Spazi metrici e contrazioni: esempi

Gianni Gilardi

Queste pagine riguardano vari esempi di spazi metrici interessanti nella direzione dell'Analisi Funzionale e alcune applicazioni a problemi di Analisi Matematica del Teorema delle contrazioni. Fra le possibili, ne scegliamo due: la prima fornisce una possibile dimostrazione del Teorema del Dini sulle funzioni implicite, l'altra riguarda il problema di Cauchy per equazioni differenziali ordinarie e sue generalizzazioni. Concludiamo infine in una direzione completamente diversa, quella dei frattali autosimili, dando tuttavia solo un cenno, dato che una trattazione esauriente richiederebbe nozioni sofisticate di Teoria Geometrica della Misura.

Alcune citazioni sono contrassegnate con un numero romano: in tal caso esse si riferiscono al mio libro *Analisi Matematica di Base* e il numero romano indica il capitolo.

1. Cenni sugli spazi metrici

Ricordiamo la definizione di spazio metrico e accenniamo ai concetti che sono necessari per il seguito, lasciando a corsi specializzati lo sviluppo della teoria. Forniamo invece un numero adeguato di esempi importanti in Analisi Matematica, anche se non li useremo nel seguito.

1.1. Definizione. *Se X è un insieme non vuoto, una metrica in X è una funzione $d : X^2 \to \mathbb{R}$ non negativa e verificante, qualunque siano $x, y, z \in X$, le condizioni seguenti: i) $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$; ii) $d(x, y) = d(y, x)$; iii) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$. Uno spazio metrico è una coppia (X, d) costituita da un insieme X non vuoto e da una metrica d in X.* □

L'esempio guida è lo *spazio euclideo*, che si ottiene prendendo $X = \mathbb{R}^N$ e $d(x, y) = |x - y|$ per $x, y \in \mathbb{R}^N$. Anche nel caso astratto si usa allora la stessa terminologia: ad esempio $d(x, y)$ si chiama *distanza fra x e y* e l'ultima proprietà della definizione precedente si chiama *disuguaglianza triangolare*. Tuttavia, non si deve affatto pensare che un generico spazio metrico assomigli in qualche modo a uno spazio euclideo, e un primo esempio che mette in guardia è dato di seguito.

1.2. Esempio (spazi discreti). Sia X un sottoinsieme non vuoto. Si chiama *metrica discreta* in X la funzione $d : X^2 \to \mathbb{R}$ definita dalle formule $d(x, y) = 1$ se $x \ne y$ e $d(x, x) = 0$ per ogni x.

Effettivamente la funzione d introdotta sopra è una metrica e il controllo di ciò è del tutto immediato. Per costruirsi un'immagine mentale dello spazio metrico precedente occorre pensare X come completamente "sbriciolato".

Sebbene gli spazi metrici possano essere molto diversi fra loro, essi hanno in comune un certo numero di proprietà che discendono direttamente dalla definizione. Infatti si può introdurre in generale la nozione di *intorno* e da questa derivare tutte quelle collegate, quali le definizioni di *aperto* e di *chiuso*, quella di *chiusura* di un sottoinsieme, la *continuità* di funzioni fra due spazi metrici e la *convergenza* di successioni: basta infatti sostituire $d(x, y)$ a $|x - y|$ nelle definizioni del libro. Ciò nonostante, poco sotto formalizzeremo un paio di tali definizioni. Qui diamo solo il punto di partenza. La *palla* e la *palla chiusa* di centro x_0 e raggio $r > 0$ sono gli insiemi

$$B_r(x_0) = \{x \in X : \ d(x, x_0) < r\} \quad \text{e} \quad \overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : \ d(x, x_0) \le r\} \tag{1.1}$$

(ma la barra non significa chiusura: si pensi a X discreto e $r = 1$) e *intorno di x_0* è ogni sottoinsieme di X che include almeno una palla (o una palla chiusa) di centro x_0 e raggio positivo.

1.3. Esercizio. Sia (X, d) uno spazio metrico. Si dimostri che $|d(x, z) - d(y, z)| \le d(x, y)$ per ogni $x, y, z \in X$. Sia poi $A \subseteq X$ non vuoto e si definisca $\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ per $x \in X$. Si dimostri che $|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(y, A)| \le d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$. Si dimostri poi che la funzione $\operatorname{dist}(\,\cdot\,, A) : X \to \mathbb{R}$ è continua e che $d(x, A) = 0$ se e solo se x appartiene alla chiusura di A.

L'esempio successivo, secondo il quale ogni sottoinsieme (non vuoto) di uno spazio metrico è esso stesso uno spazio metrico in modo canonico, assicura che, in questo contesto più generale, non è mai restrittivo supporre che le funzioni in gioco siano definite in tutto lo spazio.

1.4. Esempio (metrica indotta su un sottoinsieme). Se (X, d) è uno spazio metrico e $X_0 \subseteq X$ è non vuoto, è uno spazio metrico anche la coppia (X_0, d_0), ove d_0 è la restrizione di d a X_0^2, vale a dire $d_0(x, y) = d(x, y)$ per ogni $x, y \in X_0$. In tal caso si parla di *metrica indotta* sul sottoinsieme e si dice che (X_0, d_0) è un *sottospazio* di (X, d).

1.5. Definizione. *Siano (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n\}$ una successione di elementi di X. Diciamo che $\{x_n\}$ converge all'elemento $x \in X$ quando $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$. Diciamo poi che $\{x_n\}$ converge quando esiste $x \in X$ tale che $\{x_n\}$ converga a x.* □

Se esplicitiamo la condizione $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ in accordo con la definizione nota nel caso delle successioni reali, abbiamo: *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m tale che per ogni $n \geq m$ risulti* $d(x_n, x) \leq \varepsilon$. Dunque la definizione del caso euclideo con $d(x_n, x)$ al posto di $|x_n - x|$.

Come nel caso degli spazi euclidei, si ha unicità del limite, e con la stessa dimostrazione data nel libro. Infatti, se $x' \neq x''$ e $\varepsilon < \frac{1}{2}\, d(x', x'')$ le palle (anche chiuse) di centri x' e x'' e raggio ε sono disgiunte, in quanto l'esistenza di un punto x appartenente alla loro intersezione porterebbe, per la disuguaglianza triangolare, alla conclusione contraddittoria $d(x', x'') \leq d(x', x) + d(x, x'') \leq 2\varepsilon$.

In riferimento alla Definizione 1.5, si parla di *convergenza indotta dalla metrica* e non è inutile osservare che scelte diverse della metrica possono indurre (anche se non sempre) diverse nozioni di convergenza.

1.6. Esercizio. Siano d e d' due metriche nello stesso insieme X e si supponga che esitano due costanti c_1, c_2 tali che $d(x, y) \leq c_1 d'(x, y)$ e $d'(x, y) \leq c_2 d(x, y)$ per ogni $x, y \in X$. Dimostrare che d e d' inducono la stessa nozione di convergenza. Dimostrare che la stessa conclusione vale, più in generale, se esistono due funzioni continue $\phi_1, \phi_2 : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ nulle in 0 e tali che $d(x, y) \leq \phi_1(d'(x, y))$ e $d'(x, y) \leq \phi_2(d(x, y))$ per ogni $x, y \in X$.

1.7. Esercizio. Si ponga $X = (-\pi/2, \pi/2)$ e $d(x, y) = |\tan x - \tan y|$ per $x, y \in X$. Si dimostri che d è una metrica e che d e la metrica euclidea inducono la stessa nozione di convergenza in X.

1.8. Esercizio. Caratterizzare le successioni convergenti di uno spazio discreto. Dedurre in particolare che la metrica euclidea e quella discreta inducono in $\mathbb{R}$ due nozioni diverse di convergenza.

1.9. Definizione. *Siano (X, d) e (X', d') due spazi metrici, $f : X \to X'$ e $x_0 \in X$. Diciamo che f è continua in x_0 quando, per ogni intorno I di $f(x_0)$ esiste un intorno J di x_0 tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in J$. Diciamo poi che f è continua quando essa è continua in ogni punto.* □

Anche in questo caso più generale si può dare una definizione in termini di ε e di δ (darla per esercizio e verificare l'equivalenza con la precedente) e vale la caratterizzazione: *f è continua in x_0 se e solo se, per ogni successione $\{x_n\}$ di elementi di X convergente a x_0, la successione $\{f(x_n)\}$ converge a $f(x_0)$*. Non solo, la dimostrazione resta formalmente identica a quella nota.

Si dà poi la definizione di limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ in modo formalmente identico e l'unicità del limite vale se x_0 è *un punto di accumulazione per X* (definizione formalmente identica).

1.10. Esercizio. Siano (X, d) e (X', d') due spazi metrici. Si dimostri che, se il primo spazio è discreto, tutte le funzioni $f : X \to X'$ sono continue.

Il concetto di successione di Cauchy, che diamo ora, è fondamentale per il seguito. Ancora non è inutile osservare che diverse scelte della metrica possono indurre (anche se non sempre) nozioni diverse di successione di Cauchy.

1.11. Definizione. *Siano (X, d) uno spazio metrico e $\{x_n\}$ una successione di elementi di X. Diciamo che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy quando, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice m tale che $d(x_n, x_{n'}) \le \varepsilon$ per ogni $n, n' \ge m$.* □

Si vede facilmente che ogni successione convergente è di Cauchy, mentre il viceversa non vale in generale. Si prenda infatti $X = \mathbb{Q}$ con la metrica euclidea: $d(x,y) = |x-y|$ per $x, y \in \mathbb{Q}$. Se $\{x_n\}$ è una successione di numeri razionali convergente in $\mathbb{R}$ a un numero irrazionale, allora $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in (X, d) che non converge in tale spazio. Ciò suggerisce la distinzione di spazi metrici particolari.

1.12. Definizione. *Uno spazio metrico (X, d) è detto completo quando ogni sua successione di Cauchy è convergente a un punto di X.* □

1.13. Osservazione. Se (X, d) e (X', d') sono due spazi metrici, un'applicazione $f : X \to X'$ biettiva si dice *isometria* (rispetto alle metriche dei due spazi) quando $d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$ per ogni $x, y \in X$. Ebbene, si vede immediatamente che, se esiste un'isometria fra i due spazi considerati, allora la completezza di uno dei due implica quella dell'altro.

Più in generale, la completezza si conserva se l'applicazione biettiva f verifica, anziché la condizione di isometria, le disuguaglianze $d'(f(x), f(y)) \le c_1\, d(x,y)$ e $d(x,y) \le c_2\, d'(f(x), f(y))$ per certe costanti c_1, c_2 e per ogni $x, y \in X$. In tali condizioni, infatti, le funzioni f e f^{-1} portano successioni di Cauchy in successioni di Cauchy e successioni convergenti in successioni convergenti. Ciò vale, in particolare, nel caso $X' = X$, nel quale le due metriche d e d' inducono la stessa nozione di convergenza e la stessa nozione di successione di Cauchy.

Al contrario, se due metriche in uno stesso insieme X inducono la stessa nozione di convergenza, non è detto che esse inducano la stessa nozione di successione di Cauchy. Se ciò effettivamente avviene, allora X è completo rispetto ad al più una di esse (si veda un esercizio successivo).

1.14. Esempio (spazi euclidei). La retta reale $\mathbb{R}$ con la metrica euclidea, cioè $d(x,y) = |x-y|$ per $x, y \in \mathbb{R}$, è uno spazio metrico completo. Infatti ogni successione di Cauchy converge per il Criterio di Cauchy VI.4.1.

Più in generale è completo lo spazio euclideo $\mathbb{R}^N$ con la metrica euclidea: basta infatti passare alle singole coordinate per ricondursi al caso precedente. Ancora $\mathbb{R}^N$ diventa uno spazio metrico completo se, fissato $p \in [1, +\infty)$, come metrica si prende

$$d_p(x,y) = \Bigl(\sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^p\Bigr)^{1/p} \quad \text{per } x, y \in \mathbb{R}^N. \tag{1.2}$$

Essa è effettivamente una metrica se $p \ge 1$, anche se la disuguaglianza triangolare (detta in questo caso di Minkowski e falsa se $p < 1$) è ovvia solo per $p = 1$ (ma già nota per $p = 2$, dato che d_2 è la metrica euclidea). La completezza viene dal fatto seguente: le nozioni di convergenza e di successione di Cauchy sono, per tutti i $p \ge 1$, quelle abituali, come segue dalle disuguaglianze

$$\max_{1 \le i \le N} |x_i - y_i| \le d_p(x,y) \le N^{1/p} \max_{1 \le i \le N} |x_i - y_i| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^N \text{ e } p \in [1, +\infty)$$

di facile verifica. Le stesse disuguaglianze e il Teorema VI.2.2 dei carabinieri implicano poi che

$$\lim_{p \to +\infty} d_p(x,y) = \max_{1 \le i \le N} |x_i - y_i| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^N \tag{1.3}$$

il che suggerisce la notazione $d_\infty(x,y)$ per il secondo membro della (1.3).

