo.

Grazie alla (1.15) appena provata, alla continuità dell'immersione di V in H e alla (1.14), vediamo poi che il secondo membro della (1.15) definisce una norma in V equivalente a quella preesistente. In particolare possiamo sostituire $\|v\|_H$ con $\|v\|_V$ nel primo membro della (1.15) stessa.

Dimostriamo ora la la (1.16) applicando il Lemma 1.2 agli spazi V e Z e prendendo $L = B$ e $|\cdot| = \|\cdot\|_H$. La (1.10) diventa

$$\|Bv\|_Z \le \varepsilon\,\|v\|_V + C_\varepsilon\,\|v\|_H$$

e ancora la (1.14) ci permette di concludere immediatamente. $\blacksquare$

Una semplice applicazione del lemma precedente porta all'estensione desiderata della disuguaglianza di coercività (1.7):

1.4. Proposizione. *Sia* Ω *il semispazio oppure un aperto connesso, limitato e regolare e valgano le ipotesi* (1.4), (1.6) e (1.9) *sui coefficienti della forma* (1.8). *Si supponga inoltre* $\varphi \ge 0$ *oppure* Ω *limitato. Allora per ogni* $\alpha > \alpha_0$ *esiste* $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ *tale che valga la* (1.7). $\blacksquare$

Dimostrazione. Ovviamente il termine nuovo non crea problemi se $\varphi \geq 0$. Esaminiamo allora il caso in cui Ω è limitato e regolare. Allora vale una stima del tipo

$$\left| \int_\Gamma \varphi v^2 \, ds \right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Gamma)} \|v\|^2_{L^2(\Gamma)} \leq \varepsilon \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + C_\varepsilon \|v\|^2_{L^2(\Omega)} .$$

Infatti la (1.16) del Lemma 1.3 è applicabile con le scelte

$$V = H^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad W = L^2(\Omega)^n, \quad Z = L^2(\Gamma)$$
$$A = \nabla \qquad \text{e} \qquad B = \gamma_0$$

ove γ_0 è l'operatore di traccia, grazie ai teoremi II.2.4, II.10.2 e II.10.3. Dunque si può procedere come nella dimostrazione della Proposizione 1.1. ∎

Ecco ancora una utile applicazione del Lemma 1.3.

1.5. Proposizione. *Siano Ω un aperto connesso, limitato e regolare e Γ_0 un aperto di Γ. Allora esiste una costante c tale che valga la disuguaglianza di Poincaré*

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq c \left(\|\nabla v\|_{0,\Omega} + \left| \int_{\Gamma_0} v \, ds \right| \right) \qquad \forall \, v \in H^1(\Omega). \tag{1.17}$$

In particolare, esiste una costante c tale che

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq c \, \|\nabla v\|_{0,\Omega} \qquad \forall \, v \in H^1_{0,\Gamma_0}(\Omega). \ ∎ \tag{1.18}$$

Dimostrazione. Basta applicare la (1.15) del Lemma 1.3 scegliendo

$$V = H^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega), \quad W = L^2(\Omega)^n, \quad Z = \mathbb{R}$$
$$Av = \nabla v \quad \text{e} \quad Bv = \int_{\Gamma_0} v \, ds \qquad \text{per} \ \ v \in H^1(\Omega). \ ∎$$

Segnaliamo però che la validità della (1.18) non è in realtà legata così strettamente alla compattezza dell'immersione di $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ (Teorema II.10.2) come sembra dalla dimostrazione precedente. Si vedano in proposito gli esercizi successivi.

1.6. Esercizi

1. Dimostrare con un calcolo diretto che la disuguaglianza di Poincaré

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq (b-a) \, \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)^n}$$

vale per ogni $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\operatorname{supp} v \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times [a,b]$. Estendere poi la stessa disuguaglianza a tutte le funzioni $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ verificanti la stessa restrizione sul supporto.

2. Dimostrare che, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \,]a,b[$, allora

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq (b-a) \, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^n}$$

per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$.

3. Usando il Lemma 1.3, dimostrare che, se Ω è connesso, limitato e regolare e Ω_0 è un sottoinsieme di Ω di misura positiva, allora ciascuna delle formule

$$\|v\|^2 = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega_0)}$$
$$\|v\|^2 = \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(\int_{\Omega_0} v(x)\,dx \right)^2$$

definisce una norma hilbertiana su $H^1(\Omega)$ equivalente a quella usuale.

4. Si consideri su $H^1(\mathbb{R})$ la norma

$$\|v\| = \|v'\|_{L^2} .$$

Dimostrare che $\|\cdot\|$ è effettivamente una norma, ma che rispetto a $\|\cdot\|$ lo spazio $H^1(\mathbb{R})$ non è completo. In particolare la norma $\|\cdot\|$ non è equivalente a quella usuale.

5. Usando il Lemma 1.3, dimostrare che, se Ω è connesso, limitato e regolare, la formula

$$\|v\|^2 = \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|^2_{0,\Omega} + \|v\|^2_{0,\Omega}$$

definisce una norma hilbertiana in $H^2(\Omega)$ equivalente a quella usuale. Generalizzare al caso di $H^m(\Omega)$. Segnaliamo però che questo fatto ha validità più generale: ad esempio esso è vero nel caso $\Omega = \mathbb{R}^n$.

2. Problemi variazionali e loro interpretazione

Fissati un sottospazio chiuso V di $H^1(\Omega)$ e la forma a data dalla (1.3) oppure, nell'ipotesi che per Ω valgano i teoremi di traccia, dalla (1.8), consideriamo il problema variazionale generale di trovare $u \in V$ tale che

$$a(u,v) = \langle F, v \rangle \qquad \forall\, v \in V \tag{2.1}$$

ove F è un elemento di V' . Di un problema di questo tipo discutiamo esistenza e unicità e diamo l'interpretazione in termini di problema ai limiti per un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine.

Una risposta è data naturalmente dal Teorema di Lax–Milgram e si può vedere caso per caso se esso è applicabile. Vedremo in proposito qualche problema modello.

Un risultato generale, valido tuttavia solo per aperti limitati e regolari in quanto richiede l'uso del Teorema II.10.2, si ottiene invece applicando la Proposizione 1.4 e il Teorema I.10.3 e fornisce *l'alternativa di Fredholm* espressa dal risultato che enunciamo di seguito e che, chiaramente, non necessita di dimostrazione.

2.1. Teorema. *Siano* Ω *un aperto limitato e regolare di* $\mathbb{R}^n$ *e* V *verificante la* (1.2). *Sia* a *la forma su* $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ *data dalla* (1.8), *ove i coefficienti soddisfano le regolarità*

(1.4) e (1.9) e la condizione di ellitticità uniforme (1.6). Allora valgono le conclusioni seguenti.

i) Se il problema (2.1) con $F = 0$ possiede in V la sola soluzione nulla, allora, per ogni $F \in V'$, il problema (2.1) ha in V una e una sola soluzione u e l'applicazione $F \mapsto u$ è continua.

ii) Se invece il problema (2.1) con $F = 0$ possiede in V anche soluzioni non banali, allora queste costituiscono, con la funzione nulla, uno spazio di dimensione finita N; le soluzioni del problema aggiunto, che consiste nel trovare $u^* \in V$ tale che

$$a(v, u^*) = 0 \qquad \forall\, v \in V, \tag{2.2}$$

costituiscono uno spazio ancora di dimensione N e, se $F \in V'$, il problema (2.1) ha soluzioni se e solo se sono soddisfatte le N condizioni di compatibilità

$$\langle F, u_j^* \rangle = 0 \qquad \textit{per}\ \ j = 1, \ldots, N, \tag{2.3}$$

ove $\{u_1^*, \ldots, u_N^*\}$ è una base di soluzioni di (2.2). ∎

Passiamo ora all'interpretazione del problema (2.1) in termini di problema ai limiti e osserviamo che, perché (2.1) implichi che u risolva un'equazione differenziale in Ω (naturalmente nel senso delle distribuzioni), occorre che tutte le funzioni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ siano ammesse come funzioni test, cioè che

$$\mathcal{D}(\Omega) \subseteq V. \tag{2.4}$$

Si noti che questa condizione implica la densità di V in $L^2(\Omega)$. Inoltre, nell'ipotesi che V sia un sottospazio chiuso di $H^1(\Omega)$, la (2.4) equivale alla condizione $H_0^1(\Omega) \subseteq V$ e, grazie all'Esercizio II.7.6.8, alla condizione

$$V = \Big\{ v \in H^1(\Omega) :\ v\,|_\Gamma \in W \Big\} \tag{2.5}$$

ove W è un sottospazio chiuso di $H^{1/2}(\Gamma)$.

Supponiamo infine che l'elemento $F \in V'$ sia definito dall'uguaglianza

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega (f_0 v + \mathbf{f} \cdot \nabla v)\, dx + {}_{-1/2,\Gamma}\langle g, v\,|_\Gamma \rangle_{1/2,\Gamma} \qquad \forall\, v \in V \tag{2.6}$$

ove i dati f_0, $\mathbf{f}$ e g verificano le condizioni

$$f_0 \in L^2(\Omega), \qquad \mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n \qquad \text{e} \qquad g \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{2.7}$$

Notiamo però che questa definizione è ridondante. Infatti, già con $g = 0$, se lasciamo variare f_0 e $\mathbf{f}$ in $L^2(\Omega)$ e in $L^2(\Omega)^n$, otteniamo tutti gli elementi di V'. D'altra parte accade spesso che il secondo membro dell'equazione variazionale sia presentato in modo naturale come integrale di bordo, per cui abbiamo ritenuto opportuno includere questa possibilità addirittura in modo esplicito.

Con tutte queste ipotesi, se $u \in H^1(\Omega)$ e se poniamo

$$\mathbf{z} = A\nabla u + \mathbf{c}u - \mathbf{f} \qquad \text{e} \qquad h = f_0 - \mathbf{b} \cdot \nabla u - du, \tag{2.8}$$

abbiamo $\mathbf{z} \in L^2(\Omega)^n$ e $h \in L^2(\Omega)$ e l'equazione variazionale cui siamo interessati si scrive

$$\int_\Omega \mathbf{z} \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \varphi u v \, ds = \int_\Omega h v \, dx + \int_\Gamma g v \, ds \qquad \forall \, v \in V. \tag{2.9}$$

Allora la sua interpretazione diventa caso particolare del risultato seguente, che naturalmente non si cura, ad esempio, dell'esistenza della soluzione, ma solo del significato:

2.2. Teorema. *Siano* Ω *un aperto limitato regolare,* V *dato dalla* (2.5) *ove* W *è un sottospazio chiuso di* $H^{1/2}(\Gamma)$, $\varphi \in L^\infty(\Gamma)$ *e* $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. *Allora una coppia* $(\mathbf{z}, h) \in L^2(\Omega)^n \times L^2(\Omega)$ *verifica l'equazione variazionale* (2.9) *se e solo se risolve il problema*

$$-\operatorname{div} \mathbf{z} = h \qquad \text{in } \Omega \tag{2.10}$$

$${}_{-1/2,\Gamma}\langle \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\nu} \,|_\Gamma , w \rangle_{1/2,\Gamma} + \int_\Gamma \varphi u w \, ds = {}_{-1/2,\Gamma}\langle g, w \rangle_{1/2,\Gamma} \qquad \forall \, w \in W. \ \blacksquare \tag{2.11}$$

Dimostrazione. Valga la (2.9). Siccome $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq V$, possiamo scegliere $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ ad arbitrio nella (2.9) e concludere immediatamente che vale la (2.10) nel senso delle distribuzioni. Abbiamo in particolare $\operatorname{div} \mathbf{z} \in L^2(\Omega)$, da cui

$$\mathbf{z} \in H(\operatorname{div}, \Omega) \tag{2.12}$$

così che la (2.11) acquista significato grazie ai teoremi II.5.8 e II.9.2. Tenendo conto della (2.10) già dedotta, abbiamo allora per ogni $v \in V$

$$\begin{aligned} {}_{-1/2,\Gamma}\langle \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\nu} \,|_\Gamma , v \,|_\Gamma \rangle_{1/2,\Gamma} &= \int_\Omega \mathbf{z} \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{z}) v \, dx \\ = \int_\Omega \mathbf{z} \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega h v \, dx &= {}_{-1/2,\Gamma}\langle g, v \,|_\Gamma \rangle_{1/2,\Gamma} - \int_\Gamma \varphi u v \, ds. \end{aligned}$$

Siccome, per definizione di V , al variare di v in V la traccia $v|_\Gamma$ descrive esattamente lo spazio W , la (2.11) segue.

Viceversa, valgano le (2.10) e (2.11). Fissata ad arbitrio $v \in V$, moltiplichiamo la (2.10) per v e integriamo su Ω . Grazie alla formula di integrazione per parti II.(9.2), le (2.10) e (2.11) implicano

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \mathbf{z} \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \varphi u v \, ds \\ &= -\int_\Omega (\operatorname{div} \mathbf{z}) v \, dx + {}_{-1/2,\Gamma}\langle \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\nu} \,|_\Gamma , v \,|_\Gamma \rangle_{1/2,\Gamma} + \int_\Gamma \varphi u v \, ds \\ &= \int_\Omega h v \, dx + {}_{-1/2,\Gamma}\langle g, v \,|_\Gamma \rangle_{1/2,\Gamma} \end{aligned}$$

cioè la (2.9). ∎

La seconda parte della dimostrazione serve da modello, o almeno da spunto, per la costruzione delle formulazioni variazionali dei problemi ellittici del secondo ordine.

2.3. Osservazione. In riferimento alla (2.8), si noti che in generale non si può calcolare $\operatorname{div}\mathbf{z}$ con la formula di Leibniz. Ad esempio lo sviluppo

$$\operatorname{div}(A\nabla u) = \sum_{i=1}^{n} D_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_j u\Big) = \sum_{i,j=1}^{n}\big((D_i a_{ij})D_j u + a_{ij}D_i D_j u\big)$$

contiene dei prodotti privi di significato. L'equazione (2.10), dunque, deve essere lasciata scritta *in forma di divergenza*. Le equazioni ellittiche non in forma di divergenza con coefficienti irregolari non rientrano nella teoria che stiamo sviluppando.

Si noti inoltre che, in generale, solo la traccia $\mathbf{z}\cdot\boldsymbol{\nu}|_\Gamma$ è ben definita, a meno che non sia nota un'ulteriore regolarità dei singoli addendi. In particolare non è detto che abbia senso la traccia $(A\nabla u)\cdot\boldsymbol{\nu}|_\Gamma$.

2.4. Osservazione. Consideriamo ora una funzione u che non solo appartiene a $H^1(\Omega)$ e, con le notazioni (2.8), risolve l'equazione variazionale (2.9), ma appartiene anche a V . Allora u è una funzione di $H^1(\Omega)$ che verifica le tre condizioni seguenti:
(a) risolve l'equazione a derivate parziali (2.10);
(b) appartiene a V , cioè

$$u\,|_\Gamma \in W, \tag{2.13}$$

(c) verifica la condizione (2.11).

Le due condizioni (b) e (c) , cioè le (2.13) e (2.11), sono le *condizioni ai limiti*. Esclusi i due casi estremi $W = \{0\}$ (cioè $V = H_0^1(\Omega)$) e $W = H^{1/2}(\Gamma)$ (cioè $V = H^1(\Omega)$), nei quali una delle due diventa vuota, ciascuna di esse è significativa. Si noti però che, mentre per ogni $u \in H^1(\Omega)$ ha senso chiedersi se u verifica la (2.13), la situazione è completamente diversa per quanto riguarda la (2.11). Quest'ultima, infatti, ha senso solo grazie alla (2.12). Orbene, è l'equazione (2.10) che implica la (2.12), non certo la sola appartenenza di u a $H^1(\Omega)$. Le condizioni (2.13) e (2.11) sono dunque di natura diversa e, per questo motivo, prendono nomi diversi: esse sono dette *condizioni ai limiti forzate* e, rispettivamente, *condizioni ai limiti naturali*.

La stessa terminologia viene poi adottata anche quando lo spazio V non soddisfa la condizione (2.4) e quindi non è di tipo (2.5). Per un problema più generale di tipo (2.1), la condizione forzata è espressa a parte nella forma $u \in V$, mentre l'equazione variazionale contiene un'equazione di qualche tipo e le condizioni naturali.

2.5. Esercizi

1. Esplicitare l'osservazione precedente nel caso del problema seguente: trovare $u \in V$ verificante la (2.1) con le scelte

$$V = \big\{v \in H^1(-1,1):\ v(-1) = v(0) = 0\big\}, \quad a(u,v) = \int_{-1}^{1} u'v'\,dx, \quad \langle F, v\rangle = v(1).$$

Si noti che $\mathcal{D}(-1,1)$ non è incluso in V e che, dunque, il problema non rientra nel teorema precedente. Ciò nonostante, esso esprime delle equazioni differenziali, certe condizioni forzate e certe condizioni naturali.

2. Detto V il sottospazio di $H^1(-1,1)$ costituito dalle funzioni nulle su $]-1,0[$, scrivere il problema di trovare $u \in V$ tale che

$$\int_{-1}^{1} u'v'\,dx = \int_{-1}^{1} fv \qquad \forall\, v \in V$$

nella forma di problema ai limiti.

2.6. Osservazione. Deve essere chiaro che diverse scelte della forma bilineare possono portare alla stessa equazione differenziale ma a diversi tipi di condizioni naturali. Consideriamo ad esempio il caso bidimensionale seguente, nel quale c è un parametro reale. Posto

$$A_c = \begin{bmatrix} 1 & c \\ -c & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{\tau} = (-\nu_2, \nu_1),$$

abbiamo per u regolare

$$-\operatorname{div}(A_c \nabla u) = -\Delta u \qquad \text{e} \qquad (A_c \nabla u)\cdot \boldsymbol{\nu} = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + c\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}}.$$

Dunque, completata la definizione della forma a prendendo gli altri coefficienti nulli, l'operatore di frontiera associato ad a, che in generale è detto *derivazione conormale rispetto ad* a, è una derivazione nella direzione normale se $c = 0$ e un operatore di derivata obliqua (a meno di un fattore moltiplicativo) in caso contrario.

