Sull'area delle superfici

Come è noto, se una curva Γ di $\mathbb{R}^3$, o una superficie Σ di $\mathbb{R}^3$, è parametrizzata da una funzione regolare $f : K \to \mathbb{R}^3$, ove $K = [a,b]$ o, rispettivamente, un compatto misurabile di $\mathbb{R}^2$, la sua lunghezza, rispettivamente la sua area, può essere definita dalla formula

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{lungh}(\Gamma) = \int_a^b |f'(t)|\,dt, \quad \text{rispettivamente} \quad \operatorname{area}(\Sigma) = \int_K |D_1 f(t) \times D_2 f(t)|\,dt$$

ove $t = (t_1, t_2)$ e $D_i = \partial/\partial t_i$ nel secondo caso. Naturalmente, se si vuole attribuire un significato puramente geometrico alle parole curva e superficie (sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$), occorre che le relative parametrizzazioni verifichino opportune condizioni, soprattutto di tipo iniettività (nel caso generale, invece, si avrebbero i concetti di curva o superficie eventualmente ripiegata o riavvolta su se stessa).

D'altra parte, a una curva Γ possiamo associare poligonali inscritte e considerare le corrispondenti lunghezze. Precisamente, fissata la parametrizzazione f come sopra e considerata la generica suddivisione $\mathcal{S} = \{t_0, \ldots, t_n\}$ di $[a,b]$ (ove è inteso che valga la convenzione usuale sulle notazioni, cioè $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$), la poligonale $P(\mathcal{S})$ è la curva parametrizzata dalla funzione $f_{\mathcal{S}} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ che verifica le tre condizioni seguenti (che la individuano univocamente):

$f_{\mathcal{S}}$ è continua in $[a,b]$

$f_{\mathcal{S}}$ e f hanno lo stesso valore nei punti di suddivisione

la restrizione di $f_{\mathcal{S}}$ a ciascuno degli intervalli della suddivisione è una funzione affine

ove per "funzione affine" si intende una funzione le cui componenti siano polinomi di grado ≤ 1. La poligonale ottenuta è detta *inscritta* nella curva Γ in quanto i suoi vertici, cioè i punti $f_{\mathcal{S}}(t_i) = f(t_i)$, appartengono a Γ. Volendo, si può scrivere per $f_{\mathcal{S}}$ la formula esplicita seguente

$$f_{\mathcal{S}}(t) = f(t_{i-1}) + \frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\big(f(t_i) - f(t_{i-1})\big) \quad \text{per } t_{i-1} \leq t \leq t_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

ma ciò che più interessa è la lunghezza $\ell_{\mathcal{S}}$ della poligonale $P(\mathcal{S})$, data da

$$\ell_{\mathcal{S}} = \int_a^b |f'_{\mathcal{S}}(t)|\,dt = \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})|\,.$$

Ciò premesso, vale la formula (di dimostrazione non immediata ma non proibitiva)

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{lungh}(\Gamma) = \sup_{\mathcal{S}} \ell_{\mathcal{S}}$$

l'estremo superiore essendo preso al variare di $\mathcal{S}$ fra tutte le suddivisioni di $[a,b]$. Dunque la lunghezza della curva coincide con l'estremo superiore dell'insieme delle lunghezze delle sue poligonali inscritte. Anzi, ciò è spesso assunto come definizione di lunghessa di Γ.

Una procedura analoga, invece, non funziona nel caso delle superfici. Qui diamo il tentativo di estensione e un esempio. Con le notazioni già introdotte, supponiamo che il dominio K della parametrizzazione f sia di tipo poligonale. Il concetto di suddivisione va sostituito da quello di *triangolazione*, precisato come segue. Una triangolazione $\mathcal{T}$ di K è una famiglia finita $\{K_1, \ldots, K_n\}$ di triangoli chiusi verificante le condizioni seguenti: l'unione dei triangoli K_i di $\mathcal{T}$ è K e, se $i \neq j$, i due triangoli K_i e K_j o sono disgiunti oppure hanno in comune esattamente un vertice o un lato. Allora, data una triangolazione $\mathcal{T} = \{K_1, \ldots, K_n\}$ di K, le associamo la superficie poliedrica $P(\mathcal{T})$ (che è *inscritta* nella superficie Σ nel senso che i suoi vertici appartengono a Σ) definita dalla parametrizzazione $f_{\mathcal{T}} : K \to \mathbb{R}^3$ individuata dalle condizioni

