Convergenza uniforme delle serie di potenze

Il risultato di convergenza uniforme che presentiamo dovrebbe essere attribuito, almeno in larga misura, ad Abel. Trattiamo, senza perdita di generalità, solo il caso di serie centrate nell'origine. In particolare, la notazione z_0 che usiamo sistematicamente non indica il centro della serie. Nel seguito indichiamo con $D_r(z)$ il disco aperto di centro z e raggio $r > 0$.

Nel teorema gioca un ruolo essenziale l'insieme oggetto della definizione seguente. Dati un numero complesso $z_0 \neq 0$ e $M > 0$ definiamo il cosiddetto *angolo di Stolz* $A(z_0, M)$ mediante la formula

$$A(z_0, M) := \{z : \ |z - z_0| \leq M(|z_0| - |z|)\}. \tag{1}$$

Dalla disuguaglianza sempre vera $|z_0| - |z| \leq |z - z_0|$ segue che la definizione è significativa solo se $M > 1$ (l'insieme si riduce al segmento di estremi 0 e z_0 se $M = 1$ e risulta addirittura vuoto se $M < 1$). Si noti inoltre che $A(z_0, M) \subseteq D_{|z_0|}(0)$ dato che $z \in A(z_0, M)$ implica $M(|z_0| - |z|) \geq |z - z_0| \geq 0$.

Proposizione. *Siano $z_0 \neq 0$ e $R = |z_0|$. Allora, per ogni $M > 0$, l'angolo di Stolz $A(z_0, M)$ è un sottoinsieme convesso e chiuso di $\overline{D}_R(0)$ e valgono le due proprietà seguenti:*
i) per ogni $M > 0$ e $\varepsilon > 0$, esiste $r \in (0, R)$ tale che

$$A(z_0, M) \setminus D_\varepsilon(z_0) \subset \overline{D}_r(0)\,; \tag{2}$$

ii) per ogni $r \in (0, R)$, esiste $M > 0$ tale che

$$A(z_0, M) \supset \overline{D}_r(0). \tag{3}$$

Infine, per ogni $\alpha_0 \in (0, \pi/2)$, l'angolo di Stolz $A(z_0, 1/\cos\alpha_0)$ è incluso nell'angolo A_{α_0} di ampiezza $2\alpha_0$ avente vertice in z_0 e come bisettrice la semiretta S_0 uscente da z_0 e passante per l'origine. In particolare ogni angolo di Stolz è incluso in un angolo A_{α_0} del tipo detto.

Dimostrazione. La chiusura di $A(z_0, M)$ è ovvia. Verifichiamo la convessità. Siano $z_1, z_2 \in A(z_0, M)$ e $t \in [0, 1]$ e controlliamo che anche il punto $z = tz_1 + (1-t)z_2$ appartiene ad $A(z_0, M)$. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned}
&|z - z_0| = |t(z_1 - z_0) + (1 - t)(z_2 - z_0)| \leq t|z_1 - z_0| + (1 - t)|z_2 - z_0| \\
&\leq tM(|z_0| - |z_1|) + (1 - t)M(|z_0| - |z_2|) = M|z_0| - M(t|z_1| + (1 - t)|z_2|) \\
&\leq M\big(|z_0| - |tz_1 + (1 - t)z_2|\big) = M(|z_0| - |z|).
\end{aligned}$$

Verifichiamo i). Se $z \notin D_\varepsilon(z_0)$ allora $|z - z_0| \geq \varepsilon$ e l'appartenenza di z ad $A(z_0, M)$ implica

$$|z_0| - |z| \geq \frac{1}{M}\,|z - z_0| \geq \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{da cui} \quad |z| \leq |z_0| - \frac{\varepsilon}{M} = R - \frac{\varepsilon}{M}\,.$$