1.15. Esercizio. Si dimostri che $X = (-\pi/2, \pi/2)$ munito della metrica euclidea non è completo, mentre X è completo se munito della metrica d dell'Esercizio 1.7. Si verifica dunque la situazione prospettata alla fine dell'Osservazione 1.13.

1.16. Osservazione. Una categoria importante di spazi metrici è costituita dagli *spazi normati*. Questi, al contrario del generico spazio metrico, hanno, accanto alla struttura metrica, una struttura di spazio vettoriale reale o complesso, che è compatibile con l'altra nel senso seguente: qualunque siano i vettori x, y, z e lo scalare c, risulta

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \qquad \text{e} \qquad d(cx, cy) = |c| d(x,y). \tag{1.4}$$

In tal caso, la funzione non negativa $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $\|x\| = d(x,0)$ si chiama *norma* e gode, sempre qualunque siano i vettori e lo scalare coinvolti, delle proprietà seguenti:

$$\|x\| = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = 0, \qquad \|cx\| = |c|\,\|x\| \quad \text{e} \quad \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|. \tag{1.5}$$

Più comunemente, tuttavia, si parte dalle proprietà (1.5) della norma e si introduce la metrica mediante la formula $d(x,y) = \|x-y\|$. Tale metrica è detta *indotta dalla norma*. Segnaliamo che gli spazi normati completi sono detti *spazi di Banach*.

Notiamo che tutte le metriche (1.2) sono associate a norme (per cui $\mathbb{R}^N$ munito di una qualunque di tali metriche è uno spazio di Banach) e che anche molti degli spazi metrici che seguono (ma non tutti) sono in realtà spazi normati. Quelli completi sono, dunque, spazi di Banach.

Vale la pena di osservare un'ultima cosa. Se su X è data una struttura di spazio normato e C è un sottoinsieme di X, allora C ha la struttura indotta di spazio metrico (Esempio 1.4) ma non necessariamente di spazio normato: perché ciò avvenga occorre che C sia un sottospazio vettoriale.

1.17. Esercizio. Dimostrare che le proprietà della Definizione 1.1 e le (1.4) implicano le (1.5) e che, costruita d' mediante $d'(x,y) = \|x-y\|$, si riottiene la metrica d di partenza. Dimostrare poi che, viceversa, data una norma, cioè una funzione reale non negativa verificante le (1.5), e costruita la funzione d mediante $d(x,y) = \|x-y\|$, si ottiene effettivamente una metrica, che tale metrica verifica le (1.4) e che, costruita $\|\cdot\|'$ mediante $\|x\|' = d(x,0)$, si riottiene la norma $\|\cdot\|$ di partenza.

1.18. Esempio (spazio delle funzioni limitate). Sia A un insieme non vuoto e si denoti con $\mathcal{B}(A)$ l'insieme delle funzioni $u : A \to \mathbb{R}$ limitate. Per $u, v \in \mathcal{B}(A)$ si ponga poi

$$d_\infty(x,y) = \sup_{x \in A} |u(x) - v(x)|. \tag{1.6}$$

Allora $(\mathcal{B}(A), d_\infty)$ è uno spazio metrico completo, come ora vediamo. Notiamo che la metrica data dalla (1.6) si chiama *metrica del massimo* e che la nozione di convergenza da essa indotta in base alla Definizione 1.5 è la *convergenza uniforme in* A. La notazione $\mathcal{B}$ viene dall'inglese *bounded*, cioè *limitato*. La notazione d_∞ ha pure la sua motivazione, legata a una generalizzazione della (1.3).

Le proprietà della metrica si controllano facilmente, per cui passiamo alla completezza. Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy. Allora, per ogni $x \in A$, la successione reale $\{u_n(x)\}$ è pure di Cauchy, dunque convergente. Detto $u(x)$ il suo limite, resta definita la funzione $u : A \to \mathbb{R}$, che è la candidata limite di $\{u_n\}$. Dovremmo allora verificare che $u \in \mathcal{B}(A)$ e che la successione numerica $\{d_\infty(u_n, u)\}$ è infinitesima, cioè che $\{u_n\}$ converge a u uniformente, e basta fare questa verifica grazie al Teorema X.2.3. Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$ e cerchiamo m tale che per ogni $n \ge m$ e per ogni $x \in A$ risulti $|u_n(x) - u(x)| \le \varepsilon$. Prendiamo come m l'indice dato dalla condizione di Cauchy, cioè quello verificante $|u_n(x) - u_{n'}(x)| \le \varepsilon$ per ogni $n, n' \ge m$ e per ogni $x \in A$. Se ora $n \ge m$, possiamo far tendere n' all'infinito nell'ultima disuguaglianza e ottenere quella voluta. In modo del tutto analogo si introduce lo spazio $\mathcal{B}(A; \mathbb{R}^N)$ delle funzioni da A in $\mathbb{R}^N$ limitate. Anche questo è completo rispetto alla sua metrica naturale. Questi spazi sono di Banach.

Diamo ora un risultato di carattere generale sulla completezza dei sottospazi, che fa intervenire la condizione di chiusura. Per maggior chiarezza ricordiamo una possibile definizione di chiuso: *un sottoinsieme C di uno spazio metrico X è chiuso quando, per ogni $x \in X \setminus C$, esiste un intorno di x disgiunto da C*. Anche in questo contesto più generale vale il risultato seguente (con stessa dimostrazione della Proposizione VI.1.4):

1.19. Proposizione. *Sia (X,d) uno spazio metrico. Un sottoinsieme C di X è chiuso se e solo se vale la condizione seguente: se $\{x_n\}$ è una successione di elementi di C convergente, anche il suo limite appartiene a C.* □

1.20. Proposizione. *Siano (X,d) uno spazio metrico completo e C un sottoinsieme non vuoto di X. Allora C esso è completo rispetto alla metrica d' indotta da d su C se e solo se esso è un sottoinsieme chiuso di X.* □

Dimostrazione. Supponiamo C chiuso e dimostriamo che (C,d') è completo. Sia dunque $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in (C,d'). Allora $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy in (X,d), dunque convergente. Detto $x \in X$ il suo limite, siccome C è chiuso, si ha $x \in C$. Infine la successione $\{d'(x_n,x)\}$, coincidendo con $\{d(x_n,x)\}$, è infinitesima. Ciò mostra che $\{x_n\}$ converge a x in (C,d').

Supponiamo ora (C,d') completo e dimostriamo che C è un chiuso. Siano dunque $\{x_n\}$ una successione di elementi di C convergente nello spazio metrico (X,d) e $x \in X$ il suo limite. Dobbiamo dimostrare che $x \in C$. Ma $\{x_n\}$ è di Cauchy in (X,d), dunque di Cauchy in (C,d'), dunque convergente in (C,d') a un certo elemento $y \in C$. Deduciamo che $\{x_n\}$ converge a y anche nel senso dello spazio (X,d) e, per l'unicità del limite, concludiamo che $x = y \in C$. □

1.21. Esempio (spazio delle funzioni continue limitate). Sia A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^N$ e si denoti con $C^0(A)$ l'insieme delle funzioni $u : A \to \mathbb{R}$ continue e con $C^0_b(A)$ l'insieme delle funzioni $u : A \to \mathbb{R}$ continue limitate. Naturalmente, se A è compatto, la limitatezza è conseguenza della continuità, cioè si ha che $C^0_b(A) = C^0(A)$. Con modifiche banali si introducono poi gli analoghi spazi di funzioni a valori vettoriali, ma, per semplicità, noi ci limitiamo agli spazi di funzioni a valori scalari e, anzi, al solo spazio $C^0_b(A)$, che è un sottoinsieme di $\mathcal{B}(A)$ e viene munito della metrica indotta dalla (1.6). Anche questo spazio metrico è completo, proprio grazie alla Proposizione 1.20: infatti esso è chiuso in $\mathcal{B}(A)$ per il Teorema X.2.4. Lo spazio $C^0_b(A)$, essendo anche sottospazio vettoriale di $\mathcal{B}(A)$, è un altro esempio di spazio di Banach.

1.22. Esercizio. Con le notazioni dell'esempio precedente, si consideri l'insieme $C^0_{ub}(A)$ costituito dalle funzioni $u \in C^0_b(A)$ che sono anche uniformemente continue. Si dimostri che questo è un chiuso di $C^0_b(A)$. Ancora, dunque, otteniamo uno spazio di Banach.

1.23. Osservazione. Se $A = [0,1]$ scriviamo semplicemente $C^0[0,1]$ e abbiamo uno spazio completo rispetto alla metrica del massimo. Consideriamo ora il suo sottoinsieme $C^1[0,1]$, costituito dalle funzioni $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Questo non è chiuso. Infatti, ad esempio, la successione $\{u_n\}$ definita dalla formula $u_n(x) = \sqrt{x + (1/n)}$ è costituita da funzioni addirittura di classe C^∞, converge uniformemente alla funzione u data da $u(x) = \sqrt{x}$ (dato che $d_\infty(u_n,u) = 1/\sqrt{n}$ con la notazione (1.6)) e u non è di classe C^1. In generale, infatti, la convergenza uniforme non conserva al limite proprietà di regolarità oltre la continuità. In particolare $C^1[0,1]$ non è completo rispetto alla metrica del massimo per la Proposizione 1.20. Esso è invece completo rispetto ad un'altra metrica, come mostra l'esempio successivo.

Osserviamo anche quanto segue. Mentre ogni sottospazio vettoriale dello spazio euclideo $\mathbb{R}^N$ è chiuso, $C^1[0,1]$ non è un sottospazio chiuso di $C^0[0,1]$. In questo fatto gioca la dimensione infinita di $C^1[0,1]$: le funzioni u_n considerate sopra sono infatti linearmente indipendenti.

1.24. Esempio (spazi di funzioni regolari). Se Ω è un aperto (non vuoto) di $\mathbb{R}^N$, con $C^1(\Omega)$ si denota l'insieme delle funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Analogamente si può introdurre lo spazio $C^1(\Omega : \mathbb{R}^m)$ delle funzioni di classe C^1 a valori in $\mathbb{R}^m$. Tuttavia, metriche che rendono tali spazi completi hanno espressioni molto complesse (già queste complicazioni si riscontrerebbero per quanto riguarda $C^0(\Omega)$, e a questo proposito si veda un esempio successivo, di livello decisamente superiore), per cui preferiamo considerare alcuni loro sottospazi, limitandoci per semplicità al caso delle funzioni a valori reali. Il primo di essi è costituito dalle funzioni $u \in C^1(\Omega)$ che sono limitate insieme con le loro derivate parziali. Lo denotiamo con $C^1_b(\Omega)$ e lo muniamo della metrica seguente:

$$d^{(1)}(u,v) = d_\infty(u,v) + \sum_{i=1}^N d_\infty(D_i u, D_i v) \tag{1.7}$$

ove d_∞ è data dalla (1.6) e D_i è il simbolo di derivazione parziale. Questo è uno spazio metrico completo, come vediamo tra breve. Il secondo, che denotiamo con $C^1(\overline{\Omega})$ e che consideriamo per semplicità solo nel caso in cui l'aperto Ω sia limitato, è costituito dalle funzioni $u \in C^1(\Omega)$ che verificano la condizione seguente: u e ciascuna delle derivate parziali prime ha un prolungamento continuo definito in $\overline{\Omega}$. Questo è un sottospazio di $C^1_b(\Omega)$ e risulta completo rispetto alla metrica indotta dalla (1.7). Limitiamoci a controllare la completezza di $C^1_b(\Omega)$ rispetto alla (1.7), che è immediata. Se infatti $\{u_n\}$ è una successione di Cauchy, allora sono successioni di Cauchy nello spazio $C^0_b(\Omega)$ munito della metrica del massimo sia la stessa $\{u_n\}$, sia le successioni $\{D_i u_n\}$, $i = 1, \dots, N$. Siccome quello spazio è completo e la sua metrica induce la convergenza uniforme, tali successioni convergono uniformemente ad altrettanti funzioni continue e limitate u e $u^{(i)}$, $i = 1, \dots, N$. Allora, grazie al Teorema X.2.9, u è di classe C^1 e $u^{(i)} = D_i u$ per $i = 1, \dots, N$. Dunque $u \in C^1_b(\Omega)$ ed è immediato controllare che u è il limite della successione data nel senso della metrica considerata. Ancora abbiamo uno spazio di Banach.

