La sbarretta nel corridoio "a elle"

Problema. *Si consideri un corridoio "a elle" i cui due rami hanno ampiezze a e b. Determinare la lunghezza massima di una sbarretta che si riesce a far passare dall'uno all'altro ramo del corridoio facendola strisciare sul pavimento.*

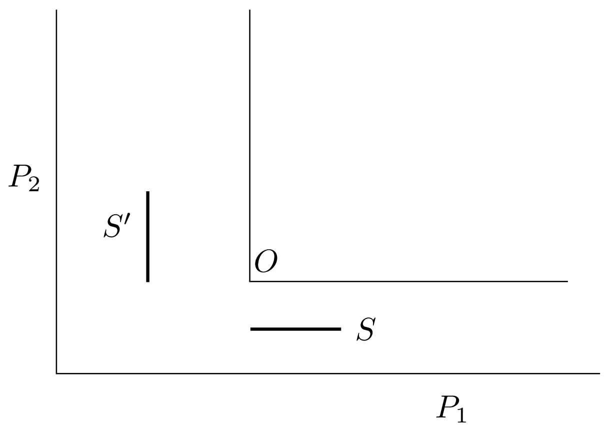
In queste pagine matematizziamo il problema che sopra è stato esposto in modo vago e lo risolviamo usando con precisione gli strumenti dell'Analisi matematica.

---

1. Il problema. Innanzi tutto descriviamo la geometria della situazione: il corridoio C, le pareti "esterne" P_1 e P_2, il vertice O dell'angolo "interno" e le posizioni S e S' iniziale e finale di una sbarretta che deve riuscire a girare l'angolo. Precisamente

$$
\begin{aligned}
&C = \Big([0,+\infty) \times [-a,0]\Big) \bigcup \Big([-b,0] \times [-a,+\infty)\Big) \\
&P_1 = [-b,+\infty) \times \{-a\} \quad \text{e} \quad P_2 = \{-b\} \times [-a,+\infty) \\
&S = [0,L] \times \{-a/2\}, \quad S' = \{-b/2\} \times [0,L].
\end{aligned}
$$

Come si vede, abbiamo scelto il riferimento (ascissa x_1 e ordinata x_2) in modo che O sia l'origine e che le pareti P_1 e P_2 siano contenute rispettivamente nelle rette "orizzontale" $x_2 = -a$ e "verticale" $x_1 = -b$ (virgolette d'obbligo, dato che nella realtà i due aggettivi hanno un altro significato). Il tutto è descritto nella figura:



Descriviamo il *moto ammissibile* di una sbarretta di lunghezza L attraverso il moto dei suoi estremi e precisiamo quest'ultimo. Esso è una funzione *continua* $t \mapsto (x(t), y(t))$ definita in un certo intervallo temporale $[0,T]$, a valori in $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ e verificante le condizioni seguenti:

$$|x(t) - y(t)| = L \quad \text{per ogni } t \in [0,T] \tag{1.1}$$

$$x(t) + s\big(y(t) - x(t)\big) \in C \quad \text{per ogni } t \in [0,T] \text{ e } s \in [0,1] \tag{1.2}$$

$$x(0) = (0, -a/2) \quad \text{e} \quad y(0) = (L, -a/2) \tag{1.3}$$

$$x(T) = (-b/2, L) \quad \text{e} \quad y(T) = (-b/2, 0) \tag{1.4}$$

$$y(t) - x(t) = L\big(\cos\vartheta(t), -\sin\vartheta(t)\big) \quad \text{e} \quad \vartheta(t) \in [0, \pi/2] \quad \text{per ogni } t \in [0,T]. \tag{1.5}$$

La condizione (1.1) dice che il segmento di estremi $x(t)$ e $y(t)$ ha lunghezza L; la (1.2) dice che tale segmento è incluso in C; le (1.3) e (1.4) assicurano che esso si trova nelle posizioni S e S' rispettivamente all'istante iniziale e all'istante finale e precisano la scelta dei due estremi fra le due possibili (x è l'estremo sinistro nella posizione S e l'estremo in alto nella posizione S'); infine la (1.5) significa che $-\vartheta(t)$ è una ammissibile seconda coordinata polare del punto $y(t)-x(t)$ e si sta imponendo che la sbarretta giri l'angolo nel modo più semplice possibile. Una formula esplicita per $\vartheta(t)$ si ottiene osservando che

$$\vartheta(t) \in [0,\pi/2] \subset [0,\pi] \quad \text{e} \quad \cos\vartheta(t) = \cos(-\vartheta(t)) = \frac{y_1(t)-x_1(t)}{L} \quad \text{da cui}$$

$$\vartheta(t) = \arccos\frac{y_1(t)-x_1(t)}{L} \quad \text{per ogni } t \in [0,T]. \tag{1.6}$$

La (1.6) mostra anche che ϑ è una funzione continua: infatti x, y e arccos sono funzioni continue. A questo punto possiamo dare la formulazione precisa del problema posto:

detto $\mathcal{L}$ l'insieme dei numeri reali $L>0$ tali che esista un moto ammissibile, dimostrare che $\mathcal{L}$ ha massimo e calcolare tale massimo. (1.7)

