Analisi Matematica 1

Prova scritta **21/09/10**	**Cognome e nome (stampatello chiaro)**	**C.L. (Mat/Fis)**

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 ,** **Bianca = 0 ,** **Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. La funzione $u : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ di classe C^1 verifica $x^2 u^{1/2}(x) + u^{3/4}(x) = 2x^6$ per ogni $x > 0$ e $u(1) = 1$. Allora $u'(1)$ vale ■ 8; $\boxed{\text{b}}$ 6; $\boxed{\text{c}}$ 2; $\boxed{\text{d}}$ 4.

2. Per $z \in \mathbb{C}$ il numero complesso ze^z è reale ■ se $z = i\pi/2$; $\boxed{\text{b}}$ se $z = -i\pi$; $\boxed{\text{c}}$ se e solo se z è reale; $\boxed{\text{d}}$ se $\operatorname{Re} z = 0$.

3. Siano $I = [3, 7]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ tale che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $s : I \to \mathbb{R}$ a scala tale che $-s(x) < f(x) < s(x)$ per ogni $x \in I$ e $\int_I s(x)\,dx < \varepsilon$. Allora f $\boxed{\text{a}}$ è continua; $\boxed{\text{b}}$ può non essere integrabile; ■ è integrabile e $\int_I f(x)\,dx \geq 0$; $\boxed{\text{d}}$ è integrabile e $\int_I f(x)\,dx < 0$.

4. Sia $a_n = (-1)^n n^{-3} + \ln(1 + n^{-1/3})$ per $n = 1, 2, \ldots$. Allora $\boxed{\text{a}}$ la successione $\{a_n\}$ diverge; $\boxed{\text{b}}$ la serie $\sum a_n$ converge semplicemente; ■ la serie $\sum a_n$ diverge; $\boxed{\text{d}}$ la serie $\sum a_n$ converge assolutamente.

5. Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 4. Allora la media $⨍_\Gamma (x_1)^+ (x_2)^+ \, ds$ (ove $(\ )^+$ è la parte positiva) vale $\boxed{\text{a}}$ $1/(2\pi)$; $\boxed{\text{b}}$ $1/\pi$; ■ $4/\pi$; $\boxed{\text{d}}$ $2/\pi$.

6. Posto $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$, per ogni rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$ sia $m(R)$ la lunghezza complessiva di $R \cap C$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 9$ se $x \in (-2, 2) \times (0, 1/2)$, $f(x) = 6$ se $x \in (2, 4) \times (-1, 1)$ e $f(x) = 0$ altrimenti. Allora $\int_{\mathbb{R}^2} f \, dm$ vale $\boxed{\text{a}}$ 2π; ■ 3π; $\boxed{\text{c}}$ π; $\boxed{\text{d}}$ $2\pi/2$.

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $D_1 f(0, 0) = 3$ e $D_{\mathbf{r}} f(0, 0) = 7/\sqrt{2}$ ove $\mathbf{r}$ è il versore di $(1, 1)$. Allora $D_2 f(0, 0)$ vale $\boxed{\text{a}}$ 5; $\boxed{\text{b}}$ 6; ■ 4; $\boxed{\text{d}}$ 3.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x$ se $x \leq 0$ e $f(x) = a \arctan(bx)$ se $x > 0$, ove a, b sono parametri reali. Allora f è differenziabile $\boxed{\text{a}}$ se e solo se $a = b = 1$; $\boxed{\text{b}}$ se $b = 1$; ■ se $(a, b) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2)$; $\boxed{\text{d}}$ per nessuna scelta di a e b.

9. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 0$ se $x < 2$ e $f(x) = \exp(x^4)$ se $x \geq 2$ e si definisca $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora F è ■ monotona; $\boxed{\text{b}}$ differenziabile in 2; $\boxed{\text{c}}$ discontinua in 2; $\boxed{\text{d}}$ di classe C^1.

10. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \to (0,0,0)} f(x) = 4$. Allora, posto $C_r = (-r, r)^3$ per $r > 0$, esiste $\delta \in (0, 1)$ tale che $\boxed{\text{a}}$ $f(x) > 3 \ \ \forall x \in C_\delta$; $\boxed{\text{b}}$ $f(x) > 0 \ \ \forall x \in C_{4\delta}$; $\boxed{\text{c}}$ $f(x) \geq 3 \ \ \forall x \in C_1 \setminus C_\delta$; ■ $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in C_{4\delta} \setminus C_\delta$.

---

spazio riservato alla commissione