Più in generale, se k è un intero positivo, si possono definire $C^k_b(\Omega)$ e $C^k(\overline{\Omega})$ richiedendo la regolarità C^k e la limitatezza, rispettivamente l'esistenza del prolungamento continuo in $\overline{\Omega}$, a tutte le derivate parziali fino all'ordine k. Questi sono spazi metrici completi (anzi spazi di Banach) rispetto alla metrica che si ottiene generalizzando la (1.7) mediante la somma estesa a tutte le derivazioni parziali fino all'ordine k, l'unica complicazione aggiuntiva essendo quella delle notazioni. Se non vogliamo appesantire, possiamo semplicemente scrivere

$$d^{(k)}(u,v) = \sum_{0 \le \operatorname{ord} D \le k} d_\infty(Du, Dv) \tag{1.8}$$

ove con D denotiamo il generico simbolo di derivazione parziale e con $\operatorname{ord} D$ il suo ordine.

Notiamo che vi è un'altra definizione di $C^k(\overline{\Omega})$: si richiede alla funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$ di possedere un prolungamento di classe C^k definito in tutto $\mathbb{R}^N$. Tuttavia ciò che si ottiene procedendo in tal modo non coincide necessariamente con lo spazio introdotto sopra, a meno che Ω non verifichi qualche proprietà di regolarità della sua frontiera. Nel caso di un aperto arbitrario si ottiene un sottoinsieme chiuso del precedente, dunque uno spazio completo rispetto alla metrica indotta.

1.25. Esercizio. Siano $(X_1, d_1), \dots, (X_m, d_m)$ spazi metrici e X il prodotto cartesiano degli insiemi $X_1, \dots, X_m$ e si definisca

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^m d_i(x_i, y_i) \quad \text{per ogni } x = (x_1, \dots, x_m),\ y = (y_1, \dots, y_m) \in X .$$

Si dimostri che d è una metrica in X. Si dimostri poi che (X,d) è completo se e solo se tutti gli spazi (X_i, d_i) sono completi.

1.26. Esercizio. Si considerino gli spazi $X_0 = C_b^0(\Omega)$ e $X_1 = C_b^1(\Omega)$ degli Esempi 1.21 e 1.24, ove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$. Si costruisca il prodotto $X = X_0^{N+1}$ di $N+1$ copie di X_0, munito della metrica definita nell'Esercizio 1.25, e si consideri il suo sottospazio Y costituito dagli elementi $(u, u_1, \ldots, u_N) \in X$ tali che u è di classe C^1 e $u_i = D_i u$ per $i = 1, \ldots, N$. Si definisca infine $F : X_1 \to Y$ ponendo $F(u) = (u, D_1 u, \ldots, D_n u)$ per $u \in X$. Si dimostri che F è un'isometria. Si ridimostri che X_1 è completo dimostrando che Y è chiuso in X.

1.27. Esempio (spazi di funzioni hölderiane). Siano A un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}^N$ e $\alpha \in (0,1]$. Conviene assumere una notazione breve e comoda. Poniamo $A^* = \{(x,y) \in A^2 : \ x \neq y\}$ e a ogni funzione $u : A \to \mathbb{R}$ (ma il caso dei valori vettoriali è analogo) associamo la funzione $u^{(\alpha)} : A^* \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $u^{(\alpha)}(x,y) = |x-y|^{-\alpha}\bigl(u(x) - u(y)\bigr)$. Diciamo allora che u è α-hölderiana, oppure hölderiana di esponente α, quando $u^{(\alpha)} \in \mathcal{B}(A^*)$, cioè quando $u^{(\alpha)}$ è limitata, e che u è lipschitzianiana quando è 1-hölderiana. Allora u è α-hölderiana se e solo se esiste una costante L tale che $|u(x) - u(y)| \le L|x-y|^\alpha$ per ogni $x, y \in A$ e la più piccola di tali costanti è data, per definizione di estremo superiore, da $L = \sup_{(x,y)\in A^*} |u^{(\alpha)}(x,y)|$. L'esempio più semplice si ottiene prendendo $\alpha \in (0,1)$, $A = [0,1]$ e $u(x) = x^\alpha$. Tale funzione è α-hölderiana, anzi α'-hölderiana se e solo se $\alpha' \le \alpha$. Le funzioni hölderiane sono continue (anzi uniformemente continue) ma non necessariamente limitate (lo sono se A è limitato). Se dunque non vogliamo fare ipotesi su A e contemporaneamente non avere complicazioni, imponiamo anche la limitatezza e limitiamoci a considerare solo funzioni hölderiane limitate. Poniamo

$$C_b^{0,\alpha}(A) = \{u \in \mathcal{B}(A) : \ u^{(\alpha)} \in \mathcal{B}(A^*)\} \tag{1.9}$$

e abbiamo $C_b^{0,\alpha}(A) \subseteq C_b^0(A)$. Ciò nonostante, $C_b^{0,\alpha}(A)$ non è un sottoinsieme chiuso dello spazio metrico $C_b^0(A)$ munito della metrica del massimo, come mostrano esempi analoghi a quello dell'Osservazione 1.23 (che funziona a questo scopo solo se $\alpha \in (1/2, 1]$). Dunque, se muniamo $C_b^{0,\alpha}(A)$ della metrica del massimo, non otteniamo uno spazio completo. Lo spazio $C_b^{0,\alpha}(A)$ è invece completo rispetto alla metrica definita da

$$d(u,v) = \sup_{x\in A} |u(x) - u(y)| + \sup_{(x,y)\in A^*} |(u-v)^{(\alpha)}(x,y)| \tag{1.10}$$

come ora mostriamo. Sia $\{u_n\}$ una successione di Cauchy. Allora sono di Cauchy le successioni $\{u_n\}$ e $\{u_n^{(\alpha)}\}$, rispettivamente negli spazi $\mathcal{B}(A)$ e $\mathcal{B}(A^*)$ (per quanto riguarda la seconda si osservi che $u^{(\alpha)} - v^{(\alpha)} = (u-v)^{(\alpha)}$). Per la completezza di questi, le due successioni considerate convergono a due funzioni $u \in \mathcal{B}(A)$ e $u^* \in \mathcal{B}(A^*)$ rispetto alle metriche degli spazi stessi, cioè uniformemente in A e in A^* rispettivamente. Siccome la convergenza uniforme implica quella puntuale, si deduce subito che $u^* = u^{(\alpha)}$, da cui $u \in C_b^{0,\alpha}(A)$, e si vede senza difficoltà che la successione data converge a u rispetto alla metrica (1.10). Anche in questo caso si tratta di uno spazio di Banach.

1.28. Esercizio. Sia $C_b^{1,\alpha}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni hölderiane limitate con le loro derivate prime. Definire in esso una metrica che lo rende completo. Generalizzare al caso di $C_b^{k,\alpha}(\Omega)$.

1.29. Esempio (funzioni continue nell'aperto). Siano Ω un aperto non vuoto di $\mathbb{R}^N$ e $\{K_n\}$ una successione non decrescente di compatti inclusi in Ω verificanti la condizione seguente: per ogni compatto $K \subset \Omega$ esiste n tale che $K_n \supseteq K$ (dare la costruzione di una tale successione nel caso di un aperto qualunque: si consiglia di usare la distanza dist dell'Esercizio 1.3). Definiamo

$$d(u,v) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \tanh\Bigl(\sup_{x\in K_n} |u(x) - v(x)|\Bigr) \quad \text{per } u, v \in C^0(\Omega). \tag{1.11}$$

Osservato che gli estremi superiori sono finiti per il Teorema VI.3.5 di Weierstrass e che la serie converge (tanh è una funzione limitata), si controlla che d è effettivamente una metrica, l'unica difficoltà essendo la disuguaglianza triangolare, per la quale si possono usare le proprietà seguenti

$$\tanh \text{ è non decrescente} \quad \text{e} \quad \tanh(r+s) \le \tanh r + \tanh s \quad \text{per ogni } r, s \ge 0. \tag{1.12}$$

Ben più complesso è il controllo della completezza. Sia $\{u_i\}$ una successione di Cauchy. Verifichiamo che, per ogni n, è di Cauchy in $C^0(K_n)$ la successione delle restrizioni $\{u_i|_{K_n}\}$. Fissati infatti n e $\varepsilon > 0$ ad arbitrio e scelto m tale che $d(u_i, u_j) \le 2^{-n} \tanh \varepsilon$ per ogni $i, j \ge m$, per tali i, j risulta $2^{-n} \tanh(\sup_{x \in K_n} |u_i(x) - u_j(x)|) \le 2^{-n} \tanh \varepsilon$, da cui $\sup_{x \in K_n} |u_i(x) - u_j(x)| \le \varepsilon$. Dunque, per la completezza dello spazio $C^0(K_n)$ rispetto alla metrica del massimo, la successione delle restrizioni converge uniformemente in K_n a una certa funzione u^n. Siccome la convergenza uniforme implica quella puntuale e $K_n \subseteq K_{n+1}$ per ogni n, segue che $u^{n+1}|_{K_n} = u^n$ per ogni n, per cui le funzioni u^n sono tutte restrizioni di una stessa funzione $u : \Omega \to \mathbb{R}$, che la candidata limite della successione data. Ora u è continua. Fissato infatti $x_0 \in \Omega$ e scelti una palla chiusa $B = \overline{B}_r(x_0) \subset \Omega$ e n tale che $K_n \supseteq B$, si ha $u|_B = u^n|_B$ e u^n è continua in B. Dimostriamo infine che $\lim_{i\to\infty} d(u_i, u) = 0$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia m' tale che $\sum_{n>m'} 2^{-n} \le \varepsilon$ e, per $n = 1, \dots, m'$, sia m_n tale che $\sup_{x \in K_n} |u_i(x) - u(x)| \le \varepsilon/m'$ per ogni $i \ge m_n$. Detto m il massimo fra tutti gli interi $m', m_1, \dots, m_{m'}$ e osservato che $\tanh r \le r$ e $\tanh r \le 1$ per ogni $r \ge 0$ e che $2^{-n} \le 1$ per ogni n, abbiamo per ogni $i \ge m$ (e quindi concludiamo la dimostrazione)

$$d(u_i, u) \le \sum_{n>m'} 2^{-n} + \sum_{n=1}^{m'} \sup_{x \in K_n} |u_i(x) - u(x)| \le \varepsilon + \sum_{n=1}^{m'} \frac{\varepsilon}{m'} = 2\varepsilon.$$

Si impone tuttavia un commento. La metrica (1.11) dipende da ingredienti aggiuntivi che abbiamo scelto arbitrariamente. Questi sono la successione $\{K_n\}$ di compatti, la serie geometrica $\sum 2^{-n}$ e la funzione tanh, e avremmo potuto operare altre scelte, ricorrendo ad esempio a una funzione ϕ diversa da tanh. Ebbene, tutto quanto si ripete (eventualmente con qualche fattore moltiplicativo noto a priori) con altre scelte altrettanto legittime, purché valgano proprietà analoghe. Segnaliamo che l'analoga della seconda delle (1.12) è vera per ogni funzione continua $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ nulla in 0 e concava. Inoltre scelte diverse di tali ingredienti aggiuntivi portano alla stessa nozione di convergenza, che è la seguente: $\{u_i\}$ converge a u se e solo se, per ogni compatto $K \subset \Omega$, la successione $\{u_i|_K\}$ delle restrizioni converge uniformemente in K alla restrizione $u|_K$. Si parla di *convergenza uniforme sui compatti di* Ω o anche di *convergenza localmente uniforme in* Ω.