$f_{\mathcal{T}}$ è continua in K

$f_{\mathcal{T}}$ e f hanno lo stesso valore nei vertici dei triangoli di $\mathcal{T}$

la restrizione di $f_{\mathcal{T}}$ a ciascuno dei triangoli di $\mathcal{T}$ è una funzione affine

con analogo significato del termine "affine". Anche in questo caso, la cosa che più interessa è l'area $A_{\mathcal{T}}$ di $P(\mathcal{T})$, data dalla formula

$$A_{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{area}[f(U_i), f(V_i), f(W_i)] \quad \text{ove } U_i, V_i, W_i \text{ sono i vertici del triangolo } K_i$$

con l'intesa (qui e nel seguito) che, per $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$, il simbolo $[X, Y, Z]$ denoti il triangolo (eventualmente degenere) che ha X, Y, Z come vertici. Ebbene accade quasi sempre che il valore $\sup_{\mathcal{T}} A_{\mathcal{T}}$, l'estremo superiore essendo preso al variare di $\mathcal{T}$ fra tutte le triangolazioni di K, non coincida con l'area di Σ e che, anzi, esso sia infinito. Né, in generale, si può sostituire la procedura di estremo superiore con un limite preso lungo una successione di triangolazioni che si raffinino progressivamente: il limite dipende dalla successione di triangolazioni considerate e solo imponendo condizioni opportune a tale successione esso viene a coincidere con l'area di Σ. Illustriamo questi fatti con l'esempio del cilindro

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = r^2, \ 0 \leq z \leq h\}$$

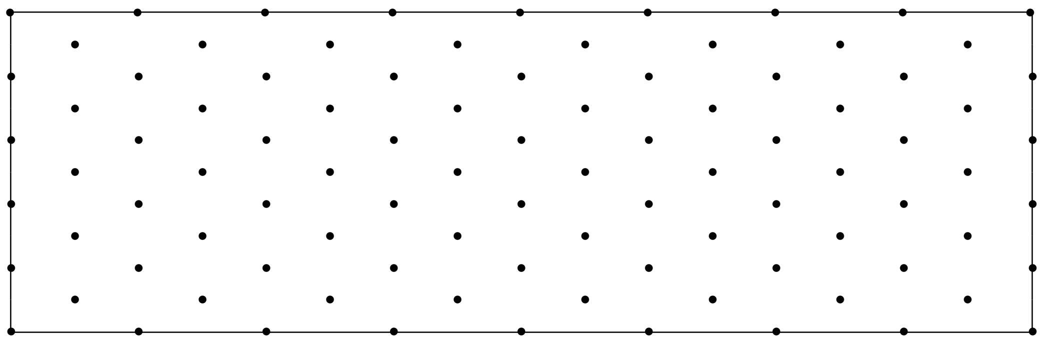
ove il raggio $r > 0$ e l'altezza $h > 0$ sono dati, la cui area vale $2\pi r h$. Come parametrizzazione prendiamo

$$f(\vartheta, z) = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, z), \quad (\vartheta, z) \in K = [0, 2\pi] \times [0, h]$$

e a ogni coppia (m, n) di interi positivi associamo una famiglia $\mathcal{T}_{m,n}$ di triangoli di K, che non è propriamente una triangolazione dato che non verifica la prima delle condizioni imposte dalla definizione: infatti l'unione dei triangoli non è K. Tuttavia essa differisce da K per un insieme "piccolo" e per non appesantire i calcoli evitiamo di chiudere i buchi lasciati dall'unione dei triangoli. Consideriamo i due triangoli di vertici

$$(0,0),\ (2\pi/n, 0) \text{ e } (\pi/n, h/m) \quad \text{e} \quad (2\pi/n, 0),\ (\pi/n, h/m) \text{ e } (3\pi/n, h/m)$$

e i triangoli T che si ottengono dai due precedenti mediante il gruppo di isometrie generato dalle traslazioni associate ai vettori $(2\pi/n, 0)$ e $(\pi/n, 2h/m)$ e dalla simmetria rispetto all'asse delle ascisse ϑ. Consideriamo infine la famiglia $\mathcal{T}_{m,n}$ costituita dai triangoli T detti che restano inclusi in K. Nella figura successiva sono disegnati i vertici della famiglia $\mathcal{T}_{8,5}$, che appunto non è una triangolazione in quanto non fanno parte di $\mathcal{T}_{8,5}$ i triangoli che avrebbero un lato su uno dei lati verticali di K.