Dunque, se $\varepsilon/M > R$ non vi sono punti z nelle condizioni dette mentre se $\varepsilon/M = R$ l'unico z ammesso è 0: in tali condizioni possiamo scegliere $r \in (0, R)$ come ci pare. Se invece $\varepsilon/M < R$, la (2) vale con $r = R - \varepsilon/M$. Verifichiamo ii). Se $|z| \leq r < R$ allora

$$\frac{|z - z_0|}{|z_0| - |z|} \leq \frac{|z_0| + |z|}{|z_0| - |z|} \leq \frac{R + r}{R - r}$$

per cui $z \in A(z_0, M)$ con $M = (R+r)/(R-r)$. Dimostriamo infine l'ultima proprietà cercando di esprimere in modo opportuno l'appartenenza del generico z a un angolo di Stolz. Prendiamo come parametro il valore M, che supponiamo senz'altro > 1 in modo che $A(z_0, M)$ non sia banale, ed esprimiamo z in termini dell'angolo $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ che la semiretta uscente da z_0 e passante per z forma con la semiretta S_0 dell'enunciato. La rappresentazione di z è dunque la seguente (con $\rho \ge 0$):

$$z = z_0 + \rho e^{i(\vartheta_0 + \pi + \alpha)}.$$

Rappresentato z_0 in forma esponenziale usuale, cioè $z_0 = Re^{i\vartheta_0}$, abbiamo

$$\begin{aligned} &|z|^2 = |z_0 + (z - z_0)|^2 = |z_0|^2 + |z - z_0|^2 + 2\operatorname{Re}\bigl(\overline{z_0}\,(z - z_0)\bigr) \\ &\quad = R^2 + \rho^2 + 2R\rho \operatorname{Re} e^{i(\pi+\alpha)} = R^2 + \rho^2 + 2R\rho\cos(\pi+\alpha) = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\alpha. \end{aligned}$$

D'altra parte la condizione $z \in A(z_0, M)$ equivale a $|z - z_0| \le M(R - |z|)$ e si può riscrivere come

$$|z| \le R - \frac{1}{M}\,|z - z_0|$$

vale a dire

$$R - \frac{1}{M}\,|z - z_0| \ge 0 \quad \text{e} \quad |z|^2 \le \Bigl(R - \frac{1}{M}\,|z - z_0|\Bigr)^2. \tag{4}$$

La prima delle (4) è $\rho \le RM$, cioè l'appartenenza di z al disco $\overline{D}_{RM}(z_0)$. Esplicitiamo la seconda. Grazie al calcolo fatto di $|z|^2$, essa equivale a ciascuna delle condizioni seguenti, che scriviamo l'una dopo l'altra (ricordiamo che $M > 1$)

$$\begin{aligned} &R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\alpha \le R^2 + \frac{1}{M^2}\,\rho^2 - \frac{2}{M}\,R\rho \\ &\Bigl(1 - \frac{1}{M^2}\Bigr)\rho \le 2R\cos\alpha - \frac{2}{M}\,R \\ &\rho \le \frac{M^2}{M^2 - 1}\,2R\Bigl(\cos\alpha - \frac{1}{M}\Bigr). \end{aligned}$$

Ricordando anche la prima delle (4), abbiamo pertanto

$$z \in A(z_0, M) \quad \text{se e solo se} \quad \rho \le RM \quad \text{e} \quad \rho \le \frac{M^2}{M^2 - 1}\,2R\Bigl(\cos\alpha - \frac{1}{M}\Bigr). \tag{5}$$

A questo punto si danno due casi: $\cos\alpha < 1/M$ e $\cos\alpha \ge 1/M$. Nel primo non vi è alcun $\rho \ge 0$ che riesce a soddisfare la seconda delle (5). Nel secondo caso, invece, vi sono valori $\rho \ge 0$ ammessi. Allora, se prendiamo (in accordo con l'enunciato)

$$M = \frac{1}{\cos\alpha_0} \tag{6}$$

abbiamo $1/M = \cos\alpha_0$ e $M^2/(M^2-1) = 1/\sin^2\alpha_0$ e il secondo caso si ha se e solo se $\cos\alpha \ge \cos\alpha_0$, cioè se e solo se $|\alpha| \le \alpha_0$. Ricordando anche la prima delle (4), abbiamo dunque

$$z \in A(z_0, M) \quad \text{se e solo se} \quad \rho \le \frac{R}{\cos\alpha_0} \quad \text{e} \quad \rho \le \frac{2R}{\sin^2\alpha_0}\,(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

In particolare $A(z_0, M)$ è incluso nell'angolo prefissato A_{α_0}.

