Analisi Matematica 1

Prova scritta 22/01/14	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Detto A l'insieme $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z < 0,\ z^{80} = 1\}$, il numero degli elementi di A è [a] 20; [b] 19; [c] 21; [d] 22.

2. Per $x > 0$ si ponga $f(x) = x^5 e^{-2x}$ e $s(x) = \sup\{f(y) : y \in (0, x)\}$ e sia $Z = \{x > 0 : s'(x) = 0\}$. Allora $\inf Z$ vale [a] $5/2$; [b] $2/5$; [c] $3/2$; [d] $2/3$.

3. La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è continua in 0 e $\lim_{x\to 0} f(x) = 3$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che [a] $f(x) > 1$ se $|x|^8 > \delta$; [b] $f(x) \le 6$ se $\delta < x_1^8 < 2\delta$; [c] $f^2(x) \ge 6$ se $x_1^4 + x_2^4 < 2\delta$; [d] $f(x) \ge 3$ se $\delta < |x| < 2\delta$.

4. Posto $a_n = n^5\sqrt{4 + n^{10}} - n^{10}$ per $n \ge 1$, il limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ vale [a] 5; [b] 3; [c] 4; [d] 2.

5. Per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ponga $f(x, y) = y(y-6)(y^2-6)\ln x$ se $x > 0$ e $f(x, y) = 0$ se $x \le 0$. Allora il numero dei punti dell'asse y in cui f è continua è [a] 0; [b] 4; [c] infinito; [d] 2.

6. Il limite $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x y e^{-y/2}\,dy$ vale [a] $1/4$; [b] 9; [c] $1/9$; [d] 4.

7. Sia $\mathcal{I}$ il semianello degli intervalli limitati di $\mathbb{R}$. Per $I \in \mathcal{I}$ siano $m'(I)$ il numero degli elementi di $I \cap \mathbb{Z}$ e $m''(I) = \int_I (x)^+\,dx$. Sia m la misura prodotto $m' \times m''$ nel senso del prodotto di spazi di misura. Se $R = (3, 7) \times (-5, 8)$ allora $m(R)$ vale [a] 72; [b] 90; [c] 96; [d] 54.

8. Sia $\alpha > 0$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{5\alpha} \tanh(n^{-8\alpha})$ converge semplicemente [a] se $\alpha \ge 1/2$; [b] se e solo se $\alpha > 1/4$; [c] se $\alpha = 1/4$; [d] se e solo se $\alpha < 1/2$.

9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ biiettiva e si supponga che f e f^{-1} siano di classe C^1 e che $f(8) = 4$, $f'(8) = 5$, $f(5) = 2$ e $f'(5) = 1/9$. Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è data da $F(x, y) = (f(x), f(y))$, allora $\det D(F^{-1})(4, 2)$ vale [a] $1/45$; [b] $5/9$; [c] $9/5$; [d] 45.

10. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 verificante $f(4t, \pm 5t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Allora $\nabla f(4, -5)$ è [a] parallelo a $(4, 5)$; [b] perpendicolare a $(4, -5)$; [c] parallelo a $(4, -5)$; [d] perpendicolare a $(4, 5)$.

---

spazio riservato alla commissione