Analisi Matematica 1

Prova scritta 24/01/13	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. L'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che $1 < |e^{4z}| \le 2$ è [a] un semipiano; [■] una striscia; [c] un disco; [d] una corona circolare.

2. Siano $\mathbf{w} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\mathbf{w}(t) = (3t, 5t^2, 3t^3)$ e S l'immagine di $\mathbf{w}$. Allora il vettore $\mathbf{v} = (3, 0, -1)$ è [■] normale a S in $\mathbf{w}(1)$; [b] tangente a S in $\mathbf{w}(1)$; [c] normale a S in $\mathbf{w}(2)$; [d] tangente a S in $\mathbf{w}(2)$.

3. La funzione continua $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verifica $f(i) = 2 - 4i$. Allora esiste $\sigma > 0$ tale che [a] $|\operatorname{Re} f(z)| + |\operatorname{Im} f(z)| > 2$ se $|\operatorname{Re} z| < \sigma$; [b] $|f(z)| \ge 1$ se $|1 - \operatorname{Im} z| < \sigma$; [■] $\operatorname{Re} f(z) + \operatorname{Im} f(z) < -1/4$ se $|\operatorname{Re} z| + |1 - \operatorname{Im} z| < \sigma$; [d] $\operatorname{Im} f(z) < -1/2$ se $|\operatorname{Re} z| + |1 - \operatorname{Im} z| > \sigma$.

4. Sia $x_n = \ln(n^8 + n^5) - 2\int_1^{e^3 n^4} \frac{dx}{x}$ per $n = 1, 2, \ldots$. Allora il limite $\lim_{n\to\infty} x_n$ vale [a] 0 ; [b] 8 ; [c] -8 ; [■] -6 .

5. Siano $\alpha > 0$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = |y|^{6\alpha} + |x|^{5\alpha}$ se $xy = 0$ e $f(x, y) = 0$ se $xy \ne 0$. Allora f è differenziabile in $(0, 0)$ [■] se $\alpha > 1/5$; [b] se e solo se $\alpha > 1$; [c] per nessun $\alpha > 0$; [d] se $\alpha > 1/6$.

6. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 8x/(1 + 4x)$. Allora il limite $\lim_{x\to+\infty} ⨍_{[0,x]} f(y)\,dy$ vale [a] 8 ; [b] 4 ; [c] 0 ; [■] 2 .

7. Sia $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ e per ogni rettangolo $E \subset \mathbb{R}^2$ sia $m(E) = \text{lungh}(E \cap S)$. Se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è data da $f(x) = -2$ se $x \in (0, 1) \times (2, 3)$, $f(x) = 2$ se $x \in (1, 8) \times (-3, 3)$, $f(x) = 0$ altrimenti, allora $\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\,dm$ vale [a] 24 ; [b] 0 ; [■] 14 ; [d] 21 .

8. Sia $\alpha > 0$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \big(n^{5\alpha} + \tanh^{-5\alpha}(n^{7\alpha})\big) \sin(n^{-7\alpha})$ converge se e solo se [a] $\alpha > 1$; [b] $\alpha > 1/5$; [■] $\alpha > 1/2$; [d] $\alpha > 1/7$.

9. Se $u : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ verifica $u^3(x) = x^3 u^2(x) + 18x^9 - \big(x^3/u(x)\big) + (1/3)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $u(1) = 3$, allora $u'(1)$ vale [a] 6 ; [b] 3 ; [■] 9 ; [d] 18 .

10. Una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ verifica $\nabla f(7, -2, 4) = (3, 4, 5)$. Se r è un versore di $\mathbb{R}^3$, allora è impossibile che la derivata $D_r f(7, -2, 4)$ valga [■] $\sqrt{57}$; [b] $\sqrt{27}$; [c] $-\sqrt{27}$; [d] 0 .

---

spazio riservato alla commissione