Analisi Matematica 1

Prova scritta 30/06/10	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Per ogni rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$ (anche degenere) sia $m(R)$ il numero dei punti di $R \cap \mathbb{Z}^2$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -2$ se $x \in (0,2] \times (0,3)$, $f(x) = -7$ se $x \in (-1,0) \times (0,1]$, $f(x) = 3$ se $x \in \{0\} \times [0,3]$ e $f(x) = 0$ altrimenti. Allora $\int_{\mathbb{R}^2} f\,dm$ vale [a] -4 ; [■] 4 ; [c] 3 ; [d] -2 .

2. Sia $\nu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $\nu(x,y) = y$ se $x = y > 0$ e $\nu(x,y) = \sin(xy)$ altrimenti. Allora ν è [■] differenziabile in $(0,1)$; [b] discontinua in $(0,0)$; [c] differenziabile in $(0,0)$; [d] continua in $\mathbb{R}^2$.

3. Per $r \in \mathbb{R}$ sia $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f_r(x) = 4\sinh(3x)$ se $x < 0$ e $f_r(x) = r\ln(1+6x)$ se $x \geq 0$. Allora f_r è differenziabile se r vale [a] 6 ; [b] 3 ; [■] 2 ; [d] 4 .

4. La funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 e verifica $e^{4x}u^4(x) + e^{2x}u^2(x) = 20$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $u(0) = 2$. Allora $u'(0)$ vale [a] 2 ; [b] $-1/2$; [c] $1/2$; [■] -2 .

5. Se $z = 4 + 3i$ allora $|(z/5)e^z|$ vale [■] e^4 ; [b] e^3 ; [c] 1 ; [d] e^5 .

6. Sia $\alpha > 0$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^5 \sinh^2(n^{-\alpha}) \arctan n^4$ converge se [■] $\alpha > 3$; [b] $\alpha > 2$; [c] $\alpha < 3$; [d] $\alpha = 3$.

7. Per $x \in \mathbb{R}$ sia $F(x) = \int_3^x f(t)\,dt$, ove $f(t) = 0$ se $t \leq 1$ e $f(t) = \sqrt{t}\,\ln(2t)$ se $t > 1$. Allora F è [a] discontinua in 1 ; [b] differenziabile in $\mathbb{R}$; [■] monotona; [d] non negativa.

8. Sia $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to 0} \psi(x) = 5$. Allora esiste $\delta \in (0,1)$ tale che [a] $\psi(x) > 0$ per $|x| \leq \delta$; [b] $\psi(x) > 0$ per $\delta \leq x \leq 1/\delta$; [■] $\psi(x) > 4$ per $3\delta \leq x \leq 5\delta$; [d] $\psi(x) < 6$ per $|x| \leq 3\delta$.

9. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $f(x,y) > 3$ se e solo se $x > 5$ e $y > 4$. Allora [a] $D_1 f(5,6) > 0$; [b] $D_2 f(7,4) > 0$; [■] $\nabla f(5,4) = (0,0)$; [d] $f(-7,-6) < 3$.

10. Sia C la circonferenza di $\mathbb{R}^2$ avente centro nell'origine e raggio 3 . Allora l'integrale $\int_C (x_1)^+ (x_2^5)^+ \, ds(x_1,x_2)$ vale [■] $3^7/6$; [b] $3^6/6$; [c] $3^6/7$; [d] $3^7/5$.

---

spazio riservato alla commissione