A questo punto, chiarito il significato della (1), possiamo enunciare il teorema nella forma seguente:

Teorema di convergenza uniforme. *Siano*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{7}$$

una serie di potenze a coefficienti complessi, $z_0 \ne 0$ un punto in cui la serie converge e $M > 1$. Allora la serie converge uniformemente nell'angolo di Stolz $A(z_0, M)$.

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso particolare $z_0 = 1$. Dunque l'ipotesi diventa: la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \tag{8}$$

converge. Introduciamo le sue ridotte

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

e verifichiamo preliminarmente che, per ogni numero complesso z e per ogni coppia di interi $n \ge 0$ e $p > 1$, vale la formula

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k z^k = (1-z)\sum_{k=1}^{p-1}(S_{n+k} - S_n)z^{n+k} + (S_{n+p} - S_n)z^{n+p} \tag{9}$$

ragionando per induzione su p partendo sistematicamente dal secondo membro. Se $p = 2$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&(1-z)\sum_{k=1}^{p-1}(S_{n+k} - S_n)z^{n+k} + (S_{n+p} - S_n)z^{n+p} \\
&= (1-z)(S_{n+1} - S_n)z^{n+1} + (S_{n+2} - S_n)z^{n+2} \\
&= (1-z)c_{n+1}z^{n+1} + (c_{n+2} + c_{n+1})z^{n+2} = c_{n+1}z^{n+1} + c_{n+2}z^{n+2}
\end{aligned}$$

cioè la (9), appunto con $p = 2$. Sia ora $p \geq 2$ tale che la (9) valga per ogni n: dimostriamo che la stessa vale per ogni n con $p+1$ al posto di p. Abbiamo infatti (nella seconda uguaglianza applichiamo l'ipotesi di induzione)

$$\begin{aligned}
&(1-z)\sum_{k=1}^{p}(S_{n+k}-S_n)z^{n+k} + (S_{n+p+1}-S_n)z^{n+p+1} \\
&= (1-z)\sum_{k=1}^{p-1}(S_{n+k}-S_n)z^{n+k} + (S_{n+p}-S_n)z^{n+p} \\
&\quad + (1-z)(S_{n+p}-S_n)z^{n+p} + (S_{n+p+1}-S_n)z^{n+p+1} - (S_{n+p}-S_n)z^{n+p} \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k z^k + (S_{n+p+1}-S_{n+p})z^{n+p+1} \\
&= \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k z^k + c_{n+p+1}z^{n+p+1} = \sum_{k=n+1}^{n+p+1} c_k z^k.
\end{aligned}$$

Stabilita la (9), verifichiamo la condizione di Cauchy in $A(1, M)$. Fissiamo dunque $\varepsilon > 0$ ad arbitrio e cerchiamo m tale che per $n \geq m$, $p > 1$ e $z \in A(1, M)$ risulti

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k z^k\Big| \leq \varepsilon. \tag{10}$$

Sfruttando la convergenza della (8), fissiamo m tale che per $n \geq m$ e $p > 1$ valga la (10) con $z = 1$, vale a dire

$$|S_{n+p} - S_n| = \Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k\Big| \leq \varepsilon$$

e mostriamo che tale m fa al caso nostro. Siano dunque $n \geq m$, $p > 1$ e $z \in A(1, M)$ Possiamo supporre $z \neq 1$ dato che la (10) con $z = 1$ vale per le nostre scelte. Osserviamo allora che la condizione $z \in A(1, M)$ implica $|z| < 1$. Applicando la (9) abbiamo