Nel caso generale $\mathcal{T}_{m,n}$ è costituita da $m(2n-1)$ triangoli isometrici e la parametrizzazione f induce una superficie poliedrica $P_{m,n}$ inscritta in Σ costituita da altrettante facce, pure fra loro isometriche. Allora per calcolare la misura $A(m,n)$ che dobbiamo attribuire a $P_{m,n}$, cioè la somma delle aree delle facce, basta calcolare l'area di una di esse, la faccia F di vertici $A=f(0,0)$, $B=f(2\pi/n,0)$ e $C=f(\pi/n,h/m)$, che è un triangolo isoscele di base AB. Siano H il piede dell'altezza corrispondente e C' la proiezione ortogonale di C sul piano $z=0$. Si noti che $C'=f(\pi/n,0)$ sta sul cilindro, mentre H è il punto medio del segmento di estremi A e B. Dunque $C'\neq H$ e il triangolo di vertici C, H e C' è rettangolo in C'. Allora tutto può essere calcolato per via elementare. Detto $\alpha(m,n)$ l'angolo dei vettori $H-C$ e $C'-C$, abbiamo

$$\begin{aligned}\operatorname{area}(F) &= |H-A|\cdot|C'-C| = r\sin\frac{\pi}{n}\cdot\frac{h}{m}\,\frac{1}{\cos\alpha(m,n)}\\ A(m,n) &= m(2n-1)\cdot\operatorname{area}(F) = 2\pi rh\cdot\frac{n-1/2}{n}\cdot\frac{n}{\pi}\,\sin\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\cos\alpha(m,n)}\,.\end{aligned}$$

Osservato che il prodotto che precede il reciproco del coseno nell'ultima formula converge a $2\pi rh$, cioè all'area corretta della superficie cilindrica, per capire come vanno le cose occorre studiare il comportamento del coseno al tendere di m e n all'infinito. Abbiamo

$$\frac{1}{\cos\alpha(m,n)} = \sqrt{1+\tan^2\alpha(m,n)} \quad \text{e} \quad \tan\alpha(m,n) = \frac{|C'-H|}{|C'-C|} = \frac{r\bigl(1-\cos(\pi/n)\bigr)}{h/m}$$

e la formula di Taylor del coseno fornisce, per un opportuno $\tau_n\in(0,1)$, la rappresentazione

$$\tan\alpha(m,n) = \frac{mr}{h}\cdot\frac{1}{2}\,(\pi/n)^2\cos\frac{\tau_n\pi}{n} = \frac{\pi^2 r}{2h}\cdot\frac{m}{n^2}\cdot\cos\frac{\tau_n\pi}{n}\,.$$

Siccome $\cos(\tau_n\pi/n)$ tende a 1 per $n\to\infty$, vediamo che tutto dipende dal comportamento del rapporto m/n^2. Siccome possiamo, volendo, imporre che il suo limite sia un arbitrario

$\ell \in [0, +\infty]$, vediamo allora chiaramente, da un lato, che l'estremo superiore dell'insieme descritto da $A(m, n)$ al variare di m e n è $+\infty$ e, dall'altro, che, per ogni $\lambda \in [2\pi rh, +\infty]$, esistono successioni $\{m_k\}$ e $\{n_k\}$ divergenti tali che $\{A(m_k, n_k)\}$ tenda a λ. Inoltre, per avere l'area corretta $2\pi rh$ come limite, non basta imporre che $\{m_k\}$ e $\{n_k\}$ divergano, cioè che sia infintesima la successione dei diametri dei triangoli della triangolazione; occorre invece imporre che sia infinitesima la successione $\{m_k/n_k^2\}$. Si noti che questa condizione equivale al fatto che sia infinitesima la successione $\{\alpha(m_k, n_k)\}$ degli angoli, cioè che i triangoli inscritti in Σ così costruiti tendano ad adagiarsi sulla superficie stessa. Nella condizione estrema in cui la successione $\{m_k/n_k^2\}$ diverge i triangoli tendono a disporsi ortogonalmente rispetto a Σ. Concludiamo l'esempio con la formula corretta

$$\text{area}(\Sigma) = \liminf_{m,n\to\infty} A(m, n)$$

che suggerisce anche una congettura relativa a casi più generali.

Osserviamo infine che il fatto che tale "anomalia" non si verifichi nel caso delle curve è dovuto alla proprietà seguente: se la curva è regolare, ogni corda di lunghezza sufficientemente piccola ha una direzione necessariamente prossima alla tangenza (essenzialmente per il Teorema di Heine applicato a f' e al Teorema del valor medio di Lagrange applicato a ciascuna delle componenti di f; questa è infatti la strategia che porta alla dimostrazione della formula (2) per le lunghezze).

Vale però la pena di osservare che, più precisamente, la vera anomalia sta in realtà nelle curve e non nelle superfici: infatti, se si volesse estendere il discorso alla misura di oggetti k-dimensionali dello spazio $\mathbb{R}^N$ con $1 \leq k < N$, si vedrebbe che la situazione "anomala" della superficie cilindrica è di fatto la norma.