L'insieme di Cantor

****

Esso può essere definito molto velocemente come segue. Introduciamo le due omotetie $f_0, f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di rapporto $1/3$ e di centri 0 e 1, cioè le funzioni date dalle formule

$$f_0(x) = \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad f_1(x) = 1 - \frac{1-x}{3} = \frac{x+2}{3} \quad \text{per } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

e definiamo la successione approssimante $\{C_n\}$ e *l'insieme di Cantor* C ponendo

$$C_0 = [0,1], \quad C_{n+1} = f_0(C_n) \cup f_1(C_n) \quad \text{per } n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n\,. \tag{2}$$

L'insieme di Cantor gode di molte proprietà interessanti. Qui vediamo che

a) *C è chiuso*

b) *C ha misura nulla secondo Peano-Jordan*

c) *C non è numerabile.*

Si noti che la *b*) implica sia che C non ha punti interni, il che era intuitivamente ovvio, sia che la funzione caratteristica di C è integrabile secondo Riemann con integrale nullo.

La *a*) è immediata: infatti le funzioni f_0 e f_1 sono biiettive con inverse continue e C_0 è chiuso, da cui segue che sono chiusi tutti i C_n e, di conseguenza, anche C.

Verifichiamo ora la *b*). Ovviamente, $C \subseteq C_n$ per ogni n. Ora osserviamo che, per ogni intervallo $I \subseteq [0,1]$, le immagini $f_0(I)$ e $f_1(I)$ sono due intervalli di ampiezza $1/3$ di quella di I e inclusi in $[0,1/3]$ e in $[2/3,1]$ rispettivamente, dunque disgiunti. Si deduce che, per ogni n, l'insieme C_n è l'unione di 2^n di intervalli a due a due disgiunti e tutti di ampiezza 3^{-n}. Segue che la misura di C_n vale $2^n \cdot 3^{-n} = (2/3)^n$. Dunque, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un'unione finita di intervalli di misura complessiva $\leq \varepsilon$ (appunto C_n con n grande) che include C. Quindi, proprio per definizione, C ha misura nulla secondo Peano-Jordan.

La dimostrazione della *c*) è più laboriosa e ne diamo l'idea di base omettendo certi dettagli legati all'uso della rappresentazione ternaria (e successivamente anche di quella binaria) dei numeri reali. Rappresentiamo ogni $x \in [0,1]$ nella forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} \quad \text{con } c_k \in \{0,1,2\} \text{ per ogni } k\,. \tag{3}$$

Ora, mentre ogni successione $\{c_k\}$ nelle condizioni (3) definisce univocamente $x \in [0,1]$, dato $x \in [0,1]$, la successione $\{c_k\}$ che verifica la (3) esiste ma può non essere unica (idem con ogni altra scelta della base per la numerazione). Abbiamo ad esempio

$$3^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2 \cdot 3^{-k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \tag{4}$$

e $2/3$ si rappresenta anche con $c_1 = 2$ e $c_k = 0$ per ogni $k > 1$. Occorrerebbe scegliere fra le due possibili rappresentazioni (in questo caso e negli altri analoghi) oppure non considerare gli x con più di una rappresentazione. Noi, per semplificare, non facciamo nulla di tutto ciò, il che comporta che certi insiemi che vorremmo uguali di fatto siano diversi. Per questo usiamo il simbolo "$\approx$" in sostituzione di "$=$". Detto ciò, riprendiamo il discorso. Esaminiamo il complementare di C rispetto all'intervallo $C_0 = [0,1]$ di partenza, cioè ciò che viene tolto all'intervallo $[0,1]$ perché rimanga l'insieme di Cantor C. Al primo passo della costruzione, cioè al momento della costruzione di C_1, viene tolto l'insieme

$$A_1 = C_0 \setminus C_1 = (3^{-1}, 2 \cdot 3^{-1}) \approx \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} : \ c_k \in \{0,1,2\} \text{ per ogni } k \text{ e } c_1 = 1 \Big\}.$$

Notiamo che l'esempio (4) non era stato scelto a caso: infatti $2/3 = f_1(0) \in f_1(C_0) \subseteq C_1$ e dunque $2/3$ è proprio uno dei punti che non vengono tolti. Al secondo passo viene tolto

$$\begin{aligned} A_2 &= C_0 \setminus C_2 = A_1 \cup (3^{-2}, 2 \cdot 3^{-2}) \cup (6 \cdot 3^{-2}, 8 \cdot 3^{-2}) \\ &\approx \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} : \ c_k \in \{0,1,2\} \text{ per ogni } k, \ c_1 = 1 \text{ o } c_2 = 1 \Big\}. \end{aligned}$$

Al terzo passo vengono tolti, oltre ai numeri reali di $A_1 \cup A_2$, anche quelli che hanno una rappresentazione ternaria avente 1 al terzo posto. Proseguendo vediamo allora che

$$C_0 \setminus C \approx \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} : \ c_k \in \{0,1,2\} \text{ per ogni } k \text{ e } c_k = 1 \text{ per almeno un } k \Big\}.$$

Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned} C &\approx \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} : \ c_k \in \{0,1,2\}, \text{ per ogni } k \text{ e } c_k \neq 1 \text{ per ogni } k \Big\} \\ &= \Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} : \ c_k \in \{0,2\}, \text{ per ogni } k \Big\}. \end{aligned}$$

A questo punto possiamo costruire le (quasi ben definite: notare "$\approx$") applicazioni

$$\begin{aligned} C \xrightarrow{\approx} [0,1], \qquad & \sum_{k=1}^{\infty} c_k 3^{-k} \quad \text{con } c_k \in \{0,2\} \quad \xmapsto{\approx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2}\, 2^{-k} \\ [0,1] \xrightarrow{\approx} C, \qquad & \sum_{k=1}^{\infty} c'_k 2^{-k} \quad \text{con } c'_k \in \{0,1\} \quad \xmapsto{\approx} \sum_{k=1}^{\infty} (2c'_k) 3^{-k} \end{aligned}$$

osservando che $c_k \in \{0,2\}$ implica $c_k/2 \in \{0,1\}$ e che $c'_k \in \{0,1\}$ implica $2c'_k \in \{0,2\}$. Dunque, da un lato si riconosce la rappresentazione binaria degli elementi di $[0,1]$ e, d'altro canto, le due applicazioni appaiono come l'una inversa dell'altra. Riassumendo: se si mettono a posto i dettagli che non abbiamo sistemato, si viene a costruire un'applicazione ben definita e biiettiva da un'insieme vicino a C su un insieme vicino a $[0,1]$, ove "vicino" significa che la differenza fra l'insieme considerato e il suo sostituto, e viceversa scambiando il ruolo dei due insiemi, non è tale da influire sul calcolo della cardinalità. Segue che C e l'intervallo $[0,1]$ hanno la stessa cardinalità, quindi che C non è numerabile.