Vale la pena di notare che $C^0(\Omega)$, sebbene sia anche spazio vettoriale, *non* è uno spazio di Banach. Infatti la metrica (1.11) non gode della seconda delle proprietà (1.4). In modo più deciso, non esiste alcuna metrica verificante le (1.4) che induca la convergenza localmente uniforme.

1.30. Esercizio. Si considerino i sottoinsiemi $C^0_b(\Omega)$, $C^0_u(\Omega)$ e $C^0_{ub}(\Omega)$ costituiti dalle funzioni continue che sono anche rispettivamente limitate, uniformemente continue, uniformemente continue e limitate (vedi Esercizio 1.22). Nel caso $\Omega = \mathbb{R}$ si dimostri che nessuno di questi è chiuso nello spazio metrico $C^0(\Omega)$ dell'esempio precedente. Si cerchi poi di dimostrare che, per ogni aperto Ω e per ogni $u \in C^0(\Omega)$, esiste una successione $\{u_n\}$ di elementi di $C^0_{ub}(\Omega)$ convergente a u localmente uniformemente, cioè nel senso della metrica (1.11).

1.31. Esempio (spazi di funzioni regolari nell'aperto). Viste le complicazioni dell'esempio precedente, ci limitiamo a dare qualche dettaglio solo nel caso dello spazio $C^\infty(\mathbb{R})$. Poniamo

$$d(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \tanh\Big(\sup_{|x| \le n} |u^{(n)}(x) - v^{(n)}(x)| \Big) \quad \text{per } u, v \in C^\infty(\mathbb{R}) \tag{1.13}$$

osservando che, anche in questo caso, la definizione ha senso e fornisce una metrica. Per quanto riguarda la completezza, diamo solo una traccia. Sia $\{u_i\}$ una successione di Cauchy. Allora, per ogni n fissato, è di Cauchy nello spazio $C^n[-n,n]$ la successione $\{u_i|_{[-n,n]}\}$ delle restrizioni.

A questo proposito notiamo che, ad esempio con $n=3$, abbiamo, apparentemente, informazioni solo sulle quantità seguenti

$$|u_{i'}(0)-u_{i''}(0)|, \quad \sup_{|x|\le 1}|u'_{i'}(x)-u'_{i''}(x)|, \quad \sup_{|x|\le 2}|u''_{i'}(x)-u''_{i''}(x)| \quad \text{e} \quad \sup_{|x|\le 3}|u'''_{i'}(x)-u'''_{i''}(x)|.$$

In realtà, usando il Teorema fondamentale del calcolo, si stimano, l'una dopo l'altra e in funzione delle precedenti, anche queste altre

$$\sup_{|x|\le 3}|u''_{i'}(x)-u''_{i''}(x)|, \quad \sup_{|x|\le 3}|u'_{i'}(x)-u'_{i''}(x)| \quad \text{e} \quad \sup_{|x|\le 3}|u_{i'}(x)-u_{i''}(x)|.$$

Dunque si vede che la successione $\{u_i|_{[-3,3]}\}$ è effettivamente di Cauchy nello spazio $C^3[-3,3]$.

Per la completezza dello spazio $C^n[-n,n]$, la successione delle restrizioni considerate converge nel senso corrispondente a una funzione di $C^n[-n,n]$ che denotiamo con $u_{[n]}$ per evitare confusioni. Per ogni n e per $j=0,\dots,n$, abbiamo cioè che la successione delle derivate j-esime $u_i^{(j)}|_{[-n,n]}$ converge alla derivata j-esima $u_{[n]}^{(j)}$ di $u_{[n]}$ uniformemente in $[-n,n]$ per $i\to\infty$. Anche in questo caso le funzioni $u_{[n]}$ sono tutte restrizioni di una stessa funzione $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Tale u è di classe C^∞ ed è il limite della successione data rispetto alla metrica considerata.

La convergenza di $\{u_i\}$ a u in tale metrica significa quanto segue: per ogni $j\ge 0$ la successione $\{u_i^{(j)}\}$ converge a $u^{(j)}$ per $i\to\infty$ uniformemente su ogni intervallo limitato. Si noti che in questo senso convergono alla somma le ridotte delle serie di potenze con raggio di convergenza infinito.

Le stesse idee, opportunamente adattate e combinate con quelle dell'Esempio 1.29, possono essere usate per trattare i casi degli spazi $C^k(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$ e $C^\infty(\overline{\Omega})$, ove Ω è un aperto di $\mathbb{R}^N$ (limitato nell'ultimo caso), nei quali si otterrebbero spazi metrici completi ma non normati. Ad esempio, se non vogliamo fare ipotesi di tipo geometrico sull'aperto Ω, una metrica "naturale" per lo spazio $C^\infty(\Omega)$ è data dalla formula seguente

$$d(u,v)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\tanh\Bigl(\sum_{\operatorname{ord} D\le n}\ \sup_{x\in\Omega_n}|Du(x)-Dv(x)|\Bigr)$$

ove la somma è estesa a tutte le derivazioni parziali D di ordine $\le n$ (e non solo di ordine n) e gli estremi superiori sono presi su aperti Ω_n anziché su compatti (in modo che non si siano dubbi sul significato delle derivate). Precisamente, $\{\Omega_n\}$ è una successione crescente di aperti limitati verificante le due condizioni seguenti: la chiusura di ogni Ω_n è inclusa in Ω; per ogni compatto $K\subset\Omega$ esiste n tale che $\Omega_n\supset K$.

1.32. Esempio (spazi non completi). Esempi di spazi metrici non completi li abbiamo già dati. Il primo è l'insieme $\mathbb{Q}$ con la metrica euclidea, che abbiamo usato come motivazione della Definizione 1.12, e il fatto che $\mathbb{Q}$ non sia completo può essere rivisto alla luce della Proposizione 1.20. Un altro è stato l'oggetto dell'Osservazione 1.23. Ma vi sono esempi particolarmente importanti di spazi metrici (anzi normati) non completi che è doveroso menzionare.

Si consideri l'insieme $C^0[0,1]$ delle funzioni $u:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue e, anziché la metrica del massimo, si prenda quella definita dalla formula

$$d_p(u,v)=\Bigl(\int_0^1|u(x)-v(x)|^p\,dx\Bigr)^{1/p}. \tag{1.14}$$

Come nel caso della (1.2), questa è effettivamente una metrica se $p \in [1, +\infty)$. Ebbene, lo spazio che si ottiene non è completo. Considerando il caso più semplice $p = 1$, vediamo che la successione $\{u_n\}$ di funzioni continue definita dalle formule

$$u_n(x) = n^{1/2} \quad \text{se } 0 \le x \le 1/n \quad \text{e} \quad u_n(x) = x^{-1/2} \quad \text{se } 1/n < x \le 1$$

è di Cauchy rispetto alla metrica d_1 e, contemporaneamente, non converge. La prima affermazione segue facilmente dal fatto seguente: se $n > m$ allora

$$\begin{aligned} d_1(u_n, u_m) &= \int_0^{1/n} (n^{1/2} - m^{1/2})\, dx + \int_{1/n}^{1/m} (x^{-1/2} - m^{1/2})\, dx \\ &\le \int_0^{1/n} n^{1/2}\, dx + \int_{1/n}^{1/m} x^{-1/2}\, dx = n^{-1/2} + 2(m^{-1/2} - n^{-1/2}) \le 2m^{-1/2}. \end{aligned}$$

Supponiamo ora per assurdo che $\{u_n\}$ converga a una certa $u \in C^0[0,1]$ rispetto alla metrica d_1 e arriviamo a una contraddizione. Fissato ad arbitrio $\varepsilon \in (0,1)$, per ogni $n > 1/\varepsilon$ abbiamo $1/n < \varepsilon$ da cui $u_n(x) = x^{-1/2}$ per ogni $x \in [\varepsilon, 1]$ e quindi

$$\int_\varepsilon^1 |x^{-1/2} - u(x)|\, dx = \int_\varepsilon^1 |u_n(x) - u(x)|\, dx \le d_1(u_n, u).$$

Prendendo il limite per $n \to \infty$, otteniamo

$$\int_\varepsilon^1 |x^{-1/2} - u(x)|\, dx = 0.$$

Siccome l'integrando è continuo in $[\varepsilon, 1]$, deduciamo che $u(x) = x^{-1/2}$ per ogni $x \in [\varepsilon, 1]$ e dunque, per l'arbitrarietà di ε, che $u(x) = x^{-1/2}$ per ogni $x \in (0, 1]$. Quindi u non è limitata, assurdo. Dunque $C^0[0,1]$ non è completo rispetto alla metrica d_1.

Notiamo che un ragionamento un po' più complesso per quanto riguarda i calcoli ma simile nella struttura dimostrerebbe che la successione definita dalle formule

$$u_n(x) = \ln n \quad \text{se } 0 \le x \le 1/n \quad \text{e} \quad u_n(x) = -\ln x \quad \text{se } 1/n < x \le 1$$

è di Cauchy rispetto a ciascuna delle metriche d_p e non converge rispetto ad alcuna di esse.

Notiamo inoltre che non aiuterebbe affatto prendere in considerazione funzioni integrabili secondo Riemann anziché solo funzioni continue, dato che l'integrabilità implica la limitatezza.

Sebbene la completezza sia un miraggio per quanto detto sopra, nell'esempio successivo presentiamo le funzioni integrabili nella forma di spazio metrico con una distanza di tipo (1.14).

1.33. Esempio (funzioni integrabili secondo Riemann). Per semplicità ci limitiamo al caso $p = 1$. Se accettiamo la definizione (1.14) di $d_1(u, v)$ per ogni $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrabili secondo Riemann (il che è lecito dato che anche $|u - v|$ è integrabile secondo Riemann), non otteniamo una metrica, in quanto la condizione $d_1(u, v) = 0$ non implica $u = v$ (tale fatto valeva invece nell'ambito delle funzioni continue). Introduciamo allora la relazione $\sim$ nell'insieme delle funzioni integrabili dicendo che $u \sim v$ quando $d_1(u, v) = 0$. Siccome $\sim$ è una relazione di equivalenza (verificare), possiamo introdurre il quoziente, che denotiamo con $\mathcal{R}$. Definiamo allora

$$\delta_1(U, V) = d_1(u, v) \quad \text{per ogni } U, V \in \mathcal{R}, \quad \text{se } u \in U \text{ e } v \in V.$$

La definizione ha senso in quanto il suo secondo membro effettivamente non dipende dai rappresentanti (verificare). Allora si ottiene una metrica e $(\mathcal{R}, \delta_1)$ è uno spazio metrico, ma quanto abbiamo detto alla fine dell'esempio precedente mostra sostanzialmente che nemmeno tale spazio è completo.

1.34. Osservazione. Siccome la completezza è una proprietà importante e importante è considerare metriche definite da formule di tipo (1.14) (in particolare per $p = 2$), si ha una possibile motivazione per la generalizzazione della nozione di integrale. Solo introducendo la teoria dell'integrazione di Lebesgue, infatti, formule di tipo (1.14) porterebbero a spazi metrici completi. Anche in tal caso, tuttavia, dovremmo considerare un insieme quoziente, come nell'ultimo esempio.

1.35. Esercizio. In riferimento all'Esempio 1.33, verificare che, se u, v sono integrabili e se l'insieme $E = \{x \in [0,1] : \ u(x) \neq v(x)\}$ è misurabile e ha misura nulla secondo Peano-Jordan, allora $u \sim v$. Costruire un esempio che mostra che il viceversa è falso (non banale riuscirci).

2. Il Teorema delle contrazioni

Diamo ora il concetto di contrazione in uno spazio metrico e uno dei più famosi *teoremi di punto fisso*, dovuto a Banach. Per punto fisso di una applicazione f di un insieme X in sé si intende un elemento $x \in X$ tale che $f(x) = x$ (cioè non spostato da f).

2.1. Definizione. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Una applicazione $f : X \to X$ è detta contrazione (stretta) se esiste $\alpha \in [0,1)$ tale che*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y) \quad \text{per ogni } x, y \in X \tag{2.1}$$

In tal caso α è detta costante di contrazione. □

2.2. Teorema (delle contrazioni). *Siano (X, d) uno spazio metrico e $f : X \to X$. Se lo spazio è completo e f è una contrazione, allora esiste uno e un solo $x \in X$ tale che $f(x) = x$. Inoltre, fissato $x_0 \in X$ ad arbitrio e definito ricorsivamente x_n per $n > 0$ mediante la formula $x_{n+1} = f(x_n)$, la successione $\{x_n\}$ converge al punto fisso x.* □

Dimostrazione. Sia $\alpha \in [0,1)$ una costante di contrazione per f. L'unicità è immediata: se x, y sono entrambi fissi, allora

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y)$$

da cui $(1-\alpha) d(x,y) \leq 0$. Essendo $d(x,y) \geq 0$ e $\alpha < 1$, deduciamo $d(x,y) = 0$ e $x = y$.