2. Risoluzione di un problema ausiliario. Si intuisce che la sbarretta di lunghezza massima esiste e che ogni suo moto ammissibile deve verificare quanto segue: in almeno un istante, la posizione della sbarretta deve essere un segmento passante per O con estremi sulle due pareti esterne P_1 e P_2. Ciascuno dei segmenti aventi estremi $\bar{x} \in P_1$ e $\bar{y} \in P_2$ è individuato dall'angolo $\varphi \in (0,\pi/2)$ che esso forma con le rette orizzontali e che può essere precisato come l'angolo opposto dell'unica seconda coordinata polare del punto $\bar{y}-\bar{x}$ che appartiene all'intervallo $(-\pi/2,0)$. Chiaramente, per ogni $\varphi \in (0,\pi/2)$, il segmento più lungo di inclinazione φ che riesce ad essere incluso in C è quello che passa per O e ha estremi sulle pareti P_1 e P_2 e la sua lunghezza è data dalla formula

$$\ell(\varphi) = \frac{a}{\cos\varphi} + \frac{b}{\sin\varphi} \quad \text{per } \varphi \in (0,\pi/2) \tag{2.1}$$

Conviene allora studiare la funzione $\varphi \mapsto \ell(\varphi)$, $\varphi \in (0,\pi/2)$. Essa è continua e verifica

$$\lim_{\varphi\to 0^+} \ell(\varphi) = \lim_{\varphi\to(\pi/2)^-} \ell(\varphi) = +\infty.$$

Dunque φ ha almeno un punto di minimo. Siccome ℓ è anche differenziabile, ogni punto di minimo deve verificare l'equazione $\ell'(\varphi)=0$. Essendo

$$\ell'(\varphi) = \frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi} - \frac{b\cos\varphi}{\sin^2\varphi} \quad \text{per } \varphi \in (0,\pi/2)$$

l'equazione $\ell'(\varphi)=0$ diventa

$$a\sin^3\varphi = b\cos^3\varphi, \quad \text{cioè} \quad \tan^3\varphi = \frac{b}{a}$$

e dunque ha una e una sola soluzione, il valore φ_0 dato da

$$\varphi_0 = \arctan\bigl((b/a)^{1/3}\bigr). \tag{2.2}$$

Segue che φ_0 è il punto di minimo cercato e che il valore minimo della funzione ℓ, che denotiamo con ℓ_0, è dato da

$$\begin{aligned}
\ell_0 = \ell(\varphi_0) &= \frac{a}{\cos\varphi_0} + \frac{b}{\sin\varphi_0} = a(1+\tan^2\varphi_0)^{1/2} + b(1+\tan^2\varphi_0)^{1/2}\,\frac{1}{\tan\varphi_0} \\
&= (1+\tan^2\varphi_0)^{1/2}\Bigl(a + \frac{b}{\tan\varphi_0}\Bigr) = \bigl(1+(b/a)^{2/3}\bigr)^{1/2}\Bigl(a + b\,(b/a)^{-1/3}\Bigr) \\
&= a^{-1/3}\bigl(a^{2/3}+b^{2/3}\bigr)^{1/2}\bigl(a + a^{1/3}b^{2/3}\bigr) \\
&= a^{-1/3}\bigl(a^{2/3}+b^{2/3}\bigr)^{1/2}a^{1/3}\bigl(a^{2/3}+b^{2/3}\bigr) = \bigl(a^{2/3}+b^{2/3}\bigr)^{3/2}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

3. Risoluzione del problema originario. Dimostriamo che il valore ℓ_0 dato dalla (2.3) è la soluzione del problema originario, cioè il massimo dell'insieme $\mathcal{L}$ dato dalla (1.7). Dobbiamo allora dimostrare che $\ell_0 \in \mathcal{L}$ e che ogni $L \in \mathcal{L}$ verifica $L \le \ell_0$.

Per dimostrare la prima tesi dobbiamo costruire un moto ammissibile nel caso $L = \ell_0$. Definiamo le due funzioni x e y pian piano. Inizialmente trasliamo la sbarretta verso l'alto fino ad appoggiarla alla parete interna orizzontale:

$$x(t) = (0, -a/2 + t/2) \quad \text{e} \quad y(t) = (L, -a/2 + t/2) \quad \text{per } t \in [0, T_1] \quad \text{ove} \quad T_1 = a,$$

per cui $x(T_1) = (0,0)$ e $y(T_1) = (L,0)$. Ora facciamo scorrere la sbarretta verso sinistra:

$$x(t) = (a - t, 0) \quad \text{e} \quad y(t) = (L + a - t, 0) \quad \text{per } t \in (T_1, T_2] \quad \text{ove} \quad T_2 = a + b.$$