Si osservi però che la differenza al variare di c si nota solo se la scelta del sottospazio V produce effettivamente condizioni ai limiti naturali: infatti, se $V = H_0^1(\Omega)$, si ottiene sempre lo stesso problema qualunque sia il valore di c.

3. Problemi tipici del secondo ordine

Presentiamo alcuni problemi classici del secondo ordine e rimandiamo a un paragrafo successivo la presentazione di alcuni casi semplici di equazioni di ordine superiore e di sistemi. Resta inteso che Ω è un aperto limitato e regolare.

3.1. Il problema di Dirichlet per il laplaciano. Consideriamo il problema

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{3.1}$$
$$u = 0 \qquad \text{su } \Gamma \tag{3.2}$$

del quale cerchiamo soluzioni in $H^1(\Omega)$. La (3.1) e la (3.2) sono intese naturalmente nel senso delle distribuzioni e, rispettivamente, nel senso del teorema di traccia.

Questo problema rientra nel quadro previsto dai risultati precedenti con le scelte

$$V = H_0^1(\Omega), \qquad a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx \qquad \text{e} \qquad F = f$$

nell'ipotesi $f \in H^{-1}(\Omega)$, dato che V' è proprio $H^{-1}(\Omega)$. La scelta di V è conforme alla (2.5) con $W = \{0\}$, per cui tutte le condizioni ai limiti sono forzate. La distribuzione f può essere scritta naturalmente nella forma

$$f = f_0 - \operatorname{div} \mathbf{f} \qquad \text{con} \;\; f_0 \in L^2(\Omega) \quad \text{e} \quad \mathbf{f} \in L^2(\Omega)^n.$$

Grazie alla disuguaglianza di Poincaré (1.17), la forma a è $V-$ ellittica e possiamo applicare il Teorema di Lax–Milgram. Dunque il problema (3.1–2) ha una e una sola soluzione u in $H^1(\Omega)$ e l'applicazione $f \mapsto u$ è lineare e continua da $H^{-1}(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$.

Inoltre, siccome la forma a è simmetrica, la soluzione u è anche l'unico punto di minimo del funzionale quadratico, detto *integrale di Dirichlet*,

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \langle f, v \rangle, \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$

Più in generale possiamo considerare il problema

$$-\Delta u = \lambda u + f \qquad \text{in} \;\; \Omega \tag{3.3}$$

$$u = 0 \qquad \text{su} \;\; \Gamma \tag{3.4}$$

ove λ è un parametro reale. Grazie anche al Teorema II.10.2, si applicano i risultati astratti di teoria spettrale, la condizione di coercività I.(10.11) essendo verificata con $\lambda_0 = 0$ e con la costante α di $V-$ ellitticità. Deduciamo che gli autovalori costituiscono una successione $\{\lambda_n\}$ strettamente positiva, monotona e divergente a $+\infty$ e che valgono le conclusioni riportate di seguito.

Se $\lambda \neq \lambda_n$ per ogni n, allora il problema (3.3–4) ha una e una sola soluzione u in $H^1(\Omega)$ e l'applicazione $f \mapsto u$ è lineare e continua da $H^{-1}(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$.

Se invece λ è uno degli autovalori, osservato che il problema omogeneo associato e l'aggiunto coincidono in quanto la forma a è simmetrica, il problema omogeneo ha un numero finito di soluzioni indipendenti $u_1, \ldots, u_N$ e il problema (3.3–4) ha soluzioni se e solo se f verifica le N condizioni di compatibilità

$$\langle f, u_i \rangle = 0 \qquad i = 1, \ldots, N,$$

che si riducono a condizioni di ortogonalità in $L^2(\Omega)$ se $f \in L^2(\Omega)$.

Istruttivo è il caso monodimensionale in cui Ω è un intervallo, particolarmente semplice dal punto di vista del calcolo se questo è $]0, \pi[$. Allora l'appartenenza di u a $H_0^1(0, \pi)$ significa $u(0) = u(\pi) = 0$ e autovalori e autosoluzioni sono dati dalle formule

$$\lambda_n = n^2 \quad \text{e} \quad u_n(x) = \sin nx, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

che confermano i risultati generali.

In questo caso tutti gli autospazi hanno dimensione 1, ma in generale ciò non avviene. Ad esempio, nel caso bidimensionale $\Omega = \,]0, \pi[^2$, lo spettro è costituito da tutte le somme del tipo $m^2 + n^2$ con $m, n \geq 1$ interi e a ciascuna coppia (m, n) corrisponde l'autosoluzione $\sin mx_1 \sin nx_2$. Dunque, se λ è un autovalore, la dimensione del corrispondente autospazio è pari al numero delle coppie (m,n) ammesse tali che $m^2+n^2=\lambda$.

Ma torniamo al caso monodimensionale considerato. Grazie all'Osservazione I.10.4, la successione $\{u_n\}$ costituisce una base hilbertiana di $L^2(0,\pi)$ e lo sviluppo di una funzione $u \in L^2(0,\pi)$ converge in $H^1(0,\pi)$ se e solo se $u \in H^1_0(0,\pi)$. Dunque la regolarità, anche alta, di u non migliora, da sola, la convergenza. Tutto ciò concorda naturalmente con la teoria elementare delle serie di Fourier.

Ricordiamo che la (3.1) è detta *equazione di Poisson*. Nel caso particolare in cui $f=0$, essa prende il nome di *equazione di Laplace* e le sue soluzioni, indipendentemente dalle eventuali condizioni ai limiti ad esse imposte, sono dette *funzioni armoniche*.

Osserviamo infine che tutto quanto è stato detto a proposito del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson si ripete con varianti minime per l'equazione

$$-\operatorname{div}(A\nabla u)=f \tag{3.5}$$

nelle ipotesi $A \in L^\infty(\Omega)^{n\times n}$ e (1.6).

3.2. Il problema di Neumann per il laplaciano. Consideriamo il problema

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g \qquad \text{su } \Gamma \tag{3.7}$$

del quale cerchiamo soluzioni in $H^1(\Omega)$. Ancora l'equazione è intesa nel senso delle distribuzioni mentre la (3.7) va vista nel senso del Teorema II.9.2.

Ancora abbiamo preso l'equazione di Poisson, ma il discorso si adatta al caso dell'equazione (3.5) in condizioni di limitatezza dei coefficienti e di uniforme ellitticità, la condizione al bordo essendo sostituita da $(A\nabla u)\cdot\boldsymbol{\nu}=g$.

Anche questo problema rientra nel quadro previsto dai risultati precedenti, ora con le scelte

$$V=H^1(\Omega), \qquad a(u,v)=\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx \qquad \text{e} \qquad \langle F,v\rangle = \int_\Omega fv\,dx+\int_\Gamma gv\,ds$$

nelle ipotesi $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\Gamma)$. La scelta fatta di V corrisponde a prendere $W=H^{1/2}(\Gamma)$ nella (2.5), per cui tutte le condizioni ai limiti sono naturali.

Si noti che, in riferimento al Teorema 2.2, abbiamo $\mathbf{z}=\nabla u$ e $h=f$ e che non possiamo generalizzare le ipotesi su f come nel caso del problema di Dirichlet. Se volessimo infatti prendere f generica in $H^{-1}(\Omega)$, dovremmo scegliere il funzionale F dato dalla (2.6) con la condizione $f_0-\operatorname{div}\mathbf{f}=f$ e applicare il Teorema 2.2 con $\mathbf{z}=\nabla u-\mathbf{f}$. Dunque la condizione al bordo non sarebbe quella desiderata. Al contrario, non offre problemi di sorta generalizzare le ipotesi su g e prendere $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$. In questo caso l'integrale di bordo deve essere sostituito dall'ovvia dualità.

Per quanto riguarda esistenza e unicità, possiamo applicare ancora la teoria spettrale e ancora siamo nel caso simmetrico. La coercività è soddisfatta con $\lambda_0>0$ piccolo ad arbitrio, per cui tutti gli autovalori sono non negativi e costituiscono una successione divergente. Però, al contrario di quanto avviene per il problema di Dirichlet, ora $\lambda = 0$ è un autovalore. Se Ω è connesso, l'autospazio corrispondente è costituito dalle funzioni costanti, come subito si vede prendendo $v = u$ nel problema omogeneo e applicando il Teorema II.2.4, così che la condizione di compatibilità su F necessaria e sufficiente per l'esistenza della soluzione del problema non omogeneo si scrive $\langle F, 1 \rangle = 0$, cioè

$$\int_\Omega f\,dx + \int_\Gamma g\,ds = 0. \tag{3.8}$$

Si noti che, nel caso più generale di un aperto regolare non necessariamente connesso, una base di autosoluzioni associate all'autovalore 0 è data dalle funzioni caratteristiche delle componenti connesse di Ω, per cui la (3.8) va sostituita con N condizioni analoghe, una per componente, ove N è il numero delle componenti. Si noterà che N è necessariamente finito proprio per la teoria spettrale, ma anche grazie alla definizione di aperto limitato e regolare.

Nel caso invece di un aperto illimitato dotato di infinite componenti connesse regolari, avremmo un autospazio di dimensione infinita in disaccordo con la teoria spettrale. Il Teorema I.10.3, infatti, non è applicabile e l'unico motivo di ciò sta nel fatto che l'immersione di $H^1(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$ non è più compatta. Anzi, queste righe ne sono una possibile dimostrazione. Notiamo invece che, per certi aperti con infinite componenti connesse, ad esempio per tutti gli aperti limitati, resta compatta l'immersione di $H^1_0(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$.

3.3. Osservazione. Nei due esempi precedenti l'equazione differenziale è molto particolare, ma anche nel caso generale si usa la terminologia che noi abbiamo adottato nei due casi appena visti. Precisamente, si parla di *problema di Dirichlet* per una certa equazione quando tutte le condizioni sono forzate, cioè quando la scelta è $V = H^1_0(\Omega)$, mentre nell'altro caso estremo, cioè $V = H^1(\Omega)$ e tutte le condizioni sono naturali, si parla di *problemi di Neumann*. Il plurale è d'obbligo, dato che per una stessa equazione si possono porre vari problemi di Neumann, come mostra l'Osservazione 2.6. La condizione (3.7) è la condizione che storicamente è chiamata di Neumann.

3.4. Condizioni di terzo tipo. Consideriamo il problema

$$-\Delta u = f \qquad \text{in } \Omega \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \varphi u = g \qquad \text{su } \Gamma \tag{3.10}$$

ove $\varphi \in L^\infty(\Gamma)$ e i dati f e g sono nelle condizioni dell'Esempio 3.2. Ancora bisogna scegliere $V = H^1(\Omega)$, così che anche questo rientra nella categoria dei problemi di Neumann. Tuttavia una condizione della forma (3.10) viene spesso chiamata *condizione di terzo tipo*, oppure *di Robin*. La forma bilineare da considerare si sceglie in modo ovvio

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_\Gamma \varphi uv\,ds$$

e non è difficile utilizzare il Lemma 1.3 e vedere che, per avere la $H^1(\Omega)-$ ellitticità, è sufficiente supporre φ non negativa e non identicamente nulla. In tali condizioni è applicabile il Teorema di Lax–Milgram e, siccome la forma a è simmetrica, anche in questo caso l'unica soluzione u è l'unico punto di minimo di un funzionale quadratico.

La sola ipotesi $\varphi \in L^\infty(\Gamma)$ garantisce comunque la possibilità di applicare la Proposizione 1.4 e di avere, di conseguenza, l'alternativa di Fredholm e, grazie alla simmetria di a, anche la struttura dello spettro e le proprietà delle autosoluzioni.

3.5. Un problema misto. Consideriamo ora, sempre per il laplaciano, il cosiddetto *problema misto di tipo Dirichlet–Neumann*, che consiste nel suddividere il bordo Γ in due parti Γ_0 e Γ_1 e nel cercare in $H^1(\Omega)$ la soluzione del sistema

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega && (3.11)\\
u &= 0 \qquad \text{su } \Gamma_0 && (3.12)\\
\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} &= g \qquad \text{su } \Gamma_1. && (3.13)
\end{aligned}
$$

Per gli stessi motivi che abbiamo discusso nel caso del problema di Neumann occorre limitarsi a prendere $f \in L^2(\Omega)$, mentre ora g può essere scelto non solo in $L^2(\Gamma_1)$, ma ad arbitrio nel corretto spazio di tracce, cioè in $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_1)'$, naturalmente se supponiamo che Γ_0 sia un aperto regolare di Γ e che Γ_1 sia l'aperto complementare $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \overline{\Gamma_0}$, che pure è regolare. Lievi ritocchi nella dimostrazione del Teorema 2.2, infatti, portano all'interpretazione (3.11–13) del problema variazionale ottenuto.

La vera differenza rispetto al problema di Neumann consiste nella scelta di V, che ora è $H^1_{0,\Gamma_0}(\Omega)$. Se Ω è anche connesso, allora vale la disuguaglianza di Poincaré (1.17) e il Teorema di Lax–Milgram è applicabile. Considerato poi il corrispondente problema di autovalori, valgono considerazioni simili a quelle viste nel caso del problema di Dirichlet.

3.6. Esercizi

1. Per ciascuno dei problemi monodimensionali elencati

$$
\begin{aligned}
-u'' = \delta \quad \text{in }]-1,1[, &\qquad u(-1) = u(1) = 0\\
-u'' + u = \delta \quad \text{in } \mathbb{R} &\\
-u'' + u' = 1 \quad \text{in }]0,1[, &\qquad u(0) = 0, \quad u'(1) = 1\\
-u'' = 2 \quad \text{in }]0,1[, &\qquad u(0) = 0, \quad u'(1) + 3u(1) = 1\\
-\frac{d}{dx}\big((2 + \operatorname{sign} x)u'(x)\big) = 1 \quad \text{in }]-1,1[, &\qquad u(-1) = u(1) = 0
\end{aligned}
$$

dei quali si cerca la soluzione in H^1 del corrispondente intervallo, applicare il Teorema di Lax–Milgram per dimostrare l'esistenza e l'unicità della soluzione. Calcolare poi la soluzione esplicitamente.

2. Considerato il problema di trovare $u \in H^1(0,1)$ tale che

$$
\int_0^1 u'v'\,dx = v(0) - v(1) - \int_0^1 (\ln x)v'\,dx \qquad \forall\, v \in H^1(0,1),
$$

dimostrare che esso ha soluzioni. Riscrivere poi il problema sotto forma di problema ai limiti del tipo di Neumann per un'equazione del secondo ordine e risolverlo esplicitamente. Si noti che per nessuna delle sue soluzioni u ha senso $u'(0)$.

3. Servendosi di un problema di Neumann e di un problema misto, dimostrare che le applicazioni $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}|_\Gamma$ e $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}|_{\Gamma_1}$ sono suriettive da $H(\operatorname{div}, \Omega)$ su $H^{-1/2}(\Gamma)$ e su $H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)'$ rispettivamente. Costruire inoltre operatori lineari e continui di rilevamento delle tracce. Dedurre che esiste un operatore di prolungamento lineare e continuo da $H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)'$ in $H^{-1/2}(\Gamma)$.

4. Considerare il problema

$$-u'' = \lambda u \quad \text{in } \mathbb{R}$$

del quale si cerca la soluzione in $H^1(\mathbb{R})$. Scritta una formulazione variazionale nell'ambito della terna hilbertiana $(H^1(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}), H^{-1}(\mathbb{R}))$, dimostrare che lo spettro è la semiretta $[0, \infty[$ e che lo spettro puntuale è vuoto.

5. Risolvere, supponendo Ω anche connesso, il problema (3.6–7) per la via seguente. Detto V lo spazio delle $v \in H^1(\Omega)$ tali che $\int_\Gamma v\, ds = 0$, si risolva in V il problema variazionale

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx + \int_\Gamma g v\, ds \qquad \forall\, v \in V$$

e si controlli che, se vale la (3.8), u risolve il problema (3.6–7).

6. Discutere i problemi di Dirichlet, di Neumann, eccetera, per l'equazione

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f,$$

ove A verifica (1.4) e (1.6), e i corrispondenti problemi di autovalori. La derivata conormale è, in questo caso, $(A\nabla u)\cdot\boldsymbol{\nu}$. Trattare sia il caso generale sia il caso in cui si suppone che la matrice A sia anche simmetrica.

7. Con notazioni usuali, si consideri il problema misto

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u = f \quad \text{in } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{su } \Gamma_0, \qquad (A\nabla u)\cdot\boldsymbol{\nu} = g \quad \text{su } \Gamma_1$$

nelle ipotesi seguenti: $A \in L^\infty(\Omega)^{n\times n}$ verifica la (1.6), $\mathbf{b} \in L^\infty(\Omega)^n$, $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)'$. Dimostrare che, se valgono le ipotesi ulteriori

$$D_i\mathbf{b} \in L^\infty(\Omega)^n \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \operatorname{div}\mathbf{b} \le 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{e} \quad \mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\nu} \ge 0 \quad \text{su } \Gamma_1, \tag{3.14}$$

allora il problema proposto ha una e una sola soluzione. Si noti che le prime due delle (3.14) sono automaticamente soddisfatte se $\mathbf{b}$ è costante.

8. Considerare analogamente il problema di Dirichlet

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

sostituendo le (3.14) con

$$\operatorname{div}\mathbf{b} \in L^1(\Omega) \qquad \text{e} \qquad \operatorname{div}\mathbf{b} \le 0 \quad \text{in} \ \ \Omega$$

oppure con la condizione più generale

$$\big\langle \operatorname{div}\mathbf{b}, v \big\rangle \le 0 \quad \text{per ogni} \ \ v \in \mathcal{D}(\Omega) \ \ \text{non negativa}$$

e dimostrare ancora esistenza e unicità della soluzione.