Per dimostrare l'esistenza e l'ultima affermazione, basta controllare che la successione $\{x_n\}$ converge e che il suo limite è un punto fisso. Poniamo per comodità $M = d(x_1, x_0)$. Per $k = 0, 1, \ldots$ si ha subito $d(x_{k+1}, x_k) \leq \alpha^k M$. Allora, per ogni $n \geq 0$ e $p \geq 1$, iterando la disuguaglianza triangolare e sommando le disuguaglianze precedenti per $k = n, \ldots, n+p-1$, deduciamo facilmente

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} \alpha^k M \leq M \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k = \frac{M\alpha^n}{1-\alpha}.$$

Siccome $\{\alpha^n\}$ è infinitesima, segue facilmente che $\{x_n\}$ è una successione di Cauchy. Siccome (X, d) è completo, $\{x_n\}$ converge a un certo punto $x \in X$. Osservato che

$$0 \leq d(x_n, f(x)) = d(f(x_{n-1}), f(x)) \leq \alpha d(x_{n-1}, x)$$

per $n \geq 1$, allora si ha anche

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, f(x)) = 0.$$

Dunque $\{x_n\}$ converge anche a $f(x)$. Per l'unicità del limite concludiamo che $f(x) = x$. □

Dal teorema deduciamo un corollario, che ha applicazioni interessanti e riguarda le *iterate* di un'applicazione f di un insieme X in sé, cioè le applicazioni f^n definite ricorsivamente dalle condizioni $f^1 = f$ e $f^{n+1} = f^n \circ f$ per ogni $n \geq 1$.

2.3. Corollario. *Siano (X,d) uno spazio metrico completo e $f : X \to X$ un'applicazione un'iterata della quale sia una contrazione. Allora f ha uno e un solo punto fisso.* $\square$

Dimostrazione. Sia m tale che f^m sia una contrazione e procediamo.

L'unicità è immediata. Infatti due punti fissi x e y per f sono fissi anche per f^m, da cui $x = y$ in quanto f^m è una contrazione.

Vediamo l'esistenza. Per il Teorema delle contrazioni f^m ha uno e un solo punto fisso $x \in X$. Dimostriamo che x è fisso anche per f. Da $f^m(x) = x$ segue subito che

$$f^m(f(x)) = f(f^m(x)) = f(x)$$

cioè che anche $f(x)$ è un punto fisso per f^m. Siccome, come abbiamo già osservato, il punto fisso per f^m è unico e x è fisso, concludiamo che $f(x) = x$. $\square$

3. Funzioni implicite

La prima applicazione del Teorema delle contrazioni riguarda il problema delle funzioni implicite, problema che è ben risolto dal noto Teorema del Dini. Introduciamo qualche notazione ed enunciamo e dimostriamo tale teorema.

Nello spazio euclideo prodotto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ denotiamo con (x,y) la variabile, naturalmente con $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^n$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ è un aperto e se $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è una funzione dotata di derivate parziali rispetto alle variabili y_i, $i = 1, \dots, n$, denotiamo con $\partial F/\partial y$ la matrice $n \times n$ avente tali derivate come colonne e con $\nabla_y F_k$ il vettore (colonna in un contesto di matrici) delle derivate parziali $\partial F_k/\partial y_i$ della componente k-esima F_k di F.

3.1. Teorema (del Dini). *Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua con le derivate parziali rispetto alle variabili y_i. Sia poi $(x_0, y_0) \in \Omega$ tale che*

$$f(x_0,y_0) = 0 \quad e \quad \det \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0. \tag{3.1}$$

Allora esistono un intorno aperto I di x_0 e un intorno aperto J di y_0, con $I \times J \subseteq \Omega$, tali che, per ogni $x \in I$, esista uno e un solo $y \in J$ tale che $f(x,y) = 0$. $\square$

Dimostrazione. Premettiamo che, se $B \subseteq \mathbb{R}^n$ è una palla e se $\phi : B \to \mathbb{R}^n$ è una funzione differenziabile con derivate limitate, allora vale la disuguaglianza

$$|\phi(y') - \phi(y'')| \le |y' - y''| \left(\sum_{k=1}^{n} \sup_{y \in B} |\nabla \phi_k(y)|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{per ogni } y', y'' \in B \tag{3.2}$$

ove ϕ_k è la k-esima componente di ϕ, come si vede facilmente applicando il Teorema del valor medio di Lagrange alle funzioni $t \mapsto \phi_k(y'' + t(y' - y''))$, $t \in [0,1]$.

Ora presentiamo il problema della risolubilità dell'equazione $f(x,y) = 0$ rispetto a y come un problema di punto fisso. Usando la seconda delle (3.1), vediamo che l'equazione $f(x,y) = 0$ equivale alla seguente

$$y - \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right)^{-1} f(x,y) = y.$$

Siamo pertanto indotti a considerare la funzione $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definita dalla formula

$$g(x,y) = y - \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \right)^{-1} f(x,y) \tag{3.3}$$

e a cercare di applicare, per x fissato vicino a x_0, il Teorema delle contrazioni alla funzione $y \mapsto g(x,y)$, pensata questa definita in un certo intorno di y_0. Precisiamo il tutto. Conviene introdurre le notazioni seguenti: se $r > 0$ poniamo $B'_r = B_r(x_0)$ e $B''_r = B_r(y_0)$ (palle di $\mathbb{R}^m$ e di $\mathbb{R}^n$ rispettivamente). Ora osserviamo che le due funzioni $\partial g/\partial y$ (a valori matrici) e g (a valori vettoriali) sono continue. Inoltre nel punto (x_0, y_0) esse valgono rispettivamente la matrice nulla e y_0. Dunque, per ogni $\eta > 0$, esistono $\delta, \varepsilon > 0$ tali che $B'_\delta \times B''_\varepsilon \subseteq \Omega$ e verificanti le condizioni seguenti:

$$|\nabla_y g_k(x,y)| \le \eta \quad \text{e} \quad |g(x,y_0) - y_0| \le \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{per ogni } x, y \in B'_\delta \times B''_\varepsilon \text{ e } k = 1, \dots, n. \tag{3.4}$$

Infatti, fissato $\eta > 0$, determiniamo dapprima δ ed ε in modo da soddisfare la prima condizione; poi rimpiccioliamo δ se necessario per soddisfare anche la seconda. Ora vediamo come conviene scegliere i valori di $\eta, \varepsilon, \delta$. Cerchiamo una condizione di Lipschitz per g rispetto alla seconda variabile. Se $x \in B'_\delta$ e $y', y'' \in B''_\varepsilon$, abbiamo per la (3.2) e per la prima delle (3.4)

$$|g(x,y') - g(x,y'')| \le |y' - y''| \left(\sum_{k=1}^n \sup_{y \in B''_\varepsilon} |\nabla_y g_k(x,y)|^2 \right)^{1/2} \le \eta\sqrt{n}\, |y' - y''|.$$

In vista dell'applicabilità del Teorema delle contrazioni, scegliamo allora $\eta = 1/(2\sqrt{n})$ e determiniamo ε e δ di conseguenza, in modo da avere

$$|g(x,y') - g(x,y'')| \le \frac{1}{2}\, |y' - y''| \quad \text{per ogni } x \in B'_\delta \text{ e } y', y'' \in B''_\varepsilon. \tag{3.5}$$

A questo punto possiamo fissare I e J: scegliamo $I = B'_\delta$ e $J = B''_\varepsilon$. Ciò che ancora dobbiamo dimostrare è che, per ogni $x \in I$, esiste uno e un solo $y \in J$ tale che $g(x,y) = y$. Dunque fissiamo $x \in I$.

Tuttavia, siccome J è, come vuole l'enunciato, aperto anziché chiuso, esso male si presta all'applicazione del Teorema delle contrazioni, per cui la conclusione della dimostrazione risulta più complessa. Dimostriamo che, per ogni $\sigma \in [\varepsilon/2, \varepsilon)$, l'equazione $g(x,y) = y$ ha una e una sola soluzione $y \in B''_\varepsilon$ verificante più precisamente $|y - y_0| \le \sigma$.

Fissiamo dunque anche $\sigma \in [\varepsilon/2, \varepsilon)$, poniamo $C_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y - y_0| \le \sigma\}$ e cerchiamo di applicare il Teorema delle contrazioni alla funzione $y \mapsto g(x,y)$, $y \in C_\sigma$. Innanzi tutto C_σ è completo rispetto alla metrica euclidea, in quanto è un chiuso di $\mathbb{R}^n$. Ora vediamo che, se $y \in C_\sigma$, allora $g(x,y) \in C_\sigma$. Per la (3.5) e la seconda delle (3.4) abbiamo infatti

$$|g(x,y) - y_0| \le |g(x,y) - g(x,y_0)| + |g(x,y_0) - y_0| \le \frac{1}{2}\, |y - y_0| + \frac{\varepsilon}{4} \le \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma. \tag{3.6}$$

Infine la proprietà di contrazione è garantita ancora dalla (3.5). Dunque concludiamo che, per ogni $\sigma \in [\varepsilon/2, \varepsilon)$, l'equazione $g(x,y) = y$ ha una e una sola soluzione $y \in C_\sigma$.

Finalmente possiamo concludere dimostrando che esiste uno e un solo $y \in J$ verificante $g(x,y) = y$. Per avere l'esistenza è sufficiente considerare la soluzione $y \in C_{\varepsilon/2} \subseteq J$ appena costruita. Vediamo infine l'unicità. Se $y', y'' \in J = B''_\varepsilon$ sono due soluzioni, allora, scelto $\sigma = \max\{\varepsilon/2, |y' - y_0|, |y'' - y_0|\}$, abbiamo $\sigma \in [\varepsilon/2, \varepsilon)$, $y', y'' \in C_\sigma$, $g(x,y') = y'$ e $g(x,y'') = y''$, da cui $y' = y''$.

3.2. Osservazione. Notiamo che, con le notazioni della dimostrazione, se $x \in I$, la soluzione $y \in J$ trovata appartiene di fatto a $C_{\varepsilon/2}$.

L'enunciato che abbiamo dato non parla di continuità della funzione implicita, cioè della funzione u che a ogni $x \in I$ associa l'unico $y \in J$ tale che $f(x,y) = 0$. La dimostrazione precedente, infatti, non prende precauzioni in questa direzione. Ma, nelle stesse ipotesi, si può dimostrare che tale funzione u è continua in tutti i punti $x \in I$ tali che $\det(\partial f(x,u(x)) \neq 0$ e che tali punti costituiscono un intorno di x_0. La dimostrazione si può basare proprio sulla considerazione della restrizione di f all'insieme

$$\Omega' = \{(x,y) \in \Omega : \ \det(\partial f(x,y)/\partial y) \neq 0\}$$

il quale è un aperto (dato che la funzione $\det(\partial f/\partial y)$ è continua) contenente (x_0, y_0) e sull'applicazione del teorema precedente a partire da punti del tipo $(x', u(x'))$, ciascuno dei quali verifica le ipotesi. Tuttavia preferiamo omettere i dettagli e presentare un'altra applicazione del Teorema delle contrazioni. Dimostriamo direttamente l'esistenza di una funzione implicita continua.

3.3. Teorema. *Nelle ipotesi e con le notazioni del Teorema del Dini, esistono un intorno aperto I di x_0 e un numero reale $\sigma > 0$ tali che, posto $C_\sigma = \{y \in \mathbb{R}^n : \ |y - y_0| \leq \sigma\}$, risulti $I \times C_\sigma \subseteq \Omega$ e fra le funzioni $u : I \to C_\sigma$ continue ve ne sia una e una sola che verifica $f(x,u(x)) = 0$ per ogni $x \in I$.* $\square$

Dimostrazione. Riprendiamo la dimostrazione precedente, di cui conserviamo le notazioni, e scegliamo $\sigma = \varepsilon/2$. Introduciamo poi lo spazio metrico (X,d) come segue:

$$X = \{u : I \to C_\sigma \text{ continue}\} \quad \text{e} \quad d(u,v) = \sup_{x \in I} |u(x) - v(x)| \quad \text{per } u, v \in X .$$

La completezza si verifica facilmente, usando il fatto che C_σ è chiuso. Ora rivediamo l'equazione da risolvere nella forma $g(x,u(x)) = u(x)$ per ogni $x \in I$, forma che, a sua volta, può essere presentata come $\mathcal{G}u = u$ pur di definire coerentemente $\mathcal{G} : X \to X$.

