Concetti di Analisi Matematica di Base

Appello del giorno	**Cognome e nome (stampatello chiaro)**	**C.L. (M/F)**
26/09/05		

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Per $r > 0$ si ponga $C_r = \{x \in \mathbb{R}^4 : r < |x| < 2r\}$ e sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = -\infty$. Allora esiste $r > 0$ tale che $\boxed{\text{a}}$ $f(x) \le 5$ per ogni $x \in C_{4r}$; $\boxed{\text{b}}$ f è limitata in C_r ; $\boxed{\text{c}}$ f è continua in $\mathbb{R}^4 \setminus C_r$; $\boxed{\text{d}}$ $|f(x)| \le 1$ se $x \in C_r$.

2. Sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\pi\}$ e sia $f : S \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x, y, z) = \mathrm{sign}(x) \cdot \mathrm{sign}(y) + \mathrm{sign}(z) + 1$. Allora $\int_S f(x, y, z)\, dS(x, y, z)$ vale: $\boxed{\text{a}}$ 8π ; $\boxed{\text{b}}$ 16π ; $\boxed{\text{c}}$ $16\pi^2$; $\boxed{\text{d}}$ $8\pi^2$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile tale che $D_1 f(0, 0) = 3$ e $f(0, y) = 4y + y^3$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Allora $|\nabla f(0, 0)|$ vale $\boxed{\text{a}}$ 3 ; $\boxed{\text{b}}$ 5 ; $\boxed{\text{c}}$ 7 ; $\boxed{\text{d}}$ 4 .

4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n 2^{-n^2}$ ($x \in \mathbb{R}$) $\boxed{\text{a}}$ converge assolutamente se e solo se $|x| < 1$; $\boxed{\text{b}}$ diverge per almeno un $x > 0$; $\boxed{\text{c}}$ converge assolutamente per ogni $x < 0$; $\boxed{\text{d}}$ converge semplicemente per almeno un $x < 0$.

5. Siano $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 2x$ se $x < 0$ e $f(x) = \tanh x$ se $x > 0$. Allora f è $\boxed{\text{a}}$ di classe C^1 ; $\boxed{\text{b}}$ discontinua in almeno un punto; $\boxed{\text{c}}$ continua ma non ovunque differenziabile; $\boxed{\text{d}}$ limitata.

6. Sia $a_n = \big(1 + n + (-1)^n n^2\big)\big(\exp(1/n^2) - 1\big)$ per $n > 0$ intero. Allora: $\boxed{\text{a}}$ $\{a_n\}$ è limitata; $\boxed{\text{b}}$ $\{a_n\}$ converge; $\boxed{\text{c}}$ $\sum a_n$ è a termini positivi; $\boxed{\text{d}}$ $\sum a_n$ converge.

7. Nello sviluppo $\sqrt[3]{8 + 6x} = a + bx + o(x)$ per $x \to 0$ il coefficiente b vale $\boxed{\text{a}}$ $1/2$; $\boxed{\text{b}}$ $3/2$; $\boxed{\text{c}}$ 4 ; $\boxed{\text{d}}$ 12 .

8. L'integrale $\int_0^1 \tanh^2 x\, dx$ vale $\boxed{\text{a}}$ $\tanh 1$; $\boxed{\text{b}}$ $1 - \tanh 1$; $\boxed{\text{c}}$ $1 + \tanh 1$; $\boxed{\text{d}}$ $-\tanh 1$.

9. Sia $u : \mathbb{R}^2 \to (0, +\infty)$ di classe C^1 tale che $u^2(x, y) + 8u(x, y) = xy$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $u(7, 5) = 6$ Allora $\partial_x u(7, 5)$ vale $\boxed{\text{a}}$ $-7/8$; $\boxed{\text{b}}$ 0 ; $\boxed{\text{c}}$ $1/4$; $\boxed{\text{d}}$ 5 .

10. Se $J \subset \mathbb{R}$ è un intervallo limitato si denoti con $\mathcal{L}(J)$ la sua lunghezza e si ponga $\delta(J) = 1$ se $J \ni -5$ e $\delta(J) = 0$ se $J \not\ni -5$. Sia $X = [-10, 10]$ e, se $I \subseteq X$ è un intervallo, si definisca $m(I) = 2\mathcal{L}(I \cap [5, 10]) + 3\delta(I)$. Sia infine $f : X \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 1$ se $x < -6$; $f(x) = 4$ se $-6 \le x \le 8$; $f(x) = 0$ altrimenti. Allora $\int_X f(x)\, dm(x)$ vale: $\boxed{\text{a}}$ 60 ; $\boxed{\text{b}}$ 36 ; $\boxed{\text{c}}$ 0 ; $\boxed{\text{d}}$ 5 .

---

spazio riservato alla commissione