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k z^k\Big| \leq |1-z|\sum_{k=1}^{p-1}|S_{n+k}-S_n|\,|z|^{n+k} + |S_{n+p}-S_n|\,|z|^{n+p} \\
&\leq |1-z|\,\varepsilon\sum_{k=1}^{p-1}|z|^{n+k} + \varepsilon|z|^{n+p} = |1-z|\,\varepsilon\,\frac{|z|^{n+1}-|z|^{n+p}}{1-|z|} + \varepsilon|z|^{n+p} \\
&\leq |1-z|\,\varepsilon\,\frac{|z|^{n+1}}{1-|z|} + \varepsilon|z|^{n+p} \leq |1-z|\,\varepsilon\,\frac{1}{1-|z|} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Essendo $|1-z| \leq M(1-|z|)$, concludiamo che

$$\Big|\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k z^k\Big| \leq (M+1)\varepsilon$$

vale a dire la (10) con $(M+1)\varepsilon$ al posto di ε.

Nel caso generale, eseguiamo il cambiamento di variabile $z = z_0 w$. Allora la (1) diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n z_0^n) w^n \tag{11}$$

e questa converge in $w = 1$. Dunque, per la prima parte, essa converge uniformemente nell'angolo di Stolz $A(1, M)$. Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia m tale che per ogni coppia di interi $n \geq m$ e $p > 1$ risulti

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} (c_n z_0^n) w^n \Big| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } w \in A(1, M)$$

vale a dire

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_n \, (z_0 w)^n \Big| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } w \in A(1, M).$$

Essendo

$$\begin{aligned} A(z_0, M) &= \{ z : \ |z - z_0| \leq M(|z_0| - |z|) \} \\ &= \{ z_0 w : \ |w - 1| \leq M(|w| - 1) \} = \{ z_0 w : \ w \in A(1, M) \} \end{aligned}$$

concludiamo che

$$\Big| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_n z^n \Big| \leq \varepsilon \quad \text{per ogni } z \in A(z_0, M).$$

Pertanto la condizione di Cauchy per la convergenza uniforme nell'angolo di Stolz assegnato è soddisfatta e la serie (7) converge uniformemente.

Corollario. *Nelle condizioni del teorema, la restrizione della somma della serie* (7) *all'angolo di Stolz $A(z_0, M)$ è continua.*

Osservazione. Il Teorema e il Corollario forniscono, grazie alla proprietà *ii*) della Proposizione, la convergenza uniforme e la continuità della restrizione della somma a ogni disco $D_r(0)$ con r minore del raggio di convergenza della serie. Ma questi fatti sono ben noti con dimostrazioni sostanzialmente elementari. L'interesse è dato dal caso in cui $|z_0|$ valga proprio il raggio di convergenza a la serie valutata in z_0 converga solo semplicemente, altrimenti il Criterio di Weierstrass fornirebbe la convergenza uniforme e quindi la continuità in tutto il disco chiuso $D_{|z_0|}(0)$. In termini di successioni convergenti a z_0, la continuità della restrizione considerata nel Corollario si esprime come segue: detta f la funzione espressa dalla somma della serie, se $\{z_n\}$ è una successione convergente a z_0 i cui elementi appartengono a un fissato angolo di Stolz, allora la successione $\{f(z_n)\}$ converge a $f(z_0)$. Per quanto visto nella Proposizione, tale condizione sulla successione equivale alla seguente: tutti gli z_n appartengono a uno stesso angolo di tipo A_{α_0} con $\alpha_0 < \pi/2$. Sfuggono dunque le successioni con incrementi $z_n - z_0$ che tendono a disporsi parallelamente al bordo $\partial D_{|z_0|}(0)$, per le quali la convergenza desiderata dei valori di f potrebbe essere falsa.