Per $u \in X$ denotiamo con $\mathcal{G}u$ la funzione $x \mapsto g(x,u(x))$, $x \in I$. Abbiamo dunque $(\mathcal{G}u)(x) = g(x,u(x))$ e $\mathcal{G}u$ è effettivamente ben definita e continua non appena $u \in X$. Inoltre, se $u \in X$, la (3.6) fornisce $|(\mathcal{G}u)(x) - y_0| \leq \sigma$ per ogni $x \in I$, cioè $(\mathcal{G}u)(x) \in C_\sigma$ per ogni $x \in I$. Dunque $\mathcal{G}u \in X$.

Verifichiamo infine che $\mathcal{G}$ è una contrazione. Siano infatti $u, v \in X$. Siccome $B'_\delta = I$ e $C_\sigma \subseteq B''_\varepsilon$, vediamo che la (3.5), applicata con $y' = u(x)$ e $y'' = v(x)$, fornisce

$$|(\mathcal{G}u)(x) - (\mathcal{G}v)(x)| = |g(x,u(x)) - g(x,v(x))| \leq \frac{1}{2}\,|u(x) - g(x)| \quad \text{per ogni } x \in I$$

e passando all'estremo superiore otteniamo $d(\mathcal{G}u, \mathcal{G}v) \leq (1/2)d(u,v)$.

Dunque $\mathcal{G}$ è una contrazione in X e di conseguenza ha uno e un solo punto fisso u. Tale u verifica $g(x,u(x)) = u(x)$ per ogni $x \in I$, cioè $f(x,u(x)) = 0$ per ogni $x \in I$, e quindi è la funzione cercata.

3.4. Osservazione. Notiamo che l'unicità è ottenuta solo nell'ambito delle funzioni $u \in X$, cioè nell'ambito delle funzioni a valori in C_σ continue, anche se, come sappiamo, si ha unicità nell'ambito di tutte le funzioni, continue o meno, a valori in B''_ε.

Notiamo inoltre che, per l'ultima tesi del Teorema delle contrazioni, fissato comunque $u_0 \in X$, la successione $\{\mathcal{G}^k u_0\}$ converge uniformemente in I alla funzione implicita u costruita. Posto per comodità $u_k = \mathcal{G}^k u_0$, semplicemente esplicitando la definizione di $\mathcal{G}^k$ a partire da quella di $\mathcal{G}$, si vede che, per ogni $x \in I$, il valore $u_{k+1}(x)$ è l'unica soluzione $y \in \mathbb{R}^n$ del sistema lineare regolare

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot (u_k(x) - y) = f(x, u_k(x))$$

ove, per maggior chiarezza, abbiamo indicato con il punto il prodotto matrice-vettore.

4. Applicazioni al problema di Cauchy e alle equazioni di Volterra

L'altra applicazione dei risultati del Paragrafo 2 che diamo riguarda il problema di Cauchy per un'equazione differenziale ordinaria e, più in generale, certe equazioni integrali, dette di Volterra, che generalizzano l'equazione integrale più elementare equivalente a un problema di Cauchy appunto. Una ben nota procedura, seguita di solito nei corsi specializzati, consente di dimostrare un risultato di esistenza e unicità locale in condizioni di regolarità locale. Lo scopo che ci prefiggiamo, tuttavia, non è tanto quello di trovare risultati generali, quanto piuttosto quello di illustrare tecniche di applicazione di risultati astratti, per cui consideriamo solo situazioni particolari che consentono di dimostrare risultati di esistenza e unicità della soluzione globale.

Partiamo dal problema di Cauchy e scriviamolo già nella forma di equazione integrale di Volterra, limitandoci al caso dell'equazione scalare. Il caso di un sistema si tratta però esattamente nello stesso modo, l'unica differenza essendo la diversa interpretazione dei simboli. L'equazione di Volterra è la seguente:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s))\, ds \quad \text{per ogni } t \geq 0. \tag{4.1}$$

Qui consideriamo il caso in cui

$$f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{è continua} \tag{4.2}$$

e verifica una condizione di Lipschitz globale del tipo

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq L|y - z| \quad \text{per ogni } t \geq 0 \text{ e } y, z \in \mathbb{R} \tag{4.3}$$

con una certa costante L. La teoria generale assicura che, per ogni $u_0 \in \mathbb{R}$, l'equazione di Volterra ha una e una sola soluzione continua definita in $[0, +\infty)$. Dimostriamo, utilizzando i risultati astratti, il risultato seguente:

4.1. Teorema. *Nelle ipotesi* (4.2–3), *per ogni* $T \in (0, +\infty)$ *esiste una e una sola funzione continua* $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ *che verifica l'equazione* (4.1) *in* $[0, T]$. □

Dimostrazione. Denotiamo con X l'insieme delle funzioni $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ continue munito della consueta metrica del massimo, vale a dire $d(u, v) = \max_{x \in [0,T]} |u(x) - v(x)|$. Allora (X, d) risulta uno spazio metrico completo (vedi Esempio 1.21) e le soluzioni che stiamo considerando dell'equazione (4.1) sono esattamente i punti fissi dell'applicazione $\mathcal{F}$ definita dalla formula

$$(\mathcal{F}u)(t) = u_0 + \int_0^t f(s, u(s))\, ds, \quad t \in [0, T]. \tag{4.4}$$

Chiaramente la (4.4) definisce una applicazione di X in sé, per cui si può pensare di usare il Teorema delle contrazioni. Se $u, v \in X$, abbiamo per ogni $t \in [0, T]$

$$|(\mathcal{F}u)(t) - (\mathcal{F}v)(t)| \leq \int_0^t |f(s, u(s)) - f(s, v(s))|\, ds \leq L \int_0^t |u(s) - v(s)|\, ds. \tag{4.5}$$

Si deduce immediatamente che $d(\mathcal{F}u, \mathcal{F}v) \leq LT d(u, v)$, ma la costante LT non è migliorabile, per cui, se volessimo applicare il Teorema delle contrazioni, saremmo costretti a supporre $LT < 1$, cioè $T < 1/L$, e arriveremmo solo a un risultato di carattere locale. Osserviamo incidentalmente che, di fatto, potremmo arrivare comunque all'esistenza della soluzione globale, come mostriamo nell'osservazione successiva.

Per costruire direttamente la soluzione definita in $[0,T]$, consideriamo invece la successione $\{\mathcal{F}^n\}$ delle iterate di $\mathcal{F}$ e dimostriamo che, per ogni $n \geq 1$, vale la disuguaglianza

$$|(\mathcal{F}^n u)(t) - (\mathcal{F}^n v)(t)| \leq L^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, |u(s)-v(s)|\, ds \qquad (4.6)$$

$$\text{per ogni } t \in [0,T] \text{ e per ogni } u,v \in X.$$

La (4.6) con $n=1$ coincide con quanto dato dalla (4.5). Ragionando per induzione, assumiamo la (4.6) e deduciamo l'analoga con $n+1$ al posto di n. Siano dunque $t \in [0,T]$ e $u,v \in X$. Applicando la (4.6) alle funzioni $\mathcal{F}u, \mathcal{F}v$, che effettivamente appartengono a X, otteniamo

$$|(\mathcal{F}^{n+1} u)(t) - (\mathcal{F}^{n+1} v)(t)| \leq L^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, |(\mathcal{F}u)(s)-(\mathcal{F}v)(s)|\, ds.$$

Applicando ora la (4.5) alle funzioni u,v e al generico istante $s \in [0,t]$, allunghiamo la catena e poi integriamo per parti come segue

$$\begin{aligned}
&|(\mathcal{F}^{n+1} u)(t) - (\mathcal{F}^{n+1} v)(t)| \leq L^n \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} \left(L \int_0^s |u(r)-v(r)|\, dr \right) ds \\
&= L^{n+1} \left\{ \left[\frac{-(t-s)^n}{n!} \int_0^s |u(r)-v(r)|\, dr \right]_{s=0}^{s=t} - \int_0^s \frac{-(t-s)^n}{n!}\, |u(s)-v(s)|\, ds \right\} \\
&= L^{n+1} \int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}\, |u(s)-v(s)|\, ds.
\end{aligned}$$

Dunque la (4.6) vale per ogni n. Deduciamo in particolare

$$|(\mathcal{F}^n u)(t) - (\mathcal{F}^n v)(t)| \leq L^n d(u,v) \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds = \frac{L^n t^n}{n!}\, d(u,v) \leq \frac{L^n T^n}{n!}\, d(u,v)$$

e passando all'estremo superiore concludiamo che

$$d(\mathcal{F}^n u, \mathcal{F}^n v) \leq \frac{L^n T^n}{n!}\, d(u,v) \quad \text{per ogni } n \geq 1 \text{ e per ogni } u,v \in X.$$

Siccome la successione $\{\alpha^n/n!\}$ è infintesima per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, deduciamo che $\mathcal{F}^n$ è una contrazione se n è abbastanza grande e il Corollario 2.3 del Teorema delle contrazioni assicura che $\mathcal{F}$ ha uno e un solo punto fisso. □

4.2. Osservazione. Riprendiamo le considerazioni fatte all'inizio della dimostrazione e vediamo come, di fatto, la (4.5) sia sufficiente per arrivare all'esistenza di una soluzione globale. Infatti, attribuendo a T ancora il suo significato originario, potremmo scegliere $T_1 = \min\{T, 1/(2L)\}$ e avremmo una soluzione definita in $[0,T_1]$. Se poi $T_1 < T$, osservato che il valore di T_1 non dipende dal dato iniziale (né dall'istante iniziale che è 0 solo per comodità di scrittura) ma solo dalla costante di Lipschitz, potremmo definire $T_2 = \min\{T, 2T_1\}$ e ripartire con il problema di Cauchy sull'intervallo $[T_1,T_2]$, ottenendo una soluzione definita in $[0,T_2]$. Iterando un numero finito di volte il procedimento, arriveremmo a costruire una soluzione definita in $[0,T]$.

4.3. Osservazione. Osserviamo un altro fatto. Il punto chiave della teoria del problema di Cauchy consiste nella sua trasformazione nell'equazione di Volterra, della quale si cercano soluzioni solo continue e non di classe C^1, anche se, di fatto, ogni soluzione è di classe C^1.

Se infatti pretendessimo di applicare il Teorema delle contrazioni in ambito C^1, per avere la completezza dello spazio metrico, dovremmo definire la distanza come nella (1.7), cioè

$$d_1(u,v) = d(u,v) + d(u',v')$$

ove d è la distanza del massimo introdotta nella dimostrazione. Ebbene, non c'è alcuna speranza di ottenere contrazioni. Con la notazione (4.4) abbiamo infatti

$$(\mathcal{F}u)'(t) - (\mathcal{F}v)'(t) = f(t,u(t)) - f(t,v(t)).$$

Dunque il meglio che possiamo ottenere è

$$d_1(\mathcal{F}u,\mathcal{F}v) \le LT\, d(u,v) + L\, d(u,v) \le L(T+1)\, d_1(u,v)$$

e saremmo fermi, anche per tempi piccoli, proprio a causa del termine aggiuntivo. $\square$

Una dimostrazione alternativa del Teorema 4.1, basata direttamente sul Teorema delle contrazioni anziché sul Corollario 2.3, può essere ottenuta cambiando la metrica dello spazio $C^0[0,T]$, come è fatto nell'esempio dato di seguito.

