

# Analisi Matematica 1

<b>Prova scritta</b>  <b>21/09/10</b>	<b>Cognome e nome (stampatello chiaro)</b>	<b>C.L. (Mat/Fis)</b>
---	--	-----------------------

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■

Punti per ogni risposta: **Esatta = 3**, **Bianca = 0**, **Errata = -1**.

Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti**.

1. La funzione  $u : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$  di classe  $C^1$  verifica  $x^2 u^{1/2}(x) + u^{3/4}(x) = 2x^6$  per ogni  $x > 0$  e  $u(1) = 1$ . Allora  $u'(1)$  vale  a 8;  b 6;  c 2;  d 4.
2. Per  $z \in \mathbb{C}$  il numero complesso  $ze^z$  è reale  a se  $z = i\pi/2$ ;  b se  $z = -i\pi$ ;  c se e solo se  $z$  è reale;  d se  $\operatorname{Re} z = 0$ .
3. Siano  $I = [3, 7]$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tale che per ogni  $\varepsilon > 0$  esista  $s : I \rightarrow \mathbb{R}$  a scala tale che  $-s(x) < f(x) < s(x)$  per ogni  $x \in I$  e  $\int_I s(x) dx < \varepsilon$ . Allora  $f$   a è continua;  b può non essere integrabile;  c è integrabile e  $\int_I f(x) dx \geq 0$ ;  d è integrabile e  $\int_I f(x) dx < 0$ .
4. Sia  $a_n = (-1)^n n^{-3} + \ln(1 + n^{-1/3})$  per  $n = 1, 2, \dots$ . Allora  a la successione  $\{a_n\}$  diverge;  b la serie  $\sum a_n$  converge semplicemente;  c la serie  $\sum a_n$  diverge;  d la serie  $\sum a_n$  converge assolutamente.
5. Sia  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  la circonferenza di centro  $(0, 0)$  e raggio 4. Allora la media  $\int_{\Gamma} (x_1)^+(x_2)^+ ds$  (ove  $(\ )^+$  è la parte positiva) vale  a  $1/(2\pi)$ ;  b  $1/\pi$ ;  c  $4/\pi$ ;  d  $2