9. Considerare il problema misto

$$\begin{aligned} &-\operatorname{div}(A\nabla u + \mathbf{b}u) = f \quad \text{in} \ \ \Omega \\ &u = 0 \quad \text{su} \ \ \Gamma_0, \qquad (A\nabla u + \mathbf{b}u)\cdot\boldsymbol{\nu} = g \quad \text{su} \ \ \Gamma_1 \end{aligned}$$

oppure il problema di Dirichlet per la stessa equazione. Dimostrare esistenza e unicità della soluzione per i due problemi nelle ipotesi che dati e coefficienti verifichino le condizioni dei due esercizi precedenti rispettivamente.

10. Sia $A \in L^\infty(\Omega)^{n\times n}$ simmetrica e verificante la (1.6) in $\mathbb{R}^n$. Per ogni aperto limitato e regolare Ω si consideri il problema di autovalori

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = \lambda u \quad \text{in} \ \ \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su} \ \ \Gamma$$

e si denoti con $\lambda(\Omega)$ il primo autovalore. Dimostrare che l'inclusione $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ implica la disuguaglianza $\lambda(\Omega_1) \ge \lambda(\Omega_2)$ (si ricordi l'Esercizio I.10.5.6). ∎

Continuiamo la trattazione con problemi un po' più complessi.

3.7. Derivata obliqua. Consideriamo il problema

$$-\Delta u = f \qquad \text{in} \ \ \Omega \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \psi \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}} = g \qquad \text{su} \ \ \Gamma \tag{3.16}$$

ove Ω è un aperto limitato e regolare di $\mathbb{R}^2$ e $\boldsymbol{\tau} = (-\nu_2, \nu_1)$. Inoltre ψ è una funzione assegnata su Γ. Al solito cerchiamo soluzioni in $H^1(\Omega)$, per cui dobbiamo scrivere una formulazione variazionale del problema nella quale la (3.16) intervenga come condizione naturale. Dobbiamo dunque scegliere $V = H^1(\Omega)$ e trovare una forma a la cui derivazione conormale associata sia la derivazione obliqua assegnata. Cerchiamo dunque di vedere il problema dato come uno dei problemi di Neumann per l'equazione (3.15).

Supponiamo già di aver prolungato ψ a tutto $\overline{\Omega}$ e denotiamo ancora con ψ il prolungamento. Moltiplichiamo la (3.15) per la generica v regolare e integriamo per parti procedendo formalmente. Abbiamo

$$\begin{aligned} \int_\Omega f v \, dx &= -\int_\Omega (\Delta u) v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} v \, ds \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Gamma \psi \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}} v \, ds - \int_\Gamma g v \, ds \end{aligned}$$

e ora trasformiamo uno degli integrali dell'ultimo membro come segue. Osservato che, grazie al Teorema di Schwarz, vale l'identità $\operatorname{div}(D_2 u, -D_1 u) = 0$, abbiamo

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \psi \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}} v\, ds &= \int_\Gamma \psi (D_1 u, D_2 u) \cdot (-\nu_1, \nu_2) v\, ds = \int_\Gamma (D_2 u, -D_1 u) \cdot \boldsymbol{\nu} \psi v\, ds \\ &= \int_\Omega (D_2 u, -D_1 u) \cdot \nabla(\psi v)\, dx + \int_\Omega (\operatorname{div}(D_2 u, -D_1 u)) \psi v\, dx \\ &= \int_\Omega (D_2 u, -D_1 u) \cdot (D_1 \psi, D_2 \psi) v\, dx + \int_\Omega \psi (D_2 u, -D_1 u) \cdot \nabla v\, dx \\ &= \int_\Omega (-D_2 \psi, D_1 \psi) \cdot (\nabla u) v\, dx + \int_\Omega \psi (D_2 u, -D_1 u) \cdot \nabla v\, dx.\end{aligned}$$

Riprendendo il calcolo precedente, otteniamo allora

$$\int_\Omega \bigl(\nabla u + \psi (D_2 u, -D_1 u)\bigr) \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega (-D_2 \psi, D_1 \psi) \cdot (\nabla u) v\, dx = \int_\Omega f v\, dx + \int_\Gamma g v\, ds$$

dunque un'equazione variazionale il primo membro della quale ha la struttura (1.3) con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \psi \\ -\psi & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = (-D_2 \psi, D_1 \psi), \qquad \mathbf{c} = 0 \qquad \text{e} \qquad d = 0. \tag{3.17}$$

Perché siano verificate le condizioni di regolarità (1.4) dobbiamo allora supporre ψ lipschitziana. Si noti invece che la (1.6) è soddisfatta indipendentemente da ipotesi su ψ.

In tali condizioni, se $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\Gamma)$ o, più in generale, $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, si applica la teoria generale e, per quanto riguarda l'interpretazione, effettivamente quella trovata è la formulazione variazionale del problema (3.15–16) se intendiamo la condizione al bordo nella forma $(A \nabla u) \cdot \boldsymbol{\nu}_{|\Gamma} = g$, cioè in modo globale anziché come somma di due contributi.

Per quanto riguarda invece i problemi di esistenza e unicità, si noti che il Teorema di Lax–Milgram non è applicabile, dato che ogni costante risolve il problema omogeneo associato. Vale però l'alternativa di Fredholm, ma nulla possiamo dire sulla completezza del sistema di autosoluzioni dato che, escluso il caso banale in cui $\psi = 0$, la forma a non è simmetrica. Detta A^* la trasposta della matrice A, il problema aggiunto è il seguente: trovare $u^* \in H^1(\Omega)$ verificante l'equazione variazionale

$$\int_\Omega \bigl((A^* \nabla u^*) \cdot \nabla v + (\mathbf{b} u^*) \cdot \nabla v\bigr)\, dx = 0 \qquad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

La sua interpretazione è il problema ai limiti

$$\begin{aligned} -\Delta u^* - \operatorname{div}(\mathbf{b} u^*) &= 0 &\quad& \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u^*}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \psi \frac{\partial u^*}{\partial \boldsymbol{\tau}} - \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\tau}} u^* &= 0 && \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

come si verifica usando il Teorema 2.2.

Nella discussione più dettagliata dell'esistenza ci limitiamo al caso in cui ψ è una funzione costante e Ω è anche connesso. In tali condizioni abbiamo $\mathbf{b} = 0$ e la scelta $v = u^*$ nel problema variazionale aggiunto porta a concludere che le sue soluzioni sono le sole costanti. Dunque il problema originario ha soluzioni se e solo se vale la (3.8).

Vale la pena di osservare un fatto. Detto $\boldsymbol{\nu}_\psi$ il versore del vettore $\boldsymbol{\nu} + \psi\boldsymbol{\tau}$, nella direzione del quale è eseguita la derivazione obliqua, risulta $\boldsymbol{\nu}_\psi \cdot \boldsymbol{\nu} \geq (1 + \sup_\Gamma \psi^2)^{-1/2}$, per cui $\boldsymbol{\nu}_\psi$ non solo non può diventare tangente, ma deve formare con $\boldsymbol{\nu}$ un angolo ϑ_ψ "lontano" dall'angolo retto. Il problema in cui la direzione della derivazione può essere anche tangente non rientra infatti nel quadro variazionale che stiamo trattando, così come non rientra il caso in cui la direzione della derivazione varia in modo discontinuo, dato che siamo stati costretti a supporre ψ lipschitziana. Per questo motivo si parla di *problema di derivata obliqua regolare*.

Riprendiamo l'ultima affermazione. Nel caso in cui Ω sia un poligono la regolarità lipschitziana imposta a ψ si interpreta in modo diverso. Infatti ciò che deve variare con regolarità non è tanto $\boldsymbol{\nu}_\psi$ quanto piuttosto l'angolo ϑ_ψ, così che in ciascuno dei vertici il salto della direzione $\boldsymbol{\nu}_\psi$ deve essere pari a quello di $\boldsymbol{\nu}$. In particolare non rientra nel quadro variazionale ad esempio il caso in cui $\boldsymbol{\nu}_\psi$ è costante nell'intorno di un vertice.

Ancora un'osservazione. La forma a che abbiamo costruito dipende dal prolungamento della funzione ψ originaria. Dunque abbiamo ottenuto, di fatto, infinite formulazioni variazionali dello stesso problema ai limiti. La non unicità della formulazione variazionale, naturalmente, è un fatto di carattere generale.

3.8. Condizioni di periodicità. Consideriamo lo spazio

$$V = \left\{ v \in H^1(0,1) : \ v(0) = v(1) \right\}.$$

A differenza di quanto è avvenuto negli altri casi esaminati in questo paragrafo, la condizione di appartenenza di v a V non comporta l'annullamento della traccia in una parte prefissata del bordo. Per generalizzare la definizione di V al caso della dimensione $n > 1$, prendiamo $\Omega = \left]0,1\right[^n$, usiamo le notazioni

$$\Gamma_i = \{x \in \Gamma : \ x_i = 0\}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

denotiamo con $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e prendiamo il sottospazio V di $H^1(\Omega)$ definito dalla (2.5) con la scelta

$$W = \{w \in H^{1/2}(\Gamma) : \ w(x + e_i) = w(x) \text{ q.o. su } \Gamma_i, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

Naturalmente "q.o." si riferisce alla misura $(n-1)-$ dimensionale.

Consideriamo allora il problema di trovare $u \in V$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall \, v \in V \tag{3.18}$$

ove f è fissata in $L^2(\Omega)$. La teoria generale assicura che il problema ha soluzioni se e solo se f ha integrale nullo e che la soluzione è determinata a meno di una costante additiva.

Per quanto riguarda l'interpretazione, è chiaro che l'equazione differenziale associata è l'equazione di Poisson $-\Delta u = f$ e ora vediamo come si interpretano le condizioni al bordo naturali

$$\langle \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}|_{\Gamma}, w\rangle = 0 \qquad \forall\, w \in W \tag{3.19}$$

nell'ipotesi semplificativa $\partial_{\nu} u|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$.

Consideriamo ad esempio le due facce opposte Γ_n e $e_n + \Gamma_n$ di Γ. Fissata ad arbitrio $\psi \in \mathcal{D}(]\,0,1\,[^{n-1})$, appartengono al $H^{1/2}(\Gamma)$ i prolungamenti triviali $\widetilde{w}_-$ e $\widetilde{w}_+$ delle funzioni w_- e w_+ definite su Γ_n e su $e_n + \Gamma_n$ rispettivamente dalle formule

$$w_-(x', 0) = \psi(x') \quad \text{e} \quad w_+(x', 1) = \psi(x'), \qquad x' \in\,]\,0,1\,[^{n-1}.$$

Allora $\widetilde{w}_- + \widetilde{w}_+ \in W$, per cui

$$\begin{aligned} 0 = \langle \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}|_{\Gamma}, \widetilde{w}_- + \widetilde{w}_+\rangle &= \int_{\Gamma_n} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} w_-\, ds + \int_{e_n+\Gamma_n} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} w_+\, ds \\ = -\int_{]0,1[^{n-1}} D_n u(x',0)\psi(x')\, dx' &+ \int_{]0,1[^{n-1}} D_n u(x',1)\psi(x')\, dx' \\ &= \int_{]0,1[^{n-1}} \big(-D_n u(x',0) + D_n u(x',1)\big)\psi(x')\, dx'. \end{aligned}$$

L'arbitrarietà di ψ permette allora di concludere che

$$D_n u(x', 0) = D_n u(x', 1) \qquad \text{q.o. in } \;]\,0,1\,[^{n-1}.$$

Allo stesso modo si trattano tutte le coppie di facce opposte, per cui l'uguaglianza

$$D_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = D_i u(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

è verificata per quasi ogni $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in\,]\,0,1\,[^{n-1}$ e $i = 1, \ldots, n$.

Viceversa valgono queste n uguaglianze. Allora, moltiplicando la $i-$esima per una generica funzione $\psi_i \in \mathcal{D}(]\,0,1\,[^{n-1})$, integrando rispetto alle $n-1$ variabili e sommando rispetto a i, vediamo che $\langle \partial_{\nu} u|_{\Gamma}, w\rangle = 0$ per tutte le funzioni di W che siano restrizioni a Γ di funzioni di $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ aventi supporto disgiunto dagli spigoli di Γ. Per densità, concludiamo che vale la (3.18).

La via seguita può essere adattata per interpretare la condizione (3.18) senza l'ipotesi semplificativa fatta. Tuttavia i dettagli sono piuttosto tecnici, ad esempio a causa del fatto che la dualità fra $H^{-1/2}(\Gamma)$ e $H^{1/2}(\Gamma)$ non gode della proprietà additiva soddisfatta dagli integrali. In particolare è necessario usare i risultati contenuti negli Esercizi II.5.13 e II.7.9.

Le condizioni al bordo che definiscono lo spazio V sono dette *condizioni di periodicità* e ora ne spieghiamo il motivo. A questo scopo diciamo che una funzione v definita q.o. in $\mathbb{R}^n$ è periodica quando $v(x + e_i) = v(x)$ q.o. in $\mathbb{R}^n$ per $i = 1, \ldots, n$.

Se ora $u \in V$ è una soluzione dell'equazione variazionale (3.18), allora il suo prolungamento periodico u^* verifica $u^*|_{\omega} \in H^1(\omega)$ per ogni $\omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ e soddisfa l'equazione

$$-\Delta u^* = f^* \qquad \text{in } \mathbb{R}^n \tag{3.20}$$

ove f^* è il prolungamento periodico di f.

Viceversa, se u^* e f^* sono funzioni periodiche tali che, per ogni $\omega \subset\subset \mathbb{R}^n$, le restrizioni $u^*|_\omega$ e $f^*|_\omega$ appartengano a $H^1(\omega)$ e a $L^2(\omega)$ rispettivamente e vale la (3.1), allora la funzione $u = u^*|_\Omega$ appartiene a V e verifica la (3.18) con $f = f^*|_\Omega$.

Il controllo di queste due affermazioni, non difficile in ipotesi semplificative analoghe a quelle fatte sopra, è invece complicato e abbastanza tecnico nel caso generale.

3.9. Esercizio. Nel caso monodimensionale dimostrare tutte le affermazioni precedenti.

3.10. Condizioni di trasmissione. Consideriamo il problema di Dirichlet

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \Gamma \tag{3.21}$$

ma considerazioni analoghe valgono per equazioni più generali e per altri tipi di condizioni ai limiti. Supponiamo che Ω sia suddiviso in due aperti Ω_1 e Ω_2 da un'interfaccia Σ come nei Corollari II.5.12 e II.9.4, dei quali assumiamo ipotesi e notazioni. Introduciamo pertanto, per $i = 1, 2$, le restrizioni u_i, f_i e A_i rispettivamente di u, f e A a Ω_i. Grazie ai corollari citati, il problema (3.21), del quale cerchiamo come al solito la soluzione in $H^1(\Omega)$, equivale alla ricerca della coppia $(u_1, u_2) \in H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_2)$ tale che

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(A_i\nabla u_i) &= f_i && \text{in } \Omega_i, && i = 1,2 && (3.22)\\
u_i &= 0 && \text{su } \partial\Omega_i \setminus \Sigma, && i = 1,2 && (3.23)\\
u_1 &= u_2 && \text{su } \Sigma && && (3.24)\\
(A_1\nabla u_1)\cdot \boldsymbol{\nu}_1 + (A_2\nabla u_2)\cdot \boldsymbol{\nu}_2 &= 0 && \text{su } \Sigma. && && (3.25)
\end{aligned}$$

Un problema di questo tipo è detto *problema di trasmissione*, le cosiddette *condizioni di trasmissione* essendo le (3.24–25).

Fin qui nulla di nuovo. Abbiamo infatti semplicemente scritto il problema iniziale in una forma diversa e ciò è sempre lecito, indipendentemente dalle proprietà di ulteriore regolarità dei coefficienti. Se però i coefficienti sono separatamente regolari in Ω_1 e in Ω_2 ma discontinui sull'interfaccia Σ, avviene che nel problema (3.21) intervengono coefficienti discontinui, mentre nel problema (3.22–25) compaiono solo coefficienti regolari. Ciò nonostante, per vedere con chiarezza le questioni di esistenza e unicità, è di solito più conveniente la scrittura nella forma globale (3.21) anziché quella dettagliata come problema di trasmissione. Il fatto è che, nelle applicazioni, si tende spesso a presentare un problema fisico come problema di trasmissione, anche ulteriormente semplificato grazie a proprietà particolari dei coefficienti, e la determinazione del problema (3.21) corrispondente può non essere immediata. A titolo esemplificativo consideriamo il problema

$$\begin{aligned}
-\Delta u_i &= h_i && \text{in } \Omega_i, && i = 1,2\\
u_i &= 0 && \text{su } \partial\Omega_i \setminus \Sigma, && i = 1,2\\
u_1 &= u_2 && \text{su } \Sigma\\
a_1\frac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{\nu}_1} + a_2\frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{\nu}_2} &= 0 && \text{su } \Sigma,
\end{aligned}$$

ove a_1 e a_2 sono costanti positive. Siamo ricondotti al problema (3.22–25) se scriviamo le equazioni differenziali in Ω_i come

$$-\operatorname{div}(a_i \nabla u_i) = a_i h_i$$

e leggiamo il tutto come una rifomulazione di (3.21) con A e f date da

$$A = a_i I \quad \text{e} \quad f = a_i h_i \quad \text{in} \ \ \Omega_i, \qquad i = 1, 2,$$

ove I è la matrice unità $n \times n$.

3.11. Esercizi

1. Considerare il problema misto Dirichlet–derivata obliqua

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \ \ \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su} \ \ \Gamma_0, \qquad \partial_\nu u + \psi \partial_\tau u = g \quad \text{su} \ \ \Gamma_1$$

e discuterlo cercando le “ipotesi minime” su f , ψ e g .

2. Generalizzare il problema (3.22–25) al caso in cui la (3.25) sia sostituita dalla condizione non omogenea

$$(A_1 \nabla u_1) \cdot \boldsymbol{\nu}_1 + (A_2 \nabla u_2) \cdot \boldsymbol{\nu}_2 = g \qquad \text{su} \ \ \Sigma$$

ove $g \in L^2(\Gamma)$. Costruire una formulazione variazionale del problema e discutere esistenza e unicità della soluzione.

3. Scrivere nella forma di problema di trasmissione, con condizioni di trasmissione nell'origine, ciascuno dei problemi elencati di seguito. Trovare $u \in H_0^1(-1,1)$ tale che, per ogni $v \in H_0^1(-1,1)$, risulti rispettivamente

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} u'v' \, dx = \int_{-1}^{1} v \, dx \\
&\int_{-1}^{1} u'v' \, dx = \int_{-1}^{1} (\ln |x|) v' \, dx + v(0) \\
&\int_{-1}^{1} (2 + \operatorname{sign} x) u'v' \, dx = \int_{-1}^{1} (\operatorname{sign} x) v \, dx \\
&\int_{-1}^{1} (2 + \operatorname{sign} x) u'v' \, dx = \int_{-1}^{1} (\operatorname{sign} x) v' \, dx.
\end{aligned}$$

Formulare congetture sulla regolarità delle soluzioni in $x = 0$.

4. Problemi di Sturm–Liouville

Consideriamo il problema di autovalori

$$-u'' + u' = \lambda u \quad \text{in } \,]0,1[, \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

La sua formulazione variazionale naturale consiste nel cercare $u \in H^1_0(0,1)$ tale che

$$\int_0^1 (u'v' + u'v)\,dx = \lambda \int_0^1 uv\,dx \qquad \forall\, v \in H^1_0(0,1). \tag{4.1}$$

Si applica allora il Teorema 2.1 e si ottiene un certo numero di informazioni. Tuttavia, siccome la forma bilineare che interviene non è simmetrica, nulla possiamo concludere, ad esempio, sull'esistenza di basi hilbertiane di autosoluzioni.

Se invece scriviamo l'equazione differenziale nella forma

$$-(e^{-x}u')' = \lambda e^{-x}u \quad \text{in } \,]0,1[$$

e ora moltiplichiamo per la funzione test v per costruire la formulazione variazionale, arriviamo al problema di trovare $u \in H^1_0(0,1)$ tale che

$$\int_0^1 e^{-x}u'v'\,dx = \lambda \int_0^1 e^{-x}uv\,dx \qquad \forall\, v \in H^1_0(0,1)$$

cioè a un problema variazionale che fa intervenire forme bilineari simmetriche in entrambi i membri. A questo, dunque, si può applicare il Teorema I.10.3 per intero pur di costruire la terna hilbertiana (V, H, V') con $V = H^1_0(0,1)$ e $H = L^2(0,1)$ ma con un prodotto scalare per $L^2(0,1)$ diverso da quello abituale. Precisamente dobbiamo scegliere

$$(u,v) = \int_0^1 e^{-x}uv\,dx, \qquad u,v \in L^2(0,1).$$

Questo, tuttavia, conferisce a $L^2(0,1)$ una struttura hilbertiana equivalente a quella naturale, dato che $e^{-1} \le e^{-x} \le e$ per ogni $x \in \,]0,1[$.

Più in generale la stessa procedura si applica a un'equazione del tipo

$$-(au')' + bu' + du = \lambda u$$

in un intervallo limitato con condizioni ai limiti di Dirichlet o Neumann o Robin in ciascuno dei due estremi, in ipotesi di limitatezza sui coefficienti e di ellitticità uniforme. Basta infatti, prima di moltiplicare per la funzione test in vista della costruzione della formulazione variazionale, moltiplicare l'equazione per e^k, ove la funzione k è scelta in modo che $ak' + b = 0$.

Consideriamo pertanto il problema di Sturm–Liouville

$$-\,(pu')' + qu = \lambda \rho u \quad \text{in } \,]a,b[\tag{4.2}$$

$$a_0u(a) - a_1(pu')(a) = b_0u(b) - b_1(pu')(b) = 0 \tag{4.3}$$

ove $p, q, \rho \in L^\infty(a,b)$ e $a_0, \ldots, b_1 \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$\inf p > 0, \qquad \inf \rho > 0, \qquad (a_0, a_1) \neq (0,0) \qquad \text{e} \qquad (b_0, b_1) \neq (0,0). \tag{4.4}$$

Naturalmente, nel momento in cui si vuole scrivere la formulazione variazionale del problema, occorre decidere quali condizioni al bordo vanno forzate e quali sono naturali e ciò corrisponde a vedere se alcuni coefficienti numerici sono nulli o meno. In ogni caso è immediato controllare che al problema cui si perviene è applicabile completamente il Teorema I.10.3, pur di scegliere

$$(u,v) = \int_a^b \rho uv \, dx, \qquad u, v \in L^2(a,b),$$

come prodotto scalare in $H = L^2(a,b)$. In particolare, le condizioni di ortogonalità e le formule di calcolo dei coefficienti di Fourier negli sviluppi in serie di autosoluzioni devono essere riferite a questo prodotto scalare.

I problemi di Sturm–Liouville sono stati studiati a fondo e sono ben note numerose proprietà degli autovalori e delle autosoluzioni. Ci limitiamo a segnalare che tutti gli autospazi hanno dimensione 1 e che, se $\{u_n, \ n = 1, 2, \ldots\}$ è una base hilbertiana di autosoluzioni, allora la $n-$ esima autosoluzione u_n ha in $]a,b[$ esattamente $n-1$ zeri.

4.1. Esercizi

1. Trovare autovalori e autosoluzioni dei problemi

$$\begin{aligned}
&-u'' = \lambda u \quad \text{in } \ ]0,\pi[, \qquad u(0) = u(\pi) = 0 \\
&-u'' = \lambda u \quad \text{in } \ ]0,\pi[, \qquad u'(0) = u'(\pi) = 0 \\
&-u'' = \lambda u \quad \text{in } \ ]0,\pi[, \qquad u(0) = u'(\pi) = 0 \\
&-u'' = \lambda u \quad \text{in } \ ]0,\pi[, \qquad u(0) = u(\pi), \quad u'(0) = u'(\pi)
\end{aligned}$$

l'ultimo dei quali non è di tipo Sturm–Liouville.

2. Studiare il problema

$$-u'' = \lambda u \quad \text{in } \ ]0,\pi[, \qquad u(0) = 0, \qquad u(\pi) + u'(\pi) = 0$$

e determinarne gli autovalori con metodi grafici. Calcolare poi le autosoluzioni in funzione degli autovalori e confermare i risultati generali.

3. Procedere analogamente per il problema

$$-\big((2 + \operatorname{sign} x) u'\big)' = \lambda u \quad \text{in } \ ]-1,1[, \qquad u(-1) = u(1) = 0.$$

Per il calcolo conviene vederlo come problema di trasmissione.

4. Completare lo studio del problema introduttivo considerando anche il caso non omogeneo, per fissare le idee con $f \in L^2(0,1)$, seguente

$$-u'' + u' = \lambda u + f \quad \text{in } \ ]0,1[, \qquad u(0) = u(1) = 0$$

e scrivere le condizioni di compatibilità su f per l'esistenza delle soluzioni. Studiare anche il problema non omogeneo corrispondente all'analogo dell'equazione variazionale (4.1) e scrivere sia il problema aggiunto sia le condizioni di compatibilità su f per l'esistenza delle soluzioni. Confrontare i risultati forniti dai due metodi.

5. Ulteriori applicazioni

In questo paragrafo diamo qualche idea riguardante problemi che possono essere affrontati utilizzando la stessa teoria astratta che ci ha permesso di studiare i problemi variazionali per equazioni ellittiche del secondo ordine.

5.1. Il bilaplaciano. Consideriamo il problema

$$\Delta^2 u = f \quad \text{in } \ \Omega, \qquad u = \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{su } \ \Gamma, \tag{5.1}$$

ove l'operatore Δ^2, che è il quadrato di Δ o, meglio, di $-\Delta$, è chiamato *bilaplaciano* oppure *operatore biarmonico*.

Per costruire una formulazione variazionale del problema moltiplichiamo l'equazione per la generica funzione regolare v e integriamo per parti *due volte*. Procedendo formalmente abbiamo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega fv\,dx &= \int_\Omega (\Delta^2 u)v\,dx = \int_\Omega (\operatorname{div}\nabla\Delta u)v\,dx \\
&= -\int_\Omega (\nabla\Delta u)\cdot\nabla v\,dx + \int_\Gamma (\nabla\Delta u)\cdot\boldsymbol{\nu} v\,ds \\
&= \int_\Omega (\Delta u)\operatorname{div}\nabla v\,dx - \int_\Gamma (\Delta u)\nabla v\cdot\boldsymbol{\nu}\,ds + \int_\Gamma (\nabla\Delta u)\cdot\boldsymbol{\nu} v\,ds \\
&= \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\,dx - \int_\Gamma (\Delta u)\nabla v\cdot\boldsymbol{\nu}\,ds + \int_\Gamma (\nabla\Delta u)\cdot\boldsymbol{\nu} v\,ds.
\end{aligned}$$

Se poi $v = \partial_\nu v = 0$ su Γ, deduciamo

$$\int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\,dx = \int_\Omega fv\,dx.$$

Abbiamo dunque, da un alto, individuato una forma bilineare e continua su $H^2(\Omega)$ e, dall'altro, imposto alla funzione test condizioni al bordo che ha senso imporre alla generica funzione di $H^2(\Omega)$ in quanto, se $v \in H^2(\Omega)$, allora $v \in H^1(\Omega)$ e $D_i v \in H^1(\Omega)$ per $i = 1, \dots, n$. Siamo dunque indotti a considerare il problema variazionale seguente: trovare $u \in H^2_0(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\,dx = \int_\Omega fv\,dx \qquad \forall\, v \in H^2_0(\Omega). \tag{5.2}$$

Questo effettivamente equivale al problema iniziale (5.1), anche se alla teoria del Capitolo II manca qualche dettaglio per una verifica completamente rigorosa. Per quanto riguarda invece esistenza e unicità della soluzione, possiamo applicare il Teorema di Lax–Milgram nell'ipotesi molto generale $f \in H^{-2}(\Omega)$. In tali condizioni il secondo membro della (5.2), che va scritto come dualità, è ammesso e il primo verifica, in ipotesi ragionevoli su Ω, la condizione di H^2_0- ellitticità. Questo fatto, non ovvio, è collegato alla regolarità delle soluzioni dei problemi ai limiti per l'equazione di Poisson.

5.2. Osservazione. Una formulazione variazionale alternativa si ottiene sostituendo il primo membro della (5.2) con la forma bilineare e continua

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega D_i D_j u \, D_i D_j v \, dx.$$

Infatti per ogni $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ risulta

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} {}_{\mathcal{D}'}\langle D_i^2 D_j^2 u, v \rangle_{\mathcal{D}} = {}_{\mathcal{D}'}\langle \Delta^2 u, v \rangle_{\mathcal{D}}$$

per cui l'equazione differenziale associata è proprio $\Delta^2 u = f$. Il pregio di questa formulazione, che è ovvia solo a posteriori, è il seguente: la $V-$ ellitticità della forma a si dimostra facilmente usando il Lemma 1.3.

5.3. Equazioni di ordine $2m$. La generalizzazione naturale dell'esempio precedente si ottiene prendendo un sottospazio chiuso V di $H^m(\Omega)$ contenente $\mathcal{D}(\Omega)$ e cercando $u \in V$ tale che

$$\sum_{|\beta|,|\gamma| \le m} \int_\Omega a_{\beta\gamma} (D^\beta u)(D^\gamma v) \, dx = \langle F, v \rangle \qquad \forall\, v \in V \tag{5.3}$$

ove $a_{\beta\gamma} \in L^\infty(\Omega)$ e $F \in V'$.

La condizione che generalizza la (1.6) e senza la quale non vi è alcuna speranza di disuguaglianze di coercività è la seguente condizione di *ellitticità uniforme*: esiste $\alpha_0 > 0$ tale che

$$\sum_{|\beta|=|\gamma|=m} a_{\beta\gamma}(x) \xi^\beta \xi^\gamma \ge \alpha_0 |\xi|^{2m} \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \quad \text{q.o. in } \Omega. \tag{5.4}$$

Nella (5.4) è inteso che, ad esempio, $\xi^\beta = \xi_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot \xi_n^{\beta_n}$. Si noterà che la (5.4) coincide con la (1.6) se $m = 1$ e vale nel caso del bilaplaciano.

Un risultato non banale, che non dimostriamo, assicura che, se vale la (5.4), se Ω è sufficientemente regolare e se i coefficienti sono continui in $\overline{\Omega}$, allora esistono $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$ tali che valga la cosiddetta *disuguaglianza di Gårding*

$$\sum_{|\beta|,|\gamma| \le m} \int_\Omega a_{\beta\gamma} (D^\beta v)(D^\gamma v) \, dx + \lambda_0 \|v\|^2_{0,\Omega} \ge \alpha \|v\|^2_{m,\Omega} \qquad \forall\, v \in H^m_0(\Omega)$$

così che, almeno nel caso $V = H^m_0(\Omega)$, è applicabile la teoria spettrale e vale l'alternativa di Fredholm.

Per quanto riguarda l'interpretazione della (5.3), supponiamo F dato dalla formula

$$\langle F, v \rangle = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall\, v \in V$$

con $f \in L^2(\Omega)$. In tali condizioni è chiaro che l'equazione associata è la seguente:

$$\sum_{|\beta|,|\gamma|\le m} (-1)^{|\gamma|} D^\gamma \left(a_{\beta\gamma}(D^\beta v) \right) = f.$$

Si tratta dunque di un'equazione di ordine $2m$ alla quale vanno associate condizioni ai limiti dipendenti dalla scelta di V . Alcune di esse si forzano imponendo $u \in V$, altre sono naturali e possono essere esplicitate integrando per parti. Senza entrare in ulteriori dettagli, segnaliamo che il cosiddetto *problema di Dirichlet* è quello che si ottiene scegliendo $V = H_0^m(\Omega)$, mentre la scelta $V = H^m(\Omega)$ dà origine a un *problema di Neumann*. In particolare, il problema (5.1) è il problema di Dirichlet per il bilaplaciano.

5.4. Osservazione. Il fatto che una condizione ai limiti sia forzata oppure naturale è legato al quadro funzionale in cui si è impostato il problema e ciò che abbiamo detto nell'Osservazione 2.4 riguarda problemi ellittici del secondo ordine la soluzione dei quali venga cercata in $H^1(\Omega)$.

Nei due esempi appena considerati, invece, la soluzione viene cercata a priori in $H^2(\Omega)$ e in $H^m(\Omega)$ rispettivamente e la situazione è diversa: nel primo di essi, infatti, anche la condizione $\partial_\nu u = 0$ è stata forzata. Indipendentemente dall'ordine dell'operatore, se la soluzione u di un certo problema ai limiti è cercata a priori ad esempio in $H^2(\Omega)$, ha senso imporre come forzate anche condizioni al bordo che fanno intervenire le derivate prime e non è necessario sfruttare eventuali informazioni ulteriori che l'equazione differenziale può dare sulla regolarità della soluzione.

Per contro, si potrebbe anche sviluppare una teoria dei problemi ai limiti in spazi di funzioni irregolari: ad esempio si può cercare in $L^2(\Omega)$ (anziché in $H^1(\Omega)$) la soluzione dell'equazione di Poisson $-\Delta u = f$ che verifica la condizione al bordo $u = 0$. Il primo problema è quello della definizione di soluzione: infatti la condizione al bordo non può essere forzata, dato che la generica funzione di $L^2(\Omega)$ non ha traccia, e occorre formulare il problema in modo che la condizione considerata appaia come condizione naturale. Si può richiedere ad esempio che

$$\int_\Omega u(-\Delta v)\, dx = \int_\Omega f v\, dx$$

per tutte le $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ nulle su Γ .

5.5. Sistemi. Ci limitiamo a un esempio semplice. Risolvere il sistema

$$\begin{aligned} -\Delta u_1 + a_{11}u_1 + a_{12}u_2 &= f_1 \qquad \text{in } \Omega \\ -\Delta u_2 + a_{21}u_1 + a_{22}u_2 &= f_2 \qquad \text{in } \Omega \\ u_1 = u_2 &= 0 \qquad \text{su } \Gamma \end{aligned}$$

che ovviamente si banalizza, spezzandosi in due problemi separati e ben noti, se la matrice (a_{ij}) è diagonale. In generale possiamo supporre $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ e, ad esempio, $f_i \in L^2(\Omega)$, così che la formulazione variazionale naturale consiste nel cercare $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in H_0^1(\Omega)^2$ tale che, per ogni $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H_0^1(\Omega)^2$, valga l'uguaglianza

$$\int_\Omega \Bigl(\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 + \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} u_j v_i \Bigr)\, dx = \int_\Omega (f_1 v_1 + f_2 v_2)\, dx. \tag{5.5}$$

Chiaramente, detto $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ il primo membro della (5.5), vale la disuguaglianza

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \lambda_0 \left(\|v_1\|_{0,\Omega}^2 + \|v_2\|_{0,\Omega}^2 \right) \geq \alpha \left(\|v_1\|_{1,\Omega}^2 + \|v_2\|_{1,\Omega}^2 \right) \qquad \forall\, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^2$$

per $\lambda_0, \alpha > 0$ opportuni, così che al problema proposto si applica la teoria astratta. Concludiamo, ad esempio, che vale l'alternativa di Fredholm.

5.6. Osservazione. I risultati astratti generali, ad esempio il Teorema di Lax–Milgram, si prestano anche alla risoluzione di alcuni problemi che, nel senso storico del termine, non sono ellittici, in quanto lontani da disuguaglianze di tipo (1.6) o (5.4). Consideriamo ad esempio il problema

$$-D_1^2 u + u = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^2$$

nel quale non compare alcuna derivazione rispetto a x_2. Ebbene, se $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$, la sua formulazione variazionale naturale si ottiene prendendo lo spazio

$$V = \bigl\{ v \in L^2(\mathbb{R}^2) :\ D_1 v \in L^2(\mathbb{R}^2) \bigr\}$$

con la norma del grafico e cercando $u \in V$ tale che per ogni $v \in V$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \bigl((D_1 u)(D_1 v) + uv \bigr)\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} f v\, dx.$$

Dunque il Teorema di Riesz fornisce esistenza e unicità della soluzione.