4.4. Esempio (ancora sullo spazio delle funzioni continue). Consideriamo ancora lo spazio $C^0[0,T]$, ma, anziché l'usuale metrica del massimo, prendiamo quella definita da

$$d_\lambda(u,v) = \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}|u(t)-v(t)| \tag{4.7}$$

ove λ è un parametro reale. Se $\lambda = 0$ otteniamo la metrica usuale ma, come si controlla senza difficoltà, d_λ è effettivamente una metrica per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Supponiamo ora $\lambda > 0$, che è il caso più interessante. Ancora senza difficoltà si controlla che per ogni $v \in C^0[0,T]$ valgono le disuguaglianze

$$\sup_{t\in[0,T]} |v(t)| \le e^{\lambda T} \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}|v(t)| \quad \text{e} \quad \sup_{t\in[0,T]} e^{-\lambda t}|v(t)| \le \sup_{t\in[0,T]} |v(t)| \tag{4.8}$$

dalle quali (scritte per $u-v$) seguono sia la completezza di $C^0[0,T]$ rispetto a (4.7) (applicando l'ultima parte dell'Osservazione 1.13 all'applicazione identica di $C^0[0,T]$), sia il fatto che d_λ induce ancora la convergenza uniforme. $\square$

Dunque si può pensare di giocare sul parametro λ e di cercare $\lambda > 0$ tale che l'applicazione $\mathcal{F}$ definita dalla (4.4) sia una contrazione rispetto a d_λ. Questa idea effettivamente funziona, e non solo per l'equazione (4.1), come ora mostriamo. Consideriamo infatti l'equazione più generale

$$u(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s,u(s))\, ds, \quad t \in [0,T] \tag{4.9}$$

nella quale $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ è continua e K è una funzione di tre variabili nelle ipotesi che ora descriviamo. Poniamo

$$\Delta = \bigl\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le s \le t \le T\bigr\}$$

e supponiamo che

$$K : \Delta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{sia continua} \tag{4.10}$$

e verifichi la condizione di Lipschitz seguente: esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|K(t,s,y) - K(t,s,z)| \le L|x-y| \quad \text{per ogni } (t,s) \in \Delta \text{ e per ogni } y,z \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

La (4.9) è ancora detta *equazione di Volterra* e notiamo che la scelta

$$K(t,s,y) = f(s,y), \quad (t,s,y) \in \Delta \times \mathbb{R} \tag{4.12}$$

verifica le (4.10–11) se f verifica le (4.2–3). Dunque quanto diciamo di seguito contiene il Teorema 4.1 come caso particolare e ne fornisce una dimostrazione alternativa.

4.5. Teorema. *Sia* $g : [0,T] \to \mathbb{R}$ *continua e valgano le* (4.10–11). *Allora esiste una e una sola* $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ *continua che risolve la* (4.9). $\square$

Dimostrazione. Poniamo $X = C^0[0,T]$ e consideriamo lo spazio metrico completo (X, d_λ), ove d_λ è definita dalla (4.7) e $\lambda > 0$ è un parametro a nostra disposizione. Per $u \in X$ consideriamo la funzione $\mathcal{K}u \in X$ definita dalla formula

$$(\mathcal{K}u)(t) = g(t) + \int_0^t K(t,s,u(s))\,ds, \quad t \in [0,T].$$

Allora abbiamo definito un'applicazione $\mathcal{K} : X \to X$ e ora vediamo che $\mathcal{K}$ è una contrazione se λ è abbastanza grande. Siano infatti $u, v \in C^0[0,T]$. Allora per $t \in [0,T]$ si ha

$$\begin{aligned} |(\mathcal{K}u)(t) - (\mathcal{K}v)(t)| &\le \int_0^t |K(t,s,u(s)) - K(t,s,v(s))|\,ds \le L \int_0^t |u(s) - v(s)|\,ds \\ &= L \int_0^t e^{\lambda s} \cdot e^{-\lambda s} |u(s) - v(s)|\,ds \le L\,d_\lambda(u,v) \int_0^t e^{\lambda s}\,ds \\ &= L\,d_\lambda(u,v)\,\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \le L\,d_\lambda(u,v)\,\frac{e^{\lambda t}}{\lambda}\,. \end{aligned}$$

Deduciamo

$$|e^{-\lambda t}\big((\mathcal{K}u)(t) - (\mathcal{K}v)(t)\big)| \le d_\lambda(u,v)\,\frac{L}{\lambda} \quad \text{per ogni } t \in [0,T]$$

da cui subito

$$d_\lambda(\mathcal{K}u, \mathcal{K}v) \le \alpha d_\lambda(u,v) \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{L}{\lambda}\,.$$

Dunque $\alpha < 1$ se $\lambda > L$ e in tali condizioni si conclude. $\square$

4.6. Osservazione. Grazie all'ultima tesi del Teorema delle contrazioni, se u_0 è un elemento qualunque di $C^0[0,T]$, allora la successione $\{\mathcal{K}^n u_0\}$ converge alla soluzione della (4.9) nel senso della distanza d_λ per ogni $\lambda > L$, cioè uniformemente in $[0,T]$ per quanto è stato osservato. Nel caso particolare in cui $g(t) = u_0$ per ogni t e K è dato dalla (4.12), tale successione coincide con quella data dal metodo di Peano-Picard relativo alla risoluzione dell'equazione di Volterra (4.1).

Questo fatto non sarebbe stato ovvio senza il trucco dell'esponenziale. Infatti, l'applicazione diretta del Teorema delle contrazioni con l'usuale metrica del massimo sarebbe lecita solo con T abbastanza piccolo e, dunque, arriveremmo a dimostrare la convergenza uniforme delle approssimanti solo in un intorno di $t = 0$.

4.7. Osservazione. Naturalmente, come nel caso dell'equazione (4.1), si ha un risultato di esistenza e unicità in $[0,+\infty)$ se le ipotesi sono soddisfatte per ogni $T > 0$ (e L potrebbe anche dipendere da T), e un altro importante caso particolare della (4.9) è dato dall'equazione

$$u(t) = g(t) + \int_0^t k(t-s)\,u(s)\,ds, \quad t \in\ge 0 \tag{4.13}$$

che corrisponde alla scelta $K(t,s,y) = k(t-s)\,y$, ove $k : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ è una funzione continua assegnata. L'equazione (4.13) è detta di tipo convolutiorio in quanto la funzione $k * u$ definita da

$$t \mapsto \int_0^t k(t-s)\,u(s) = \int_0^t k(s)\,u(t-s)\,ds, \quad t \ge 0$$

si chiama *convoluzione* delle due funzioni k e u. La (4.13) si scrive dunque anche nel modo più conciso $u = g + k * u$. Si noti che, fissato $T \in (0,+\infty)$, come L nella (4.11) possiamo prendere $L = \max_{\tau \in [0,T]} |k(\tau)|$. $\square$

Anche se le considerazioni che ora facciamo possono essere adattate al caso dell'equazione (4.9), in particolare a quello della (4.13), limitiamoci a trattare l'equazione (4.1), che corrisponde a un problema di Cauchy. Ciò che intendiamo fare è dare un risultato di esistenza e unicità della soluzione globale direttamente nell'intervallo $[0,+\infty)$, anziché su un arbitrario intervallo limitato. Per far ciò, dovremmo generalizzare al caso $T=\infty$ quanto è stato fatto nella dimostrazione del Teorema 4.5. Non si trovano difficoltà particolari nel caso in cui f verifica, oltre alle ipotesi di continuità e di lipschitzianità (4.2–3), anche la condizione semplificativa di annullamento seguente

$$f(t,0)=0 \quad \text{per ogni } t\geq 0. \tag{4.14}$$

4.8. Teorema. *Nelle ipotesi* (4.2–3) *e* (4.14)*, se $\lambda > L$, allora esiste una e una sola soluzione continua $u:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ dell'equazione* (4.1) *verificante la condizione supplementare*

$$\sup_{t\geq 0} e^{-\lambda t}|u(t)| < +\infty. \ \square \tag{4.15}$$

Dimostrazione. Per $\lambda>0$ denotiamo con X_λ l'insieme delle funzioni $u:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continue che verificano la (4.15), osservando che X_λ è uno spazio vettoriale. In particolare, se $u,v\in X_\lambda$, si ha anche $u-v\in X_\lambda$ e ha senso porre

$$d_\lambda(u,v)=\sup_{t\geq 0} e^{-\lambda t}|u(t)-v(t)| \quad \text{per } u,v\in X_\lambda \tag{4.16}$$

il che rende (X_λ,d_λ) uno spazio metrico. Allora le soluzioni dell'equazione (4.1) appartenenti a X_λ sono esattamente i punti fissi dell'applicazione $\mathcal{F}_\lambda$ definita dalla formula

$$(\mathcal{F}_\lambda u)(t)=u_0+\int_0^t f(s,u(s))\,ds \quad \text{per } u\in X_\lambda \text{ e } t\geq 0$$

e, ammesso che tale formula definisca una applicazione di X_λ in sé, si può pensare di usare il Teorema delle contrazioni. Le tappe successive riguardano allora i punti seguenti: lo spazio metrico (X_λ,d_λ) è completo; effettivamente $\mathcal{F}_\lambda$ trasforma X_λ in sé; $\mathcal{F}_\lambda$ è una contrazione se $\lambda>L$.

Verifichiamo la completezza. Se $v\in X_\lambda$, definiamo $v_\lambda:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ mediante la formula $v_\lambda(t)=e^{-\lambda t}v(t)$ e osserviamo che v_λ è continua e limitata.

Viceversa, ogni funzione $w:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua e limitata ha la forma $w=v_\lambda$ per una e una sola $v\in X_\lambda$, precisamente per v data dalla formula $v(t)=e^{\lambda t}w(t)$. Inoltre, se $u,v\in X_\lambda$, si ha immediatamente che $d_\lambda(u,v)=\sup_{t\geq 0}|u_\lambda(t)-v_\lambda(t)|$. Deduciamo che l'applicazione $v\mapsto v_\lambda$ è un'isometria dallo spazio metrico (X_λ,d_λ) sullo spazio metrico delle funzioni continue e limitate (vedi Esempio 1.18). Siccome quest'ultimo è completo, anche l'altro lo è grazie all'Osservazione 1.13. Si noti che in questo punto non è necessaria alcuna ipotesi su λ.

Supponiamo ora $u\in X_\lambda$ e verifichiamo che anche $\mathcal{F}_\lambda u$ appartiene a X_λ. Chiaramente $\mathcal{F}_\lambda u$ è continua. Inoltre, per $t\geq 0$, grazie all'ipotesi (4.14), abbiamo

$$\begin{aligned}|(\mathcal{F}_\lambda u)(t)| &\leq |u_0|+L\int_0^t |u(s)|\,ds = |u_0|+L\int_0^t e^{\lambda s}\cdot e^{-\lambda s}|u(s)|\,ds\\ &\leq |u_0|+L\,d_\lambda(u,0)\int_0^t e^{\lambda s}\,ds = |u_0|+d_\lambda(u,0)\,\frac{L}{\lambda}\,(e^{\lambda t}-1)\leq |u_0|+d_\lambda(u,0)\,\frac{L}{\lambda}\,e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Deduciamo

$$|e^{-\lambda t}(\mathcal{F}_\lambda u)(t)|\leq |u_0|e^{-\lambda t}+d_\lambda(u,0)\,\frac{L}{\lambda}$$

da cui subito $\mathcal{F}_\lambda u\in X_\lambda$. Si noti che questo punto vale nella sola ipotesi $\lambda>0$.

Infine, per quanto riguarda la verifica della proprietà di contrazione, un calcolo identico a quello fatto nella dimostrazione del Teorema 4.5 porta alla disuguaglianza

$$d_\lambda(\mathcal{F}_\lambda u,\mathcal{F}_\lambda v)\leq \alpha d_\lambda(u,v) \quad \text{con} \quad \alpha=\frac{L}{\lambda}\,.$$

Dunque, ancora, $\alpha<1$ se $\lambda>L$ e in tali condizioni si conclude. $\square$

4.9. Osservazione. Si può dimostrare direttamente che, nelle ipotesi fatte, ogni soluzione continua dell'equazione di Volterra (4.1) appartiene a X_L, dunque a X_λ per ogni $\lambda > L$, come controlliamo fra un attimo. Dunque l'unicità della soluzione trovata con il teorema precedente riguarda, di fatto, l'unicità nell'ambito di tutte le soluzioni. Inoltre, in riferimento all'Osservazione 4.6, osserviamo che la successione $\{\mathcal{F}_\lambda^n u_0\}$ converge alla soluzione nel senso dello spazio metrico (X_λ, d_λ), in particolare uniformemente in $[0,T]$ per ogni T finito grazie alla prima delle disuguaglianze (4.8). Controlliamo la prima delle affermazioni fatte. Prendendo i moduli nella (4.1) e applicando l'ipotesi (4.14) e la (4.3) ai punti $(s, u(s))$ e $(s,0)$, otteniamo per ogni $t \geq 0$

$$|u(t)| \leq |u_0| + \int_0^t |f(s,u(s))|\, ds = |u_0| + \int_0^t |f(s,u(s)) - f(s,0)|\, ds \leq |u_0| + L \int_0^t |u(s)|\, ds.$$

Applicando il risultato che diamo di seguito, deduciamo allora

$$|u(t)| \leq |u_0| e^{Lt} \quad \text{per ogni } t \geq 0$$

e concludiamo che $u \in X_\lambda$.