Essendo $x(T_1^+) = (0,0)$ e $y(T_1^+) = (L,0)$, la funzione finora ottenuta è continua. Si noti che $x(T_2) = (-b, 0)$ e $y(T_2) = (L - b, 0)$, per cui il primo estremo della sbarretta si trova su P_2 e il secondo si trova ancora sulla sulla parete interna orizzontale dato che $L = \ell_0 > b$. A questo punto, proseguendo fino ad un instante T_3 che precisiamo fra un attimo, facciamo scorrere il primo estremo verso l'alto (ad esempio con velocità unitaria) lungo la parete P_2. Abbiamo dunque $x(t) = (-b, t - T_2)$. Ma durante il moto imponiamo che la sbarretta, necessariamente ruotando intorno ad O, continui a passare per O. Dunque $y(t) = k(t)x(t)$ con $k(t) < 0$ scelto in modo che $|x(t) - y(t)| = L$. A conti fatti $k(t) = 1 - (L/|x(t)|)$. Abbiamo pertanto

$$x(t) = (-b, t - T_2) \quad \text{e} \quad y(t) = \Bigl(1 - \frac{L}{|x(t)|}\Bigr)\,x(t) \quad \text{per } T_2 < t \le T_3 .$$

Scegliamo T_3 in modo che il secondo estremo sia in O all'istante T_3. Ciò avverrà quando $|x(t)| = L$, vale a dire all'istante $T_3 = T_2 + \sqrt{L^2 - b^2}$. Sono doverose alcune osservazioni. Essendo $L = \ell_0 > b$, la definizione di T_3 ha senso e fornisce un nuovo istante finale $T_3 > T_2$. Inoltre, essendo $L = \ell_0$ proprio il valore minimo della funzione ℓ data dalla (2.1), nell'ultimo intervallo di tempo il segmento di estremi $x(t)$ e $y(t)$ è sempre sottoinsieme di uno dei segmenti passanti per O e aventi estremi sulle due pareti P_1 e P_2, dunque sempre incluso in C. Infine anche il prolungamento costruito finora è continuo dato che è continuo anche in T_2. Ora l'intenzione è quella di ruotare la sbarretta intorno ad O finché questa non raggiungerà la posizione verticale, ad esempio dopo un tempo unitario. Per questo poniamo $T_4 = T_3 + 1$ e calcoliamo l'angolo associato alla posizione della sbarretta all'istante T_3, cioè l'angolo opposto $\bar{\vartheta}$ della seconda coordinata polare del vettore $y(T_3) - x(T_3)$. Si ha $\bar{\vartheta} = \arccos(b/L) \in (0, \pi/2)$ e possiamo proseguire nella costruzione del moto definendo per $T_3 < t \le T_4$

$$\begin{aligned}&\vartheta(t) = \bar{\vartheta} + (\tfrac{\pi}{2} - \bar{\vartheta})(t - T_3), \quad y(t) = (0,0) \quad \text{e}\\ &x(t) = -\big(y(t) - x(t)\big) = -L\big(\cos(-\vartheta(t)), \sin(-\vartheta(t))\big) = L\big(-\cos\vartheta(t), \sin\vartheta(t)\big).\end{aligned}$$

Si noti che la costruzione è stata fatta rispettando la (1.5). Inoltre le funzioni prolungate in tal modo sono continue in T_3 e, effettivamente, all'istante T_4 si è raggiunta la posizione verticale dato che $x(T_4) = (0, L)$ e $y(T_4) = (0,0)$. A questo punto la costruzione si può facilmente completare con un moto traslatorio:

$$x(t) = (T_4 - t, L) \quad \text{e} \quad y(t) = (T_4 - t, 0) \quad \text{per } T_4 < t \le T \quad \text{ove} \quad T = T_4 + (b/2).$$

La seconda tesi da dimostrare è che ogni elemento $L \in \mathcal{L}$ verifica $L \le \ell_0$. Per questo supponiamo che un certo $L > \ell_0$ appartenga a $\mathcal{L}$ e cerchiamo di arrivare a una contraddizione. Siccome $L \in \mathcal{L}$, esiste un moto ammissibile $t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [0, T]$, in accordo con le (1.1)–(1.5), e ϑ è una funzione continua. Essendo $\vartheta(0) = 0$, $\vartheta(T) = \pi/2$ e $\varphi_0 \in (0, \pi/2)$ (l'angolo dato dalla (2.2)), per il Teorema dei valori intermedi esiste $t_0 \in (0, T)$ tale che $\vartheta(t_0) = \varphi_0$. Allora il segmento di estremi $x(t_0)$ e $y(t_0)$ è incluso in C per la (1.2). D'altra parte, per definizione di φ_0 e di ℓ_0, vi è un segmento di lunghezza ℓ_0, pendenza φ_0, passante per O, con estremi sulle pareti P_1 e P_2. Essendo $L > \ell_0$, segue che nessun segmento avente lunghezza L, pendenza φ_0 e passante per O può essere incluso in C. A maggior ragione, nessun segmento avente lunghezza L e pendenza φ_0 (passante o meno per O) può essere incluso in C, e questa è una contraddizione.