5.7. Un problema ellittico degenere. Vanno sotto il nome di *problemi ellittici degeneri* problemi per i quali disuguaglianze del tipo (1.6) o (5.4) non valgono in tutto l'aperto Ω, ma solo in ogni aperto $\omega \subset\subset \Omega$ con una costante di ellitticità che dipende da ω. Un problema variazionale di questo tipo è il seguente: considerato lo spazio

$$V = \Bigl\{ v \in L^2(-1,1) :\ (1 - x^2)^{1/2} v' \in L^2(-1,1) \Bigr\}$$

munito della norma del grafico, trovare $u \in V$ tale che

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2) u' v'\, dx = \lambda \int_{-1}^{1} uv\, dx + \int_{-1}^{1} f v\, dx \qquad \forall\, v \in V. \tag{5.6}$$

Nella (5.6) possiamo supporre, per semplicità, $f \in L^2(-1,1)$. La degenerazione è dovuta al fatto che il coefficiente $1 - x^2$ si annulla agli estremi dell'intervallo. Ciò comporta che non vi sono speranze di H^1- ellitticità e nemmeno di coercività più deboli legate comunque allo spazio $H^1(-1,1)$. Occorre far intervenire lo spazio V, che appartiene alla categoria degli *spazi di Sobolev con peso*.

Assunto $L^2(-1,1)$ come H, si controlla subito che (V,H,V') è una terna hilbertiana e che il primo membro della (5.6) costituisce una forma bilineare e continua su $V \times V$ che inoltre è simmetrica e soddisfa la disuguaglianza I.(10.11) ad esempio con $\lambda_0 = \alpha = 1$. Un controllo meno banale ma non particolarmente difficile mostra infine che l'immersione di V in H è compatta. Possiamo dunque applicare il Teorema I.10.3 e concludere che per il problema variazionale in esame vale l'alternativa di Fredholm e che esiste una base hilbertiana di $L^2(-1,1)$ costituita da autosoluzioni.

Per quanto riguarda l'interpretazione, è chiaro che l'equazione differenziale associata al problema considerato è *l'equazione di Legendre*

$$-\big((1-x^2)u'\big)' = \lambda u + f \qquad \text{in } \left]-1,1\right[. \tag{5.7}$$

Meno chiaro è quali siano le condizioni ai limiti. Osservato che a V appartiene la funzione, che diverge per $x \to \pm 1$, definita dalla formula

$$v(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1-t^2)\,\ln(1-t^2)}, \qquad -1 < x < 1,$$

vediamo che per V non può valere un teorema di tracce e l'appartenenza a V non comporta condizioni forzate nel senso più abituale del termine. La (5.6) contiene invece delle condizioni naturali che ora esplicitiamo ponendo per comodità $c(x) = 1 - x^2$.

Siccome $u \in V$ e $f \in L^2(-1,1)$, dall'equazione (5.7) deduciamo $(cu')' \in L^2(-1,1)$. Allora $cu' \in H^1(-1,1)$ così che le tracce $\gamma_\pm = (cu')(\pm 1)$ hanno senso. Vediamo che esse sono nulle. Per assurdo, sia ad esempio $\gamma_+ \neq 0$. Allora

$$c(u')^2 = \frac{1}{c}(cu')^2 \sim \frac{\gamma_+^2}{c} \qquad \text{per } x \to 1$$

per cui $c(u')^2 \notin L^1(-1,1)$ e $u \notin V$. Assurdo. Abbiamo dunque

$$\lim_{x \to \pm 1} (1-x^2)u'(x) = 0 \tag{5.8}$$

e classifichiamo le (5.8) fra le *condizioni di Neumann con peso*.

Viceversa, si dimostra senza eccessive difficoltà che, se $u \in V$ e valgono le (5.7–8), allora u risolve il problema variazionale (5.6).

Osserviamo infine che la ricerca delle autosoluzioni porta solo a polinomi, i cosiddetti *polinomi di Legendre*. Supponiamo dunque $f = 0$. Per $n = 0, 1, 2, \ldots$ è immediato verificare che esiste un polinomio P_n, di grado esattamente n e unico a meno di un fattore moltiplicativo, che risolve la (5.7) con $\lambda = n(n+1)$. La (5.8) segue poi dalla regolarià di P_n. Dal fatto che P_n ha grado n deduciamo che l'insieme $\{P_n\}$ genera tutti i polinomi, dunque una varietà densa in $L^2(-1,1)$. Concludiamo che già l'insieme dei polinomi P_n è una base hilbertiana e che non possono esistere autovettori indipendenti da questi.

6. Condizioni forzate non omogenee

Le condizioni ai limiti forzate considerate finora per equazioni del secondo ordine individuavano un sottospazio chiuso di $H^1(\Omega)$, ad esempio $H_0^1(\Omega)$ nel caso del problema di Dirichlet. Questo era poi lo spazio ambiente nell'applicazione, quando possibile, del Teorema di Lax–Milgram.

Consideriamo invece, per fissare le idee, il caso in cui la condizione al bordo sia $u = g$, ove g è una assegnata funzione definita su Γ . Allora la soluzione del problema va cercata in $H^1(\Omega)$, più precisamente in $u_0 + H_0^1(\Omega)$, ove u_0 è una funzione fissata di $H^1(\Omega)$ tale che $u_{0|\Gamma} = g$. Giocano dunque un ruolo sia il nuovo spazio ambiente $H^1(\Omega)$ sia il suo sottospazio $H_0^1(\Omega)$.

A titolo esemplificativo dimostriamo la variante del Teorema di Lax–Milgram adatta alla trattazione delle condizioni forzate non omogenee.

6.1. Teorema. *Siano V uno spazio di Hilbert, V_0 un suo sottospazio chiuso e a una forma bilineare e continua su $V \times V$. Se a è V_0- ellittica allora, per ogni $u_0 \in V$ e $F \in V'$, esiste uno e un solo elemento $u \in V$ che verifica*

$$u \in u_0 + V_0 \tag{6.1}$$

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \qquad \forall\, v \in V_0 \tag{6.2}$$

e l'applicazione lineare $(u_0, F) \mapsto u$ è continua da $V \times V'$ in V .

Inoltre, se a è anche simmetrica, l'unica soluzione u è anche l'unico punto di minimo del funzionale quadratico

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \langle F, v \rangle, \qquad v \in u_0 + V_0. \ \blacksquare$$

Dimostrazione. Riformuliamo il tutto nella nuova incognita $w = u - u_0$. Allora u risolve il problema dato se e solo se $w \in V_0$ e

$$a(w, v) = \langle F, v \rangle - a(u_0, v) \qquad \forall\, v \in V_0.$$

Siccome al problema trasformato è applicabile il Teorema di Lax–Milgram, esistenza e unicità sono dimostrate.

Per verificare la continuità dell'applicazione $(u_0, F) \mapsto u$ stimiamo la norma di u . Dette α e M le costanti di V_0- ellitticità e di continuità della forma a , abbiamo

$$\begin{aligned} \|u\| \le \|u_0\| + \|w\| &\le \|u_0\| + \frac{1}{\alpha} \sup_{v \in V_0 \setminus \{0\}} \frac{|\langle F, v \rangle - a(u_0, v)|}{\|v\|} \\ &\le \|u_0\| + \frac{1}{\alpha} (\|F\|_* + M\, \|u_0\|) \le c(\|F\|_* + \|u_0\|) \end{aligned}$$

con ovvia scelta di c .

L'ultima affermazione segue poi osservando che, espresso in termini di w , il problema di minimo in esame coincide con il problema di minimo associato all'equazione variazionale risolta da w . $\blacksquare$

Ad esempio il problema di Dirichlet non omogeneo

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{su } \Gamma$$

si riformula come il problema di trovare $u \in u_0 + H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

ove $u_0 \in H^1(\Omega)$ è tale che $u_{0|\Gamma} = g$. Esso è dunque risolubile se e solo se $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Se $\mathcal{R}$ è un operatore di rilevamento delle tracce lineare e continuo da $H^{1/2}(\Gamma)$ in $H^1(\Omega)$, allora possiamo prendere $u_0 = \mathcal{R}g$ e stimare la norma di u come segue

$$\|u\|_{1,\Omega} \le c(\|f\|_{-1,\Omega} + \|u_0\|_{1,\Omega}) \le c'(\|f\|_{-1,\Omega} + \|g\|_{1/2,\Gamma})$$

così che l'applicazione $(f, g) \mapsto u$ è lineare e continua da $H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ in $H^1(\Omega)$.

Infine u è il punto di minimo dell'integrale di Dirichlet

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx - \langle f, v \rangle$$

ove v varia in $H^1(\Omega)$ con il vincolo $v_{|\Gamma} = g$.

6.2. Osservazione. Per studiare la risolubilità di un problema ai limiti non omogeneo conviene in genere procedere come nella dimostrazione precedente: si cambia incognita nella formulazione variazionale. Infatti è spesso sconveniente cambiare incognita a livello del problema ai limiti originario.

6.3. Esercizi

1. Adattare la dimostrazione precedente per generalizzare il Teorema I.10.3 al caso di condizioni forzate non omogenee, l'ipotesi di coercività essendo

$$a(v, v) + \lambda_0 |v|^2 \ge \alpha \|v\|^2 \qquad \forall\, v \in V_0$$

con $\lambda_0, \alpha > 0$ opportuni.

2. Discutere la risolubilità in $H^1(\Omega)$ del problema misto

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g_0 \quad \text{su } \Gamma_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_1 \quad \text{su } \Gamma_1$$

cercando le "ipotesi minime" sui dati.

3. Discutere la risolubilità del problema di trasmissione

$$\begin{aligned} -\Delta u_i &= f_i && \text{in } \Omega_i, && i = 1,2 \\ u_i &= g_i && \text{su } \partial\Omega_i \setminus \Sigma, && i = 1,2 \\ u_1 - u_2 &= h_0 && \text{su } \Sigma \\ a_1 \nabla u_1 \cdot \boldsymbol{\nu}_1 + a_2 \nabla u_2 \cdot \boldsymbol{\nu}_2 &= h_1 && \text{su } \Sigma. \end{aligned}$$

ove Ω_1 e Ω_2 sono i due aperti in cui Ω è suddiviso dall'interfaccia Σ e a_1 e a_2 sono due costanti positive.

4. Data $\overline{u} \in H^1(\Omega)$, presentare il calcolo della proiezione di $\overline{u}$ sull'ortogonale di $H^1_0(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$ come problema di Dirichlet non omogeneo. Eseguire poi il calcolo nel caso particolare in cui $\Omega = \,]0,1[$ e $\overline{u}(x) = 1$.

5. Suddivisa la frontiera Γ in due aperti regolari Γ_0 e Γ_1 mediante una varietà regolare di dimensione $n-2$, per ogni $\overline{u} \in H^1(\Omega)$, presentare il calcolo delle proiezioni di $\overline{u}$ sul sottospazio $H^1_{0,\Gamma_0}(\Omega)$ e sul suo ortogonale come risoluzioni di due problemi misti di tipo Dirichlet–Neumann.

6. Discutere la risolubilità in $H^1(0,1)$ del problema

$$-(au')' = f \quad \text{in }]0,1[, \qquad u(1) - u(0) = c_0, \qquad (au')(1) - (au')(0) = c_1,$$

ove $f \in L^2(0,1)$, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ e $a \in L^\infty(0,1)$ con $\inf a > 0$.

7. Si consideri il seguente problema di autovalori

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \lambda u \quad \text{su } \Gamma$$

del quale si cerca la soluzione in $H^1(\Omega)$. Assumendo come nuova incognita la traccia $w = u_{|\Gamma}$, trasformare il problema proposto in un problema relativo alla terna hilbertiana $(H^{1/2}(\Gamma), L^2(\Gamma), H^{-1/2}(\Gamma))$ al quale si applichi direttamente il Teorema I.10.3.

Considerare analogamente il problema misto

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \Gamma_0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \lambda u \quad \text{su } \Gamma_1$$

e assumere come nuova incognita la traccia $w = u_{|\Gamma_1}$. La terna hilbertiana che, conseguentemente, occorre considerare è allora $(H^{1/2}_{00}(\Gamma_1), L^2(\Gamma_1), H^{1/2}_{00}(\Gamma_1)')$.

7. Regolarità

In questo paragrafo diamo qualche risultato di regolarità della soluzione di alcuni problemi variazionali ellittici. Per esigenze di spazio ci poniamo obiettivi piuttosto ridotti e tralasciamo, ad esempio, il caso dei problemi di ordine superiore e gli importanti risultati nella direzione della regolarità hölderiana.

Notiamo subito che la regolarità delle soluzioni di un problema ai limiti per un'equazione ellittica dipende da tre fattori: (a) la regolarità dei dati e dei coefficienti, (b) la regolarità dell'aperto Ω, (c) il tipo di condizioni al bordo. Iniziamo con alcuni esempi che mettono in luce i punti (b) e (c).

7.1. Esempio. Sia Ω il settore di $\mathbb{R}^2$ descritto in coordinate polari dalle condizioni $\rho < 1$ e $0 < \vartheta < \alpha$, ove α è fissato in $]0, 2\pi]$, e si ponga

$$\Gamma_{00} = \Gamma \cap (\{\vartheta = 0\} \cup \{\vartheta = \alpha\}) \qquad \text{e} \qquad \Gamma_{01} = \Gamma \cap \{\rho = 1\}.$$

Consideriamo il problema di Dirichlet

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \qquad u = 0 \quad \text{su } \Gamma_{00}, \qquad u = g \quad \text{su } \Gamma_{01}.$$

Grazie alla disuguaglianza di Poincaré, il problema considerato ha una e una sola soluzione $u \in H^1(\Omega)$ se il dato al bordo appartiene a $H^{1/2}(\Gamma)$, cioè se $g \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_{01})$. Esaminando una formula esplicita che fornisce u, vediamo ora che l'appartenenza di u a $H^2(\Omega)$ dipende non solo dalla regolarità di g, ma anche dall'ampiezza di α.

Posto $u^{\#}(\rho,\vartheta) = u(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta)$, il problema in esame può essere riscritto in termini della nuova incognita $u^{\#}$ come segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{\#}}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u^{\#}}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u^{\#}}{\partial\vartheta^2} = 0 \qquad & 0<\rho<1, \quad 0<\vartheta<\alpha \\ u^{\#}(\rho,0) = u^{\#}(\rho,\alpha) = 0, \qquad & 0<\rho<1 \\ u^{\#}(1,\vartheta) = g^{\#}(\vartheta) \qquad & 0<\vartheta<\alpha \end{aligned}$$

ove $g^{\#}(\vartheta)$ significa $g(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$. Alle equazioni scritte vanno poi aggiunte le condizioni su $u^{\#}$ che esprimono l'appartenenza a $H^1(\Omega)$ della corrispondente u.

Considerato il problema di autovalori

$$-w'' = \lambda w \quad \text{in }]0,\alpha[, \qquad w(0) = w(\alpha) = 0,$$

la teoria generale assicura che lo spazio $L^2(0,\alpha)$ ha una base hilbertiana di autosoluzioni. Un semplice calcolo porta alle formule per autovalori e corrispondenti autosoluzioni

$$\lambda_n = \mu_n^2 \quad \text{e} \quad w_n(\vartheta) = \sin\mu_n\vartheta \qquad \text{ove} \qquad \mu_n = \frac{n\pi}{\alpha}, \quad n = 1,2,\dots$$

Espressi il dato $g^{\#}$ e l'incognita $u^{\#}$ in termini delle w_n e imposte l'equazione differenziale e la regolarità H^1 di u in termini di $u^{\#}$, si arriva a dedurre che $u^{\#}$ deve essere del tipo

$$u^{\#}(\rho,\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n^{\#}(\rho,\vartheta), \qquad \text{ove} \qquad u_n^{\#}(\rho,\vartheta) = \rho^{\mu_n}\sin\mu_n\vartheta, \tag{7.1}$$

con coefficienti numerici c_n da determinare. Per questo usiamo la condizione non omogenea di Dirichlet e troviamo le formule

$$c_n = \frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha} g^{\#}(\vartheta)\sin\mu_n\vartheta\, d\vartheta. \tag{7.2}$$

Osserviamo subito che, siccome la successione $\{c_n\}$ non si comporta in modo selvaggio dato che almeno la serie $\sum c_n^2$ converge, la serie (7.1), reinterpretata in termini della variabile originaria $x \in \Omega$, converge almeno nel senso delle distribuzioni e fornisce una funzione u armonica in Ω. Anzi, non è difficile vedere che, in ogni corona del tipo $\Omega \cap \{\varepsilon < \rho < r\}$ con $0 < \varepsilon < r < 1$, la serie converge uniformemente con le derivate di tutti gli ordini.

Per quanto riguarda la convergenza globale in Ω, osserviamo quanto segue. La funzione v la cui rappresentazione in coordinate polari è data dalla formula

$$v^{\#}(\rho,\vartheta) = \rho^{\mu} \sin \mu\vartheta$$

con $\mu \geq 0$ appartiene senz'altro a $H^1(\Omega)$ ed è un polinomio se e solo μ è intero. Notiamo fin d'ora che, se $\mu > 0$ non è intero e m è un intero positivo, allora v appartiene a $H^m(\Omega)$ se solo se $\mu > m-1$. Il controllo accurato di questa affermazione è naturalmente laborioso, ma il punto chiave sta nel fatto che le derivate di ordine m di v si comportano vicino all'origine come $|x|^{\mu-m}$ e quindi appartengono a $L^2(\Omega)$ se solo se converge l'integrale

$$\int_{\Omega} |x|^{2(\mu-m)}\, dx = \alpha \int_0^1 \rho^{2\mu-2m+1}\, d\rho.$$

Detto ciò, per evitare difficoltà tecniche, supponiamo pure che $g^{\#}$ appartenga addirittura a $\mathcal{D}(0,\alpha)$, così la successione $\{c_n\}$ dei coefficienti di Fourier di $g^{\#}$ decresce rapidamente e non vi sono dubbi sul fatto che la serie di funzioni $\sum c_n u_n$, con ovvio significato di u_n, converge in $H^1(\Omega)$ e rappresenta la soluzione del problema originario. In queste condizioni, la convergenza uniforme della serie e quella della serie delle derivate di tutti gli ordini è garantita anche in tutte le corone del tipo $\Omega \cap \{\varepsilon < \rho < 1\}$ per cui l'appartenenza di u a $H^m(\Omega)$ dipende solo dal fatto che appartengano a $H^m(\Omega)$ le singole u_n e non da problemi di convergenza della serie.

Allora, siccome $\mu_n \geq 1$ per $n \geq 2$, la serie ottenuta dalla (7.1) sopprimendo il primo termine rappresenta una funzione $\overline{u} \in H^2(\Omega)$ così che $u \in H^2(\Omega)$ se e solo se appartiene a $H^2(\Omega)$ la funzione $c_1 u_1$. Quindi, escluso il caso banale in cui μ_1 sia intero, che corrisponde a scelte fortunatissime dell'ampiezza di α come ad esempio $\alpha = \pi$, abbiamo che $c_1 u_1 \in H^2(\Omega)$ se e solo se $c_1 = 0$ oppure $\mu_1 > 1$. Osservato che $\mu_1 > 1$ se e solo se $\alpha < \pi$, concludiamo che, se il settore Ω è convesso, la soluzione u appartiene a $H^2(\Omega)$. In caso contrario, u non appartiene a $H^2(\Omega)$, e la sua singolarità è tanto più forte quanto maggiore è l'angolo α, a meno che non risulti $c_1 = 0$, cioè

$$\int_0^{\alpha} g(\cos\vartheta, \sin\vartheta) \sin \frac{\pi\vartheta}{\alpha}\, d\vartheta = 0.$$

Si noti che questa condizione non è soddisfatta, ad esempio, da alcuna funzione regolare g strettamente positiva. Quindi la presenza di spigoli sul bordo è fonte di quasi sicura singolarità per la soluzione. Ma si può dire di più: la regolarità della soluzione nello spigolo dipende in generale dal comportamento dei dati in altri punti del bordo e costituisce, di conseguenza, una condizione di compatibilità di carattere globale.

7.2. Esempio. Sia Ω il semicerchio di $\mathbb{R}^2$ descritto in coordinate polari dalle condizioni $\rho < 1$ e $0 < \vartheta < \pi$ e siano Γ_{00}, Γ_{01} e Γ_1 i seguenti sottoinsiemi di Γ:

$$\Gamma_{00} = \Gamma \cap \{\vartheta = 0\}, \qquad \Gamma_{01} = \Gamma \cap \{\rho = 1\} \qquad \text{e} \qquad \Gamma_1 = \Gamma \cap \{\vartheta = \pi\}.$$

Consideriamo il problema misto di tipo Dirichlet–Neumann

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{su } \Gamma_{00}, \quad u = g \quad \text{su } \Gamma_{01}, \quad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \quad \text{su } \Gamma_1.$$

Se si considera il problema di autovalori

$$-w'' = \lambda w \quad \text{in } \left]0, \pi\right[, \qquad w(0) = w'(\pi) = 0,$$

un calcolo sostanzialmente identico a quello dell'esempio precedente, del quale imitiamo ipotesi e notazioni, porta ancora alla formula (7.1), ove ora

$$\mu_n = n - \frac{1}{2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

e i coefficienti c_n sono dati dalla (7.2) con $\alpha = \pi$.

Anche in questo caso arriviamo a concludere che $u \in H^2(\Omega)$ se e solo se appartiene a $H^2(\Omega)$ l'analoga della funzione $c_1 u_1$ precedente, cioè la funzione

$$c_1 u_1(\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta) = c_1 \rho^{1/2} \sin(\vartheta/2).$$

Concludiamo che $u \in H^2(\Omega)$ se e solo se $c_1 = 0$.

Si noti che ora l'origine è fonte di singolarità non perché è un punto irregolare del bordo ma perché è punto di separazione fra le due parti sulle quali sono state imposte le condizioni di Dirichlet e di Neumann. Concludiamo che in un problema misto di tipo Dirichlet–Neumann, anche nel caso del bordo liscio, la soluzione è irregolare nei punti che separano Γ_0 e Γ_1 e che la sua regolarità in tali punti dipende in generale da condizioni di compatibilità di carattere globale sui dati. ∎

Il resto del paragrafo è dedicato a risultati in positivo. Dimostriamo dapprima teoremi di regolarità in situazioni particolari, poi studiamo la regolarità locale e infine deduciamo la regolarità globale per alcuni tipi di condizioni ai limiti. I risultati che otteniamo si basano sull'ipotesi di ellitticità uniforme e non su richieste di tipo $V-$ellitticità. Essi, dunque, valgono anche nel caso in cui l'esistenza delle soluzioni sia soggetta a condizioni di compatibilità sui dati e la soluzione non sia unica.

Nel seguito, per semplicità, lo stesso simbolo c nelle dimostrazioni denota varie costanti, diverse anche nella stessa formula, che dipendono solo dalle quantità specificate nei rispettivi enunciati. Inoltre, se v è una funzione definita in $\mathbb{R}^n$ e a valori scalari o vettoriali, per $i = 1, \ldots, n$ e h reale, usiamo la notazione

$$v_h^i(x) = v(x + he_i), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7.3}$$

con l'intesa che $\{e_1, \ldots, e_n\}$ sia, come sempre, la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

7.3. Teorema. *Supponiamo che i coefficienti* A, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *e* d *verifichino le ipotesi* (1.4) *e* (1.6) *con* $\Omega = \mathbb{R}^n$. *Siano poi* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *e* $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *una soluzione dell'equazione*

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u - \operatorname{div}(\mathbf{c}u) + du = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^n. \tag{7.4}$$

Se i coefficienti a_{ij} *e* c_i *sono anche lipschitziani, allora* $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ *ed esiste una costante* c, *che dipende solo da* n, *dalle norme*

$$\|a_{ij}\|_{L^\infty}, \quad \|b_i\|_{L^\infty}, \quad \|c_i\|_{L^\infty}, \quad \|d\|_{L^\infty}, \quad \|\nabla a_{ij}\|_{L^\infty} \quad e \quad \|\nabla c_i\|_{L^\infty} \tag{7.5}$$

e dalla costante α_0 *di ellitticità uniforme che compare nella* (1.6), *tale che valga la maggiorazione*

$$\|u\|_{2,\mathbb{R}^n} \le c\Big(\|f\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|u\|_{1,\mathbb{R}^n}\Big) . \blacksquare \tag{7.6}$$

Dimostrazione. Scriviamo la (7.4) nella forma

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \alpha_0 u = f + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \cdot \nabla u + (\operatorname{div} \mathbf{c} + \alpha_0 - d)u$$

osservando che $\operatorname{div}(\mathbf{c}u)$ può essere effettivamente calcolato con la formula di Leibniz dato che il coefficiente $\mathbf{c}$ è lipschitziano. Stimiamo ora il secondo membro. Abbiamo

$$\begin{gathered} \|f + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) \cdot \nabla u + (\operatorname{div} \mathbf{c} + \alpha_0 - d)u\|_{0,\mathbb{R}^n} \\ \|f\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|_{L^\infty} \|u\|_{1,\mathbb{R}^n} + (\|\operatorname{div} \mathbf{c}\|_{L^\infty} + \alpha_0 + \|d\|_{L^\infty}) \|u\|_{0,\mathbb{R}^n} \\ \le c\Big(\|f\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|u\|_{1,\mathbb{R}^n}\Big) . \end{gathered}$$

Dunque, ai fini di ciò che vogliamo provare, non è restrittivo limitarsi all'equazione molto più semplice

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \alpha_0 u = f \tag{7.7}$$

e dimostrare che, se $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ è una sua soluzione, allora $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e vale la stima

$$\|u\|_{2,\mathbb{R}^n} \le c\Big(\|f\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|u\|_{1,\mathbb{R}^n}\Big) . \tag{7.8}$$

La formulazione variazionale della (7.7) consiste nel trovare $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tale che, per ogni $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$, sia soddisfatta l'equazione

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big((A\nabla u) \cdot \nabla v + \alpha_0 uv\big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} fv\, dx \tag{7.9}$$

il primo membro della quale costituisce una forma bilineare $H^1(\mathbb{R}^n)-$ ellittica con costante di ellitticità α_0.

Procediamo con il metodo di Nirenberg delle traslazioni e fissiamo i fra gli interi $1, \ldots, n$. Osservato che, se v appartiene a $H^1(\mathbb{R}^n)$, la stessa cosa vale per $v^i_{-h} - v$ e sottintendendo l'apice i per semplicità, dalla (7.9) deduciamo allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big((A\nabla u) \cdot \nabla(v_{-h} - v) + \alpha_0 u(v_{-h} - v)\big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(v_{-h} - v)\, dx$$

e con un semplice cambiamento di variabili trasformiamo il primo membro come

$$\begin{gathered} \int_{\mathbb{R}^n} \big((A_h\nabla u_h - A\nabla u) \cdot \nabla v + \alpha_0(u_h - u)v\big)\, dx \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \big((A\nabla(u_h - u) \cdot \nabla v + \alpha_0(u_h - u)v\big)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} ((A_h - A)\nabla u_h) \cdot \nabla v\, dx. \end{gathered}$$

Abbiamo dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big((A\nabla(u_h - u)\cdot\nabla v + \alpha_0(u_h-u)v\big)\,dx = \langle F^h, v\rangle \qquad \forall\, v\in H^1(\mathbb{R}^n)$$

ove abbiamo posto

$$\langle F^h, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(v_{-h} - v)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} ((A_h - A)\nabla u_h)\cdot\nabla v\,dx.$$

Dunque la funzione $u_h - u$ è la soluzione in $H^1(\mathbb{R}^n)$ di un problema variazionale al quale si applica il Teorema di Lax–Milgram. Abbiamo allora

$$\|u_h - u\|_{1,\mathbb{R}^n} \le \frac{1}{\alpha_0}\,\|F^h\|_{-1,\mathbb{R}^n}$$

e ora stimiamo la norma del secondo membro. Ricordando che i coefficienti a_{ij} sono lipschitziani e applicando la disuguaglianza II.(10.2), otteniamo

$$\begin{aligned}|\langle F^h, v\rangle| &\le \|f\|_{0,\mathbb{R}^n}\,\|v_{-h}-v\|_{0,\mathbb{R}^n} + c|h|\,\|u_h\|_{1,\mathbb{R}^n}\,\|v\|_{1,\mathbb{R}^n}\\ &\le |h|\,\|f\|_{0,\mathbb{R}^n}\,\|v\|_{1,\mathbb{R}^n} + c|h|\,\|u\|_{1,\mathbb{R}^n}\,\|v\|_{1,\mathbb{R}^n}\end{aligned}$$

e quindi deduciamo

$$\|F^h\|_{-1,\mathbb{R}^n} \le |h|\,\|f\|_{0,\mathbb{R}^n} + c|h|\,\|u\|_{1,\mathbb{R}^n}\,.$$

Vale allora la disuguaglianza

$$\|u_h - u\|_{1,\mathbb{R}^n} \le \frac{1}{\alpha_0}\,\|F^h\|_{-1,\mathbb{R}^n} \le c|h|\,\Big(\|f\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|u\|_{1,\mathbb{R}^n}\Big)\,.$$

Pertanto la successione dei rapporti incrementali $\{(u_h - u)/h\}$ è limitata in $H^1(\mathbb{R}^n)$. D'altra parte essa converge in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ alla derivata $D_i u$. Deduciamo allora facilmente che $D_i u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e che vale la maggiorazione

$$\|D_i u\|_{1,\mathbb{R}^n} \le c\,\Big(\|f\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|u\|_{1,\mathbb{R}^n}\Big)\,.$$

Siccome i è arbitrario, ciò significa che $u\in H^2(\mathbb{R}^n)$ e vale la (7.8). ■

Come traspare dalla dimostrazione, il ruolo vero è giocato dalla parte principale dell'operatore e non sarebbe restrittivo omettere gli altri termini già negli enunciati. Tuttavia, sia per uniformità con i paragrafi precedenti, sia in vista dei problemi di Neumann, preferiamo presentare i risultati nel caso dell'equazione nella forma (7.4).

7.4. Osservazione. Nella (7.6) la soluzione u compare anche al secondo membro. Se però è noto, per una particolare equazione differenziale, un risultato di unicità e di dipendenza continua, allora la norma $\|u\|_{1,\mathbb{R}^n}$ può essere a sua volta stimata tramite il dato f. Si osservi che questa circostanza si presenta, ad esempio, se la forma bilineare naturalmente associata al problema è $H^1(\mathbb{R}^n)-$ ellittica. In tali condizioni la stima (7.6) diventa

$$\|u\|_{2,\mathbb{R}^n} \le c\,\|f\|_{0,\mathbb{R}^n}\,.$$

Si noti inoltre che la coercività debole (1.7), che discende dalle ipotesi del teorema, consente comunque di sostituire $\|u\|_{0,\mathbb{R}^n}$ a $\|u\|_{1,\mathbb{R}^n}$ nel secondo membro della (7.6). Con ovvio significato di $a(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ abbiamo infatti

$$\alpha\,\|u\|^2_{1,\mathbb{R}^n} \le a(u,u) + \lambda_0\,\|u\|^2_{0,\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n} fu\,dx + \lambda_0\,\|u\|^2_{0,\mathbb{R}^n} \le c\left(\|f\|^2_{0,\mathbb{R}^n} + \|u\|^2_{0,\mathbb{R}^n}\right).$$

Osservazioni analoghe possono essere fatte anche a proposito dei risultati successivi.

7.5. Teorema. *Supponiamo che i coefficienti* A, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *e* d *verifichino le ipotesi* (1.4) *e* (1.6) *in un aperto* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. *Siano poi* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $u \in H^1(\Omega)$ *una soluzione dell'equazione*

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \mathbf{b}\cdot\nabla u - \operatorname{div}(\mathbf{c}u) + du = f \qquad \text{in } \Omega. \tag{7.10}$$

Se i coefficienti a_{ij} *e* c_i *sono anche lipschitziani allora, per ogni* $\omega \subset\subset \Omega$, *la restrizione* $u|_\omega$ *appartiene a* $H^2(\omega)$ *ed esiste una costante* c, *che dipende solo da* n, Ω, ω, *dalle norme* (7.5) *e dalla costante* α_0 *di ellitticità uniforme che compare nella* (1.6), *tale che valga la maggiorazione*

$$\|u\|_{2,\omega} \le c\left(\|f\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}\right). \;\blacksquare \tag{7.11}$$

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del Teorema 7.3, possiamo ridurci a un'equazione più semplice. In questo caso lasciamo al primo membro della (7.10) solo la parte principale così che possiamo supporre nulli $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ e d senza ledere la generalità.

Consideriamo dapprima il caso particolare in cui Ω è una palla B_{2r} di raggio $2r$ e ω è la palla concentrica B_r e fissiamo una funzione $\zeta \in \mathcal{D}(B_{2r})$ che vale 1 in B_r. Le varie costanti c che scriveremo possono dipendere anche dalle norme L^∞ di ζ e delle sue derivate prime e seconde, dunque da r. Scriviamo ora un'equazione soddisfatta in B_{2r} dalla funzione ζu, che appartiene a $H^1(B_{2r})$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&-\operatorname{div}(A\nabla(\zeta u))\\
&= -\zeta\operatorname{div}(A\nabla u) - \operatorname{div}((A\nabla\zeta)u) - \nabla\zeta\cdot(A\nabla u)\\
&= \zeta f - \operatorname{div}((A\nabla\zeta)u) - \nabla\zeta\cdot(A\nabla u)
\end{aligned}$$

Prolunghiamo ora a $\mathbb{R}^n$ tutte le funzioni in gioco e denotiamo i prolungamenti con i simboli delle funzioni originarie. Precisamente, per ζ prendiamo il prolungamento triviale e, per quanto riguarda i coefficienti, possiamo fare in modo che le norme L^∞ che riguardano i prolungamenti o le loro derivate non siano, ad esempio, più che raddoppiate rispetto alle norme originarie e che il prolungamento di A verifichi la condizione di uniforme ellitticità, ad esempio con costante $\alpha_0/2$. Di fatto non interessa come u sia stata prolungata, dato che u e le sue derivate sono sempre moltiplicate per funzioni con supporto in B_{2r}. Allora è chiaro che la relazione trovata in B_{2r} si estende a tutto $\mathbb{R}^n$, così che possiamo applicare il Teorema 7.3, nel quale f è sostituita dal prolungamento dell'ultimo membro della catena di uguaglianze. Deduciamo che $\zeta u \in H^2(\mathbb{R}^n)$, da cui $u_{|B_r} \in H^2(B_r)$ dato che $\zeta = 1$ in B_r, e che vale una stima del tipo

$$\begin{aligned} \|u\|_{2,B_r} &\le \|\zeta u\|_{2,\mathbb{R}^n} \\ &\le c\Big(\|\zeta f\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|\mathrm{div}((A\nabla\zeta)u)\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|\nabla\zeta\cdot(A\nabla u)\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|\zeta u\|_{1,\mathbb{R}^n}\Big) \\ &\le c\Big(\|f\|_{0,B_{2r}} + \|u\|_{1,B_{2r}}\Big). \end{aligned}$$

Ciò prova il teorema nel caso particolare considerato.

Passiamo ora al caso generale e fissiamo $\omega \subset\subset \Omega$. Per ogni punto $x \in \overline{\omega}$ prendiamo $r > 0$ tale che $B_{2r}(x) \subseteq \Omega$. Siccome $\overline{\omega}$ è un compatto, possiamo scegliere un numero finito di punti $x_1, \ldots, x_k$ di $\overline{\omega}$ e altrettanti numeri positivi $r_1, \ldots, r_k$ tali che la famiglia $\{B_{r_i}(x_i)\}$ ancora ricopra $\overline{\omega}$. Abbiamo allora

$$\|u\|_{2,B_{r_i}(x_i)} \le c_i\Big(\|f\|_{0,B_{2r_i}(x_i)} + \|u\|_{1,B_{2r_i}(x_i)}\Big) \le c_i\Big(\|f\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}\Big)$$

per $i = 1, \ldots, k$, ove le costanti c_i dipendono solo dalle quantità specificate nell'enunciato. Introdotta anche una partizione dell'unità $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_k\}$ di classe C^∞ associata a $\overline{\omega}$ e al ricoprimento finito considerato e scritta u in ω come $\sum_{i=1}^k \zeta_i u$, concludiamo allora che $u_{|\omega} \in H^2(\omega)$ e che vale la disuguaglianza

$$\|u\|_{2,\omega} \le c\sum_{i=1}^k \|u\|_{2,B_{r_i}(x_i)}$$

nella quale c può dipendere dalle norme L^∞ delle derivate prime e seconde delle funzioni ζ_i, dunque sempre dalle quantità previste nell'enunciato. Combinando infine le ultime due stime otteniamo la (7.11). ∎

7.6. Osservazione. Nel momento in cui è noto che $u_{|\omega} \in H^2(\omega)$ per ogni $\omega \subset\subset \Omega$, è chiaro che tutti gli addendi del primo membro della (7.10) appartengono a $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per cui la (7.10) stessa esprime l'uguaglianza di due distribuzioni che, di fatto, sono funzioni. Dunque essa è soddisfatta q.o.

7.7. Osservazione. Il Teorema 7.5 può essere iterato, e ora vediamo come. Grazie alla regolarità già ottenuta, per ogni aperto $\Omega' \subset\subset \Omega$ e per $k = 1, \ldots, n$ è lecito usare la formula di Leibniz nel calcolo seguente:

$$D_k(A\nabla u) = (D_k A)\nabla u + A\nabla D_k u.$$

Deduciamo allora

$$D_k\,\mathrm{div}(A\nabla u) = \mathrm{div}\big((D_k A)\nabla u\big) + \mathrm{div}(A\nabla D_k u).$$

Trattando allo stesso modo gli altri termini vediamo che, se sono lipschitziani anche gli altri coefficienti, l'uguaglianza

$$-\,\mathrm{div}(A\nabla D_k u) + \mathbf{b}\cdot\nabla D_k u - \mathrm{div}(\mathbf{c}D_k u) + dD_k u = f_k,$$

ove abbiamo posto

$$f_k = D_k f + \operatorname{div}\big((D_k A)\nabla u\big) - (D_k \mathbf{b}) \cdot \nabla u + \operatorname{div}\big((D_k \mathbf{c}) u\big) - (D_k d) u,$$

vale in Ω' nel senso delle distribuzioni. Dall'arbitrarietà di Ω', grazie al Teorema II.1.6, deduciamo che la stessa uguaglianza vale in Ω per $k = 1, \ldots, n$. Dunque le derivate $D_k u$ soddisfano equazioni dello stesso tipo di quella risolta da u ma, fatto tuttavia inessenziale ai fini della regolarità, con secondi membri che dipendono anche da u.

Supponiamo ora, in aggiunta, che i coefficienti a_{ij} e c_i abbiano derivate prime lipschitziane e che $f \in H^1(\Omega)$. Allora $f_{k|\Omega'} \in L^2(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$. D'altra parte $D_k u_{|\Omega'} \in H^1(\Omega')$ per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$, per cui il Teorema 7.5 può essere applicato di nuovo e fornisce $D_k u_{|\omega} \in H^2(\omega)$ per ogni $\omega \subset\subset \Omega$ e una stima della norma. Concludendo, se tutti i coefficienti sono lipschitziani, se a_{ij} e c_i hanno anche derivate prime lipschitziane e se $f \in H^1(\Omega)$, allora ogni soluzione $u \in H^1(\Omega)$ della (7.10) verifica $u_{|\omega} \in H^3(\omega)$ per ogni $\omega \subset\subset \Omega$.

In generale si dimostra che da $f \in H^m(\Omega)$ segue $u_{|\omega} \in H^{m+2}(\omega)$ per ogni $\omega \subset\subset \Omega$ se i coefficienti sono sufficientemente regolari, precisamente se a_{ij} e c_i e, rispettivamente, b_i e d hanno derivate lipschitziane fino agli ordini $m+1$ e m, e che vale una stima del tipo

$$\|u\|_{m+2,\omega} \le c \Big(\|f\|_{m,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega} \Big). \ ■$$

Vista la regolarità all'interno, passiamo ora ai problemi ai limiti. Iniziamo da un risultato generale che riguarda il caso del semispazio.

7.8. Teorema. *Supponiamo che i coefficienti* A, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *e* d *verifichino le ipotesi* (1.4) *e* (1.6) *con* $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ *e che i coefficienti* a_{ij} *e* c_i *siano anche lipschitziani. Sia inoltre* V *un sottospazio chiuso di* $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ *contenente* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n_+)$ *che verifica la seguente condizione di invarianza per traslazioni*

$$v_h^i \in V \qquad \forall\, v \in V \quad \forall\, h \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{7.12}$$

Siano infine $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ *e* $u \in V$ *una soluzione dell'equazione variazionale*

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \big((A\nabla u) \cdot \nabla v + (\mathbf{b} \cdot \nabla u) v + (\mathbf{c} u) \cdot \nabla v + duv \big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} f v \, dx \tag{7.13}$$

per ogni $v \in V$. *Allora* $u \in H^2(\mathbb{R}^n_+)$ *ed esiste una costante* c, *che dipende solo da* n, *dalle norme* (7.5) *e dalla costante* α_0 *di ellitticità uniforme che compare nella* (1.6), *tale che valga la maggiorazione*

$$\|u\|_{2,\mathbb{R}^n_+} \le c \Big(\|f\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|u\|_{1,\mathbb{R}^n_+} \Big). \ ■ \tag{7.14}$$

Dimostrazione. Anche in questo caso è facile vedere che è sufficiente trattare un caso più semplice. Precisamente possiamo sostituire la (7.13) con l'equazione variazionale

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \big((A\nabla u) \cdot \nabla v + (\mathbf{c} u) \cdot \nabla v + \lambda_0 uv \big)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n_+} f v \, dx \tag{7.15}$$

ove λ_0 è scelto in modo che il primo membro definisca una forma $H^1(\mathbb{R}^n_+)$– ellittica. A questo punto ripetiamo la dimostrazione del Teorema 7.3 con una variante: stimiamo la norma H^1 dell'incremento $u^i_h - u$ solo per $i = 1, \ldots, n-1$. Si noti che ora le funzioni test sono vincolate ad appartenere a V e che è la (7.12) che consente l'adattamento della dimostrazione fatta al caso in esame. Per $i = 1, \ldots, n-1$, $v \in V$ e $h \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}^n_+} \Big((A\nabla(u^i_h - u) \cdot \nabla v + (\mathbf{c}(u^i_h - u)) + \lambda_0(u^i_h - u)v \Big)\, dx = \big\langle F^{i,h}, v \big\rangle \qquad \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^n_+),$$

ove abbiamo posto

$$\big\langle F^{i,h}, v \big\rangle = \int_{\mathbb{R}^n_+} \Big(f(v^i_{-h} - v) - ((A^i_h - A)\nabla u^i_h) \cdot \nabla v - ((\mathbf{c}^i_h - \mathbf{c})u^i_h) \cdot \nabla v \Big)\, dx,$$

e come nella dimostrazione citata concludiamo che $D_i u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$, ora per $i < n$, e che vale la maggiorazione

$$\|D_i u\|_{1,\mathbb{R}^n_+} \le c \left(\|f\|_{0,\mathbb{R}^n_+} + \|u\|_{1,\mathbb{R}^n_+} \right), \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

Ciò significa che tutte le derivate parziali seconde di u, con l'eccezione al più della derivata pura $D^2_n u$, appartengono a $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ e che le loro norme in $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ si stimano con il secondo membro della (7.14). Basta allora dimostrare che la stessa cosa accade per la derivata $D^2_n u$, e ciò discende dall'equazione differenziale risolta da u e ancora dalla condizione di ellitticità uniforme. Chiaramente u verifica

$$-\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij} D_j u) - \operatorname{div}(\mathbf{c}u) + \lambda_0 u = f \qquad \text{in } \mathbb{R}^n_+$$

e possiamo separare il termine cui siamo interessati ottenendo

$$-D_n(a_{nn} D_n u) = f + \operatorname{div}(\mathbf{c}u) - \lambda_0 u + \sum_{(i,j) \ne (n,n)} D_i(a_{ij} D_j u).$$

Notato che, grazie alle conclusioni già raggiunte e all'ipotesi di lipschitzianità sui coefficienti, è lecito l'uso della formula di Leibniz, vediamo che il secondo membro appartiene a $L^2(\mathbb{R}^n_+)$, per cui della stessa proprietà gode il primo membro. Dunque la funzione $a_{nn} D_n u$, che appartiene almeno a $L^2(\mathbb{R}^n_+)$ con le sue derivate rispetto alle prime $n-1$ variabili, di fatto appartiene a $H^1(\mathbb{R}^n_+)$. Osservato che la (1.6) implica che $a_{nn} \ge \alpha_0$ q.o., per cui la funzione $1/a_{nn}$ è ben definita e lipschitziana, deduciamo immediatamente che $D_n u = (1/a_{nn}) a_{nn} D_n u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$.

La stima della norma $\big\|D^2_n u\big\|_{0,\mathbb{R}^n_+}$ si ottiene poi ripercorrendo questi ultimi passi anche per quanto riguarda le maggiorazioni. ∎

7.9. Osservazione. Notiamo che le scelte $V = H^1(\mathbb{R}^n_+)$ e $V = H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ certamente verificano la (7.12). Abbiamo dunque ottenuto, in particolare, un risultato di regolarità globale per le soluzioni dei problemi di Dirichlet e di Neumann, la condizione di Neumann essendo $(A\nabla u + \mathbf{c}u) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$, dunque omogenea. Per ragioni di spazio non tratteremo il caso delle condizioni non omogenee.

Si noti invece che la (7.12) è incompatibile con problemi di tipo misto, che dunque non rientrano nel Teorema 7.8, in accordo con la situazione descritta nell'Esempio 7.2. ∎

Senza entrare nei dettagli delle dimostrazioni, enunciamo i risultati di regolarità locale che derivano dal Teorema 7.8 grazie agli stessi strumenti che ci hanno portato a dedurre il Teorema 7.5 dal Teorema 7.3.

7.10. Corollario. *Sia* Ω *la mezza palla* $B_{2r}(0) \cap \mathbb{R}^n_+$. *Supponiamo che i coefficienti* A, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *e* d *verifichino le ipotesi* (1.4) *e* (1.6) *in* Ω *e che i coefficienti* a_{ij} *e* c_i *siano anche lipschitziani. Siano poi* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $u \in H^1(\Omega)$ *tale che*

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u - \operatorname{div}(\mathbf{c}u) + duv = f \qquad \textit{in } \Omega \tag{7.16}$$

$$u = 0 \qquad \textit{su } \Gamma \setminus \partial B_{2r}(0). \tag{7.17}$$

Allora, posto $\omega = B_r \cap \mathbb{R}^n_+$, *risulta* $u \in H^2(\omega)$ *ed esiste una costante* c, *che dipende solo da* n, r, *dalle norme* (7.5) *e dalla costante* α_0 *di ellitticità uniforme che compare nella* (1.6), *tale che valga la maggiorazione*

$$\|u\|_{2,\omega} \le c\left(\|f\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}\right).$$

Le stesse conclusioni valgono inoltre se la (7.17) *è sostituita da*

$$(A\nabla u + \mathbf{c}u) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \qquad \textit{su } \Gamma \setminus \partial B_{2r}(0). \ \blacksquare \tag{7.18}$$

Nel caso dell'aperto limitato, a causa dell'Esempio 7.1, siamo costretti a supporre Ω regolare. In vista dell'uso delle carte locali e della partizione dell'unità, richiediamo che l'aperto sia di classe C^2, cioè che, in riferimento alla Definizione II.5.2 e all'Osservazione II.5.3, sia possibile scegliere di classe C^2 ciascuna delle funzioni ψ e $\mathbf{G}$. Infatti, se una trasformazione è di classe C^2, allora vale per gli spazi H^2 l'analoga della Proposizione II.4.4, come si vede facilmente adattando le dimostrazioni del Lemma II.4.2 e della proposizione stessa.

Vale allora il risultato seguente:

7.11. Teorema. *Sia* Ω *un aperto limitato di classe* C^2 *e si supponga che i coefficienti* A, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *e* d *verifichino le ipotesi* (1.4) *e* (1.6) *in* Ω *e che i coefficienti* a_{ij} *e* c_i *siano anche lipschitziani. Siano poi* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $u \in H^1(\Omega)$ *tale che*

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u - \operatorname{div}(\mathbf{c}u) + duv = f \qquad \textit{in } \Omega \tag{7.19}$$

$$u = 0 \qquad \textit{su } \Gamma \tag{7.20}$$

Allora $u \in H^2(\Omega)$ *ed esiste una costante* c, *che dipende solo da* n, *dalle norme* (7.5) *e dalla costante* α_0 *di ellitticità uniforme che compare nella* (1.6), *tale che valga la maggiorazione*

$$\|u\|_{2,\Omega} \le c\left(\|f\|_{0,\Omega} + \|u\|_{1,\Omega}\right). \tag{7.21}$$

Le stesse conclusioni valgono inoltre se la (7.20) *è sostituita da*

$$(A\nabla u + \mathbf{c}u) \cdot \boldsymbol{\nu} = 0 \qquad su \ \ \Gamma. \ \blacksquare \tag{7.22}$$

La dimostrazione, abbastanza complessa nei dettagli, si ottiene per carte locali e partizione dell'unità a partire dai risultati di carattere locale dello stesso tipo del Corollario 7.10. Questi hanno anche interesse autonomo e di essi viene data la traccia negli esercizi proposti successivamente, nei quali le notazioni Ω_r e Γ_r con $r > 0$ significano rispettivamente $\Omega \cap B_r(x_0)$ e $\Gamma \cap B_r(x_0)$, il punto x_0 essendo specificato di volta in volta.

Notiamo invece che le condizioni di Neumann (7.22) che riusciamo a considerare sono sufficientemente generali da comprendere le condizioni di terzo tipo $(A\nabla u)\cdot\boldsymbol{\nu} + \varphi u = 0$ con φ lipschitziana ad arbitrio. Infatti, se φ è lipschitziana su Γ e Ω è di classe C^2, si può costruire un campo vettoriale $\mathbf{c}$ lipschitziano in $\overline{\Omega}$ tale che $\mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\nu}|_\Gamma = \varphi$. Se $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ si ha allora

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \varphi uv \, ds &= \int_\Gamma \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\nu} uv \, ds = \int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{c}uv)\, dx \\ &= \int_\Omega (\operatorname{div}\mathbf{c}) uv \, dx + \int_\Omega (\mathbf{c}\cdot\nabla u) v \, dx + \int_\Omega (\mathbf{c}u)\cdot\nabla v \, dx \end{aligned}$$

e, per densità, la stessa conclusione vale per $u, v \in H^1(\Omega)$. Si noterà allora che i coefficienti che compaiono nei primi due integrali dell'ultimo membro non sono altro che contributi ai coefficienti d e $\mathbf{b}$ e che tutte le regolarità sono in accordo con quelle assunte.

In particolare rientra nel teorema precedente il problema ai limiti

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \ \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} + \psi\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}} + \varphi u = 0 \quad \text{su } \ \Gamma$$

ove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^2$ di classe C^2, $\boldsymbol{\tau} = (-\nu_2, \nu_1)$ e i coefficienti φ e ψ sono lipschitziani su Γ, come si vede combinando quanto appena detto con le considerazioni della Sezione 3.7.

7.12. Osservazione. I risultati di regolarità ottenuti non hanno solo interesse autonomo. Ecco un'applicazione a un problema del quarto ordine.

Sia Ω un aperto limitato di classe C^2 e si consideri il problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione di Poisson $-\Delta u = f$. Se $f \in H^{-1}(\Omega)$, esso ha una e una sola soluzione $u \in H^1_0(\Omega)$ e vale la stima $\|u\|_{1,\Omega} \le c\,\|f\|_{-1,\Omega}$. Se inoltre $f \in L^2(\Omega)$, allora $u \in H^2(\Omega)$ e vale la (7.21). Combinando otteniamo $\|u\|_{2,\Omega} \le c\,\|f\|_{0,\Omega}$ e, eliminando f, concludiamo

$$\|u\|_{2,\Omega} \le c\,\|\Delta u\|_{0,\Omega} \qquad \forall\, u \in H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega).$$

Questa disuguaglianza significa che è $(H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega))-$ ellittica la forma bilineare e continua $a(u,v) = \int_\Omega (\Delta u)(\Delta v)\, dx$. Deduciamo in particolare che il problema (5.1) discusso nella Sezione 5.1 è ben posto. $\blacksquare$

Un'applicazione in direzione diversa è invece la seguente. Consideriamo il problema di Dirichlet non omogeneo

$$-\operatorname{div}(A\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{su } \Gamma, \tag{7.23}$$

ove $A \in L^\infty(\Omega)^{n\times n}$ verifica la (1.6). Sappiamo che esso ha una e una sola soluzione $u \in H^1(\Omega)$ se $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$. Supponiamo ora Ω di classe C^2 e A lipschitziana. Allora, per ogni $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, osservato che $A^*\nabla v \in H^1(\Omega)^n$, ove A^* è la trasposta della matrice A, abbiamo

$$\begin{aligned} {}_{-1,\Omega}\langle f, v\rangle_{1,\Omega} &= \int_\Omega (A\nabla u)\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega \nabla u\cdot(A^*\nabla v)\,dx \\ &= -\int_\Omega u\operatorname{div}(A^*\nabla v)\,dx + \int_\Gamma g(A^*\nabla v)\cdot\boldsymbol{\nu}\,ds \end{aligned}$$

così che u verifica la condizione

$$-\int_\Omega u\operatorname{div}(A^*\nabla v)\,dx = {}_{-1,\Omega}\langle f, v\rangle_{1,\Omega} - \langle g, (A^*\nabla v)\cdot\boldsymbol{\nu}\,|_\Gamma\rangle \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \tag{7.24}$$

ove l'ultima dualità è fra $H^{-1/2}(\Gamma)$ e $H^{1/2}(\Gamma)$.