4.10. Teorema (Lemma di Gronwall). *Siano* $T \in (0, +\infty]$, $\phi : [0,T) \to \mathbb{R}$ *continua,* $a \in \mathbb{R}$ *e* $L \geq 0$ *e si supponga che*

$$\phi(t) \leq a + L \int_0^t \phi(s)\, ds \quad \textit{per ogni } t \in [0,T). \tag{4.17}$$

Allora $\phi(t) \leq a\, e^{Lt}$ *per ogni* $t \in [0,T)$. □

Dimostrazione. Se $L = 0$ il risultato è banalmente vero. Sia dunque $L > 0$. Dalla (4.17) deduciamo che, sempre per ogni $t \in [0,T)$, vale la disuguaglianza

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Lt} \int_0^t \phi(s)\, ds \right) = e^{-Lt}\phi(t) - L\, e^{-Lt} \int_0^t \phi(s)\, ds \leq a\, e^{-Lt}$$

e questa si conserva per integrazione. Per ogni $\tau \in [0,T)$ abbiamo quindi

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}\left(e^{-Lt} \int_0^t \phi(s)\, ds \right) dt \leq a \int_0^\tau e^{-Lt}\, dt$$

e, svolto il calcolo e scritto t anziché τ, otteniamo per ogni $t \in [0,T)$

$$e^{-Lt} \int_0^t \phi(s)\, ds \leq a\, \frac{1 - e^{-Lt}}{L} \qquad \text{da cui} \qquad a + L \int_0^t \phi(s)\, ds \leq a\, e^{Lt}.$$

Usando di nuovo la (4.17), concludiamo. □

Il risultato appena dimostrato è uno strumento importante nella teoria delle equazioni di evoluzione (anche a derivate parziali). Ad esempio, applicato con $a = 0$ e con ϕ non negativa esso implica che ϕ è identicamente nulla e può essere utilizzato in questa forma, con $\phi = |u - v|$, per dimostrare direttamente che, nelle ipotesi (4.2–3), due soluzioni u e v dell'equazione (4.1) necessariamente coincidono. Altri tipi di utilizzo sono dimostrazioni di *stime a priori*, come appunto è stato fatto sopra. In particolare il Lemma di Gronwall è utile nella dimostrazione di risultati di dipendenza continua della soluzione dai dati e di esistenza di soluzioni globali o almeno massimali.

5. Frattali autosimili

Diamo solo un cenno senza entrare nei dettagli delle dimostrazioni. Siano date $m > 1$ similitudini $S_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ e siano $\lambda_i \in (0,1)$ i rispettivi rapporti di similitudine. Se rappresentiamo gli elementi di $\mathbb{R}^N$ mediante le basi canoniche, abbiamo pertanto che $S_i(x) = \overline{x}_i + \lambda_i M_i x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^N$, ove $\overline{x}_i \in \mathbb{R}^N$ sono fissati e $M_i \in \mathbb{R}^{N\times N}$ sono matrici ortogonali assegnate. Segue che $|S_i(x) - S_i(y)| = \lambda_i |x-y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$, per cui ciascuna delle S_i è una contrazione in $\mathbb{R}^N$. Ci proponiamo di risolvere il problema seguente:

$$\textit{Trovare } K \subset \mathbb{R}^N \textit{ non vuoto, diverso da } \mathbb{R}^N \textit{ e tale che } \quad K = \bigcup_{i=1}^m S_i(K). \tag{5.1}$$

Nella (5.1) l'insieme $S_i(K)$ è l'immagine di K tramite S_i, cioè l'insieme $\{S_i(x) : \; x \in K\}$.

Un insieme K verificante la (5.1) risulta l'unione dei suoi sottoinsiemi $S_i(K)$, tutte copie rimpicciolite di K stesso, e per questo motivo è detto *autosimile*. In molti casi esso ha una struttura complessa, precisamente quando i sottoinsiemi $S_i(K)$ sono fra loro (essenzialmente) disgiunti. In tali condizioni K viene annoverato fra i cosiddetti *frattali*. Nella (5.1), infine, abbiamo escluso i casi $K = \emptyset$ e $K = \mathbb{R}^N$ dato che questi sarebbero, banalmente, sempre soluzioni.

Il Teorema delle contrazioni è un possibile strumento per affrontare il problema. Per poterlo utilizzare dobbiamo vedere le soluzioni di (5.1) come punti fissi di un'applicazione $\mathcal{F}$ che manda insiemi in insiemi e definire una metrica in modo che $\mathcal{F}$ sia una contrazione, naturalmente nell'ipotesi $\lambda_i < 1$ per ogni i che abbiamo fatto fin dall'inizio. Poniamo ovviamente

$$\mathcal{F}(K) = \bigcup_{i=1}^m S_i(K) \tag{5.2}$$

e ciò, in un primo momento, per ogni $K \subseteq \mathbb{R}^N$, riservandoci però di restringere la variabilità di K quanto necessario. Veniamo alla costruzione della distanza che funziona bene in questa circostanza.

5.1. Definizione. *Poniamo* $I_r(A) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^N : \; \mathrm{dist}(x,A) \le r\bigr\}$ *per ogni* $A \subseteq \mathbb{R}^N$ *non vuoto e* $r \ge 0$ *e, se* A *e* B *sono sottoinsiemi non vuoti e limitati di* $\mathbb{R}^N$, *definiamo*

$$d_{\mathcal{H}}(A,B) = \inf\{r \ge 0 : \; A \subseteq I_r(B) \text{ e } B \subseteq I_r(A)\} \tag{5.3}$$

e chiamiamo $d_{\mathcal{H}}(A,B)$ *la loro distanza di Hausdorff.*

Il numero reale $\mathrm{dist}(x,A)$ è la distanza (euclidea) di x da A (vedi Esercizio 1.3 con la metrica euclidea). Se $r > 0$ l'insieme $I_r(A)$ può essere chiamato intorno (chiuso) di A e raggio r e coincide con la solita palla chiusa di centro x_0 se A è ridotto al solo punto x_0. Se invece $r = 0$ si ha $I_0(A) = \overline{A}$, la chiusura di A. Se A e B sono limitati allora $A \subseteq I_r(B)$ e $B \subseteq I_r(A)$ se r è abbastanza grande, altrimenti potrebbe non esistere alcun r nelle condizioni richieste. Per questo motivo è stata fatta l'ipotesi di limitatezza nel dare la (5.3).

Ora è ovvio che $d_{\mathcal{H}}$ gode della proprietà simmetrica e non è particolarmente difficile vedere che vale anche la disuguaglianza triangolare. Ciò che è falso è che $d_{\mathcal{H}}(A,B) = 0$ implichi $A = B$. Infatti si vede facilmente che la condizione $d_{\mathcal{H}}(A,B) = 0$ equivale al verificarsi simultaneo delle due condizioni $A \subseteq \overline{B}$ e $B \subseteq \overline{A}$. Ma tale accoppiata equivale ad $A = B$ se A e B sono entrambi chiusi. Siamo dunque indotti a considerare insiemi non solo non vuoti e limitati, ma anche chiusi, cioè compatti non vuoti.

5.2. Definizione. *Denotiamo con* $\mathcal{K}$ *l'insieme dei compatti non vuoti di* $\mathbb{R}^N$. *Inoltre definiamo* $\mathcal{F} : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ *e* $d_{\mathcal{H}} : \mathcal{K}^2 \to \mathbb{R}$ *mediante le formule* (5.2) *e* (5.3) *rispettivamente.*

Osserviamo che $\mathcal{F}$ opera effettivamente a valori in $\mathcal{K}$, in quanto, se $K \in \mathcal{K}$, l'insieme $\mathcal{F}(K)$ è l'unione di un numero finito di compatti (non vuoti), dato che le similitudini sono funzioni continue. Inoltre la funzione $d_{\mathcal{H}}$ appena definita è effettivamente una metrica, proprio perché ci siamo limitati ai compatti non vuoti. Ecco allora il risultato che risolve il problema (5.1):

5.3. Teorema. *Lo spazio metrico* $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$ *è completo. Inoltre vale la disuguaglianza*

$$d_{\mathcal{H}}(\mathcal{F}(K_1), \mathcal{F}(K_2)) \le \alpha\, d_{\mathcal{H}}(K_1, K_2) \quad \text{per ogni } K_1, K_2 \in \mathcal{K} \quad \text{ove} \quad \alpha = \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}\,.$$

In particolare $\mathcal{F}$ *è una contrazione se* $\lambda_i < 1$ *per* $i = 1, \dots, m$.

Dunque, se tutti i rapporti di similitudine sono < 1, possiamo applicare il Teorema delle contrazioni e dedurre che esiste un e un solo compatto non vuoto che verifica il problema (5.1). Non solo. Per l'ultima parte del Teorema delle contrazioni abbiamo quanto segue: fissato ad arbitrio $K_0 \in \mathcal{K}$ e definita la successione $\{K_n\}$ mediante la formula ricorrente $K_{n+1} = \mathcal{F}(K_n)$, abbiamo che tale successione converge, nel senso dello spazio metrico considerato, all'unico compatto K non vuoto e autosimile.

5.4. Esempio. Si consideri il caso $N = 1$ e $m = 2$ e siano S_i definite dalle formule

$$S_1(x) = \frac{x}{3} \quad \text{e} \quad S_2(x) = 1 - \frac{1-x}{3}\,.$$

L'unico compatto non vuoto autosimile è detto in questo caso *insieme di Cantor*. Sue approssimazioni possono essere ottenute come si è appena detto partendo da un compatto non vuoto K_0 qualunque, ad esempio $K_0 = \{0\}$ oppure $K_0 = [0,1]$. Limitandoci ai valori $n = 1, 2$, nel primo caso si ottengono gli insiemi $K_1 = \{0, 2/3\}$, $K_2 = \{0, 1/3, 2/3, 8/9\}$, mentre nel secondo si ha $K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$, $K_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Si consiglia di disegnare quanto si ottiene e di proseguire di qualche passo nell'approssimazione. Ne vale la pena.

5.5. Osservazione. Il caso dell'insieme di Cantor è tipico e la sua struttura frattale è dovuta al fatto seguente: l'intervallo *aperto* $(0,1)$ è trasformato dalle due similitudini in due suoi *sottoinsiemi disgiunti*, precisamente gli intervalli $(0, 1/3)$ e $(2/3, 1)$. Ebbene, una situazione simile si verifica in generale quando esiste un *aperto limitato* A tale che le sue immagini $S_i(A)$ siano suoi *sottoinsiemi disgiunti*. In tali condizioni, se K è il frattale autosimile, vi è un numero reale, in generale non intero, che a buon diritto può essere chiamato *dimensione di* K (la giustificazione di tale affermazione sta nella Teoria Geometrica della Misura). Esso è l'unico $s \in (0, +\infty)$ tale che

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^s = 1. \tag{5.4}$$

Controlliamo solo che, effettivamente, l'equazione (5.4) ha una e una sola soluzione $s \in (0, +\infty)$. Se denotiamo con $\phi(s)$ il primo membro, otteniamo una funzione $\phi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua. Siccome $\phi(0^+) = m > 1$ e $\lim_{s \to +\infty} \phi(s) = 0 < 1$ dato che $\lambda_i < 1$ per ogni i, deduciamo l'esistenza di una soluzione. D'altra parte ϕ è strettamente decrescente, sempre perché $\lambda_i < 1$ per ogni i. Dunque la soluzione è unica. Nel caso dell'insieme di Cantor si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/3$, da cui $s = \ln 2 / \ln 3$.