Analisi Matematica 1

Prova scritta 28/06/11	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 ,** **Bianca = 0 ,** **Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. La successione $\{a_n\}_{n\geq 1}$ data da $a_n = \big(\arctan^2(2/n)\tanh^2 n\big)/\big(1-e^{-\pi/n^2}\big)$ [a] diverge; [b] converge a $4/\pi$; [c] è infinitesima; [d] converge a π^2 .

2. Sia $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to(0,0,0)}|g(x)| = 2$. Allora esiste $\delta>0$ tale che [a] $|g(x)|<1/\delta$ se $|x|\leq\delta$; [b] $|g(x)-2|\leq 1$ se $0<|x|<\delta$; [c] $|g(x)|\leq 2$ se $0<|x|<\delta$; [d] $|g(x)|\geq 3$ se $|x|>1/\delta$.

3. Siano $\lambda\in\mathbb{R}$ e $f:[0,5]\to\mathbb{R}$ integrabile tale che $\int_0^5 f(x)\,dx=\lambda$. Allora [a] $f(x)\geq\lambda/5$ per ogni $x\in[0,5]$; [b] f è discontinua al più in un numero finito di punti; [c] esiste $g:[0,5]\to\mathbb{R}$ continua tale che $g\geq f$ e $\int_0^5 g(x)\,dx<\lambda+1$; [d] esiste $g:[0,5]\to\mathbb{R}$ a scala tale che $g\geq f^3$ e $\int_0^5 g(x)\,dx<\lambda^3+1$.

4. Sia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ biiettiva di classe C^1 con l'inversa $g=h^{-1}$. Se $g(3)=2$ allora [a] $h'(3)g'(3)=1$; [b] $h'(2)g'(2)=1$; [c] $h'(0)\neq 0$; [d] $h'(3)g'(2)=1$.

5. Sia $\alpha\in\mathbb{R}$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}2^{-\alpha n}$ [a] converge se e solo se $\alpha\geq 0$; [b] converge se e solo se $\alpha>0$; [c] diverge se $\alpha\in(0,1)$; [d] oscilla se $\alpha<0$.

6. Siano $\sigma\in\mathbb{R}$ e $f_\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f_\sigma(x)=x^{1/2}\sinh(\sigma x^{1/2})$ se $x>0$ e $f_\sigma(x)=x$ se $x\leq 0$. Allora nell'origine f_σ è [a] discontinua per almeno un σ ; [b] continua ma non differenziabile per ogni σ ; [c] differenziabile per ogni σ ; [d] differenziabile per uno e un solo σ .

7. Sia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continua e la funzione $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ data da $F(x)=\int_x^{2x} f(y)\,dy$ sia costante. Allora [a] f è di classe C^1 ; [b] f è monotona; [c] $f(6)=(1/2)f(3)$; [d] $f(x)=1/x$ per ogni $x>0$.

8. Per ogni intervallo limitato $E\subset\mathbb{R}$ si ponga $m(E)=\int_a^b \arctan^+ x\,dx$ ove a e b sono gli estremi di E . Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=\ln 2$ se $x\in(-3,-2)$, $f(x)=2/\ln 2$ se $x\in[-2,1]$ e $f(x)=0$ altrimenti e sia $I=\int_{\mathbb{R}} f\,dm$. Allora la somma $1+I$ vale [a] $(\ln 4)/\pi$; [b] $\ln 4$; [c] $\pi/\ln 4$; [d] π .

9. Siano $x_0=(1,2,0)$ e $f:\mathbb{R}^3\to(0,+\infty)$ differenziabile tale che $\nabla f(x_0)=(0,6,2)$ e $f(x_0)=3$. Allora $D_3(\ln f)(x_0)$ vale [a] 2 ; [b] 3 ; [c] $2/3$; [d] $3/2$.

10. Sia $A=\big\{z\in\mathbb{C}:\ \operatorname{Im} z>0,\ z^9+3z^2=0\big\}$. Allora il numero degli elementi A è [a] 3 ; [b] 4 ; [c] 0 ; [d] 2 .

---

spazio riservato alla commissione