Il Teorema 7.11 implica il risultato seguente, che consente in particolare la risoluzione del problema di Dirichlet con dato al bordo in $L^2(\Gamma)$:

7.13. Teorema. *Siano Ω un aperto di classe C^2 e $A \in L^\infty(\Omega)^{n\times n}$ verificante la (1.6) e, in aggiunta, lipschitziana. Allora, per ogni $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, esiste una e una sola $u \in L^2(\Omega)$ verificante la (7.24). Vale inoltre la stima*

$$\|u\|_{0,\Omega} \le c\Big(\|f\|_{-1,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\Gamma}\Big) \tag{7.25}$$

ove c dipende solo da Ω e da A. ■

Dimostrazione. Controlliamo dapprima la (7.25). Se $u \in L^2(\Omega)$, allora il problema di Dirichlet aggiunto

$$-\operatorname{div}(A^*\nabla v) = u \quad \text{in } \Omega, \qquad v = 0 \quad \text{su } \Gamma$$

ha una e una sola soluzione $v \in H_0^1(\Omega)$. Per il Teorema 7.11, inoltre, v appartiene a $H^2(\Omega)$ e verifica $\|v\|_{2,\Omega} \le c\,\|u\|_{0,\Omega}$. Se ora u è anche soluzione della (7.24), usando come funzione test la funzione v così costruita, otteniamo

$$\begin{aligned} \|u\|_{0,\Omega}^2 &= -\int_\Omega u\operatorname{div}(A^*\nabla v)\,dx = {}_{-1,\Omega}\langle f, v\rangle_{1,\Omega} - \langle g, (A^*\nabla v)\cdot\boldsymbol{\nu}\,|_\Gamma\rangle \\ &\le \|f\|_{-1,\Omega}\,\|v\|_{1,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\Gamma}\,\|(A^*\nabla v)\cdot\boldsymbol{\nu}\,|_\Gamma\|_{1/2,\Gamma} \\ &\le c\Big(\|f\|_{-1,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\Gamma}\Big)\,\|v\|_{2,\Omega} \le c\Big(\|f\|_{-1,\Omega} + \|g\|_{-1/2,\Gamma}\Big)\,\|u\|_{0,\Omega} \end{aligned}$$

da cui subito la (7.25).

In particolare deduciamo l'unicità della soluzione. Per quanto riguarda l'esistenza, consideriamo l'applicazione lineare L_0 di $H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma)$ in $H^1(\Omega)$ che alla coppia (f,g) associa la soluzione variazionale u del problema (7.23). Grazie alle considerazioni introduttive, se $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{1/2}(\Gamma)$, allora la funzione $u = L_0(f,g)$ verifica la (7.24), quindi anche la (7.25). Ciò mostra che L_0 è continuo a valori in $L^2(\Omega)$ quando $H^{1/2}(\Gamma)$ è munito della topologia indotta da $H^{-1/2}(\Gamma)$. Siccome $H^{1/2}(\Gamma)$ è denso in $H^{-1/2}(\Gamma)$, possiamo applicare il Lemma II.5.1 e dedurre che L_0 si prolunga in uno e in un solo modo a un operatore L lineare e continuo da $H^{-1}(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ in $L^2(\Omega)$. Ora, se $f \in H^{-1}(\Omega)$ e $g \in H^{-1/2}(\Gamma)$, è chiaro che la funzione $u = L(f,g)$ risolve la (7.24). ∎

La (7.24) può essere chiamata *formulazione debole* del problema (7.23). La possibilità di risolvere problemi ai limiti posti in forma più debole di quella variazionale è dunque legata a risultati di regolarità per le soluzioni dei corrispondenti problemi aggiunti.

7.14. Esercizi

1. In riferimento all'Esempio 7.1, studiare la regolarità H^2 vicino all'origine della soluzione del problema misto ottenuto sostituendo la condizione di Dirichlet sui lati dell'angolo con la condizione di Neumann $\partial_\nu u = 0$.

Considerare poi l'analogo problema ottenuto imponendo invece la condizione $u = 0$ sul lato $\vartheta = 0$ e la condizione $\partial_\nu u = 0$ sul lato $\vartheta = \alpha$.

2. Adattare la dimostrazione del Teorema 7.8 per dimostrare che, nel caso previsto dal Teorema 7.3, la soluzione ha la regolarità H^2 separatamente nei due semispazi $\{x_n > 0\}$ e $\{x_n < 0\}$ se i coefficienti a_{ij} sono lipschitziani separatamente nei semispazi considerati anziché globalmente in $\mathbb{R}^n$. Si tratta dunque di un risultato di regolarità per un problema di trasmissione.

3. Dimostrare il Corollario 7.10.

4. Dimostrare che, nelle condizioni della Proposizione II.4.4 con l'ipotesi ulteriore che $\mathbf{G}$ sia di classe C^2 con derivate seconde limitate, l'applicazione $u \mapsto u \circ \mathbf{G}$ è un isomorfismo di $H^2(\Omega)$ su $H^2(\Omega')$.

5. Dimostrare che, nelle condizioni della Proposizione II.4.4, se $A \in L^\infty(\Omega)^{n\times n}$ verifica la condizione (1.6) in Ω, allora vale la formula

$$\int_\Omega (A\nabla u) \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega'} (B\nabla(u \circ \mathbf{G})) \cdot \nabla(v \circ \mathbf{G}) \, dx'$$

ove $B \in L^\infty(\Omega')^{n\times n}$ verifica la condizione (1.6) in Ω' con una certa costante $\alpha_0' > 0$ al posto di α_0. Dunque i cambiamenti di variabile regolari trasformano equazioni variazionali ellittiche in equazioni dello stesso tipo.

6. Dedurre dal Corollario 7.10 e dall'esercizio precedente che, se Ω è di classe C^2, se coefficienti e dato f sono regolari come nei teoremi dimostrati sopra e se $u \in H^1(\Omega)$ risolve la (7.19) e, per certi $x_0 \in \Gamma$ e $R > 0$, verifica la condizione di Dirichlet $u = 0$ su Γ_R, allora esiste $r \in \,]0, R[$ tale che $u \in H^2(\Omega_r)$.

7. Usando l'esercizio precedente e una partizione dell'unità, dimostrare che l'enunciato dell'esercizio stesso può essere migliorato consentendo a r di essere arbitrario in $]0, R[$.

8. Dimostrare che, se l'aperto Ω è di classe C^2, se coefficienti e dato f sono regolari come nei teoremi dimostrati sopra e se $u \in H^1(\Omega)$ risolve la (7.19) e verifica la condizione di Dirichlet $u = 0$ su un aperto $\Gamma_0 \subset \Gamma$ allora, per ogni aperto $\omega \subseteq \Omega$ tale che $\overline{\omega} \subseteq \Omega \cup \Gamma_0$, la restrizione $u|_\omega$ appartiene a $H^2(\omega)$.

9. Dimostrare gli analoghi risultati per il problema di Neumann e il Teorema 7.11.

10. Precisare e dimostrare l'affermazione seguente riguardante il problema misto di tipo Dirichlet–Neumann: in condizioni di regolarità su aperto, coefficienti e dati, la soluzione possiede la regolarità H^2 lontano dall'interfaccia che separa le due parti Γ_0 e Γ_1 sulle quali vengono assegnate le condizioni di Dirichlet e, rispettivamente, di Neumann.

11. Dimostrare che, se $u \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ risolve l'equazione $-\Delta u = f$ con $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ e verifica la condizione di Neumann $\partial_\nu u = 0$ su $\partial\mathbb{R}^n_+$, allora il prolungamento per riflessione u^* di u definito da $u^*(x', x_n) = u(x', |x_n|)$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{R}$, che appartiene a $H^1(\mathbb{R}^n)$, verifica $-\Delta u^* = f^*$ in $\mathbb{R}^n$, ove f^* è il prolungamento per riflessione di f. Dedurre la regolarità di u direttamente dal Teorema 7.3.

Procedere analogamente quando la condizione di Neumann sia sostituita dalla condizione di Dirichlet $u = 0$, dimostrando che vale un analogo risultato con u^* e f^* sostituite con $u^* \operatorname{sign} x_n$ e $f^* \operatorname{sign} x_n$ rispettivamente.

12. Dimostrare che, se $\Omega = \left]0,1\right[^2$ e $f \in L^2(\Omega)$, allora ogni soluzione del problema omogeneo di Neumann per l'equazione di Poisson $-\Delta u = f$ appartiene a $H^2(\Omega)$ procedendo per successivi prolungamenti per riflessione.

Adattare il discorso al caso in cui la condizione di Neumann sia sostituita dalla condizione di Dirichlet e considerare, infine, i vari problemi misti che si ottengono imponendo sui lati condizioni di Dirichlet e condizioni di Neumann nelle loro possibili combinazioni.

13. Siano Ω un poligono di $\mathbb{R}^2$ e $f \in L^2(\Omega)$ una funzione a supporto compatto. Discutere la regolarità della soluzione del problema di Dirichlet omogeneo per l'equazione di Poisson $-\Delta u = f$.

14. Esaminare l'analoga questione per il problema di Neumann $\partial_\nu u = 0$ e per i vari problemi misti che si ottengono imponendo condizioni di Dirichlet o di Neumann sui lati del poligono nelle loro combinazioni possibili.

15. Adattare la dimostrazione del Teorema 7.8 al caso in cui al secondo membro venga aggiunto il termine

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x')v(x')\,dx'$$

con $g \in L^2(\mathbb{R}^{n-1})$ verificante, con la notazione (7.3), anche la stima

$$\left\|g^i_h - g\right\|_{-1/2,\mathbb{R}^{n-1}} \le M|h| \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}, \qquad i = 1,\dots,n-1.$$

Si può dimostrare che tale condizione è soddisfatta se $g \in H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$.

16. Nelle condizioni del Teorema 7.13, sia $u \in L^2(\Omega)$ la soluzione del problema (7.24). Dimostrare che $u \in H^1(\Omega)$ se e solo se $g \in H^{1/2}(\Gamma)$.

17. Siano Ω il disco unitario di $\mathbb{R}^2$, $g \in L^2(\Gamma)$ e u la funzione definita q.o. in Ω dall'equazione

$$u(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \left(a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta\right), \qquad 0 < \rho < 1, \quad 0 < \vartheta < 2\pi,$$

ove a_0, a_n e b_n sono i coefficienti di Fourier di $\vartheta \mapsto g(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$. Dimostrare che u appartiene a $L^2(\Omega)$ e risolve la (7.24) con $f = 0$ e $A = I$, la matrice unità 2×2.

18. In riferimento all'esercizio precedente, dimostrare che $u \in H^1(\Omega)$ se e solo se le due successioni $\{n^{1/2}a_n\}$ e $\{n^{1/2}b_n\}$ appartengono a ℓ^2 e legare le loro norme in ℓ^2 alla norma $\|\nabla u\|_{0,\Omega}$.

19. Utilizzando le notazioni dei due esercizi precedenti e i risultati in essi contenuti dimostrare che $g \in H^{1/2}(\Gamma)$ se e solo se le due successioni $\{n^{1/2}a_n\}$ e $\{n^{1/2}b_n\}$ appartengono a ℓ^2 e che la formula

$$\|g\|^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2)$$

definisce una norma in $H^{1/2}(\Gamma)$ equivalente a quella usuale.

Avvalendosi di questo, ritrovare nel caso particolare in esame la compattezza dell'immersione di $H^{1/2}(\Gamma)$ in $L^2(\Gamma)$.

20. Sia Γ la circonferenza unitaria di $\mathbb{R}^2$. Dimostrare che la funzione caratteristica della semicirconferenza $\Gamma \cap \mathbb{R}^2_+$ non appartiene a $H^{1/2}(\Gamma)$ e costruire una funzione continua su Γ che non appartiene a $H^{1/2}(\Gamma)$. Sono dunque giustificate, almeno in un caso particolare, le affermazioni che avevamo fatto a suo tempo riguardo a questi due punti.

Bibliografia

[1] R. Adams: *Sobolev spaces*, Acad. Press, 1975.

[2] S. Agmon: *Lectures on elliptic boundary value problems*, Van Nostrand, 1965.

[3] L. Bers, F. John, M. Schechter: *Partial differential equations*, Amer. Math. Soc., 1979.

[4] H. Brézis: *Analisi funzionale. Teoria e applicazioni*, Liguori, 1986.

[5] R. Courant, D. Hilbert: *Methods of mathematical physics*, Interscience, 1962.

[6] R. Dautray, J.L. Lions: *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, vol. 2, Functional and variational methods*, Springer, 1984.

[7] N. Dunford, J.T. Schwartz: *Linear operators*, Interscience, 1958.

[8] R.E. Edwards: *Functional analysis*, Holt, 1965.

[9] D. Gilbarg, N. Trudinger: *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1977.

[10] P. Grisvard: *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, 1985.

[11] P.R. Halmos: *Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity*, Chelsea, 1951.

[12] L. Hörmander: *Linear partial differential operators*, Springer, 1976.

[13] T. Kato: *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 1976.

[14] A. Kolmogorov, S. Fomin: *Elements of the theory of functions and functional analysis*, Graylock, 1961.

[15] O.A. Ladyženskaja, N.N. Ural'ceva: *Equations aux dérivées partielles de type elliptique*, Dunod, 1968.

[16] J.L. Lions, E. Magenes: *Non–homogeneous boundary value problems and applications*, vol. I, Springer, 1972.

[17] C. Miranda: *Partial differential equations of elliptic type*, Springer, 1970.

[18] S. Mizohata: *The theory of partial differential equations*, Cambridge Univ. Press, 1973.

[19] C. Morrey: *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer, 1966.

[20] J. Nečas: *Les méthodes directes en theorie des équations elliptiques*, Masson, 1967.

[21] F. Riesz, B. Sz.-Nagy: *Functional analysis*, Frederick Ungar, 1955.

[22] W. Rudin: *Functional analysis*, McGraw–Hill, 1973.

[23] M. Schechter: *Modern methods in partial differential equations. An introduction*, McGraw–Hill, 1977.

[24] M. Schechter: *Principles of functional analysis*, Acad. Press, 1971.

[25] L. Schwartz: *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

[26] F. Treves: *Basic linear partial differential equations*, Acad. Press, 1975.

[27] J. Wloka: *Partial differential equations*, Cambridge Univ. Press, 1987.

[28] K. Yosida: *Functional analysis*, Springer, 1965.

Notazioni di uso corrente

$\|\cdot\|$ e $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$	norma e prodotto scalare in uno spazio di Hilbert
$\|\cdot\|_*$ e $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_*$	norma e prodotto scalare nello spazio duale
$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, ${}_{V'}\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_V$	prodotto di dualità
R , R_V	operatore di Riesz dello spazio di Hilbert V
$A^\perp$	l'ortogonale di A
$\operatorname{span} A$ e $\overline{\operatorname{span}}\, A$	sottospazio delle combinazioni lineari finite di elementi di A e chiusura di $\operatorname{span} A$
$N(L)$ e $R(L)$	nucleo e immagine dell'operatore lineare L
$\mathcal{L}(V;W)$ e $\mathcal{L}(V)$	spazi degli operatori lineari e continui di V in W e, rispettivamente, di V in sé
$\mathcal{K}(V;W)$ e $\mathcal{K}(V)$	spazi degli operatori lineari, continui e compatti di V in W e, rispettivamente, di V in sé
$v_k \to v$ e $v_k \rightharpoonup v$	convergenze forte e debole
I	applicazione identica di uno spazio in sé
L^*	aggiunto dell'operatore L
$\rho(L)$, $\sigma(L)$ e $\sigma_p(L)$	risolvente, spettro e spettro puntuale di L
ℓ^2	spazio delle successioni reali $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tali che $\|\{c_n\}\|_{\ell^2}^2 = \sum_n c_n^2 < \infty$
$\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n_+$	spazio euclideo e semispazio $x_n > 0$
Ω	aperto di $\mathbb{R}^n$
Γ	frontiera di Ω
Γ_0 e Γ_1	aperti di Γ
$\boldsymbol{\nu}$	normale esterna su Γ
$\omega \subset\subset \Omega$	ω aperto limitato e $\overline{\omega} \subset \Omega$
D_i , D^α e $\|\alpha\|$	derivazione parziale rispetto alla $i-$ esima variabile, derivazione di ordine superiore e ordine della derivazione
∇ , div e Δ	gradiente, divergenza e laplaciano
$v\|_\omega$ e $\widetilde{v}$	restrizione a ω e prolungamento triviale di v
$\operatorname{supp} u$	supporto della funzione o distribuzione u
$\|\cdot\|_{0,\Omega}$	norma in $L^2(\Omega)$ o in $L^2(\Omega)^n$
$\|\cdot\|_{m,\Omega}$	norma in $H^m(\Omega)$ o in $H^m(\Omega)^n$
$\|\cdot\|_{0,\Gamma}$ e $\|\cdot\|_{0,\Gamma_0}$	norme in $L^2(\Gamma)$ e in $L^2(\Gamma_0)$
$\|\cdot\|_{1/2,\Gamma}$ e $\|\cdot\|_{1/2,\Gamma_0}$	norme in $H^{1/2}(\Gamma)$ e in $H^{1/2}(\Gamma_0)$
$\|\cdot\|_{-1/2,\Gamma}$	norma in $H^{-1/2}(\Gamma)$

Indice