

Concetti di Analisi Matematica di Base

Appello del giorno 26/09/05	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (M/F)
--	--	-------------------

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così:

Punti per ogni risposta: **Esatta = 3**, **Bianca = 0**, **Errata = -1**.

Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti**.

1. Per $r > 0$ si ponga $C_r = \{x \in \mathbb{R}^4 : r < |x| < 2r\}$ e sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Allora esiste $r > 0$ tale che $f(x) \leq 5$ per ogni $x \in C_{4r}$; f è limitata in C_r ; f è continua in $\mathbb{R}^4 \setminus C_r$; $|f(x)| \leq 1$ se $x \in C_r$.
2. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\pi\}$ e sia $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = \text{sign}(x) \cdot \text{sign}(y) + \text{sign}(z) + 1$. Allora $\int_S f(x, y, z) dS(x, y, z)$ vale: 8π ; 16π ; $16\pi^2$; $8\pi^2$.
3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $D_1 f(0, 0) = 3$ e $f(0, y) = 4y + y^3$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Allora $|\nabla f(0, 0)|$ vale 3; 5; 7; 4.
4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n 2^{-n^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) converge assolutamente se e solo se $|x| < 1$; diverge per almeno un $x > 0$; converge assolutamente per ogni $x < 0$; converge semplicemente per almeno un $x < 0$.
5. Siano $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x$ se $x < 0$ e $f(x) = \tanh x$ se $x > 0$. Allora f è di classe C^1 ; discontinua in almeno un punto; continua ma non ovunque differenziabile; limitata.
6. Sia $a_n = (1 + n + (-1)^n n^2) (\exp(1/n^2) - 1)$ per $n > 0$ intero. Allora: $\{a_n\}$ è limitata; $\{a_n\}$ converge; $\sum a_n$ è a termini positivi; $\sum a_n$ converge.
7. Nello sviluppo $\sqrt[3]{8+6x} = a + bx + o(x)$ per $x \rightarrow 0$ il coefficiente b vale $1/2$; $3/2$; 4; 12.
8. L'integrale $\int_0^1 \tanh^2 x dx$ vale $\tanh 1$; $1 - \tanh 1$; $1 + \tanh 1$; $-\tanh 1$.
9. Sia $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow (0, +\infty)$ di classe C^1 tale che $u^2(x, y) + 8u(x, y) = xy$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $u(7, 5) = 6$. Allora $\partial_x u(7, 5)$ vale $-7/8$; 0; $1/4$; 5.
10. Se $J \subset \mathbb{R}$ è un intervallo limitato si denoti con $\mathcal{L}(J)$ la sua lunghezza e si ponga $\delta(J) = 1$ se $J \ni -5$ e $\delta(J) = 0$ se $J \not\ni -5$. Sia $X = [-10, 10]$ e, se $I \subseteq X$ è un intervallo, si definisca $m(I) = 2\mathcal{L}(I \cap [5, 10]) + 3\delta(I)$. Sia infine $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1$ se $x < -6$; $f(x) = 4$ se $-6 \leq x \leq 8$; $f(x) = 0$ altrimenti. Allora $\int_X f(x) dm(x)$ vale: 60; 36; 0; 5.

spazio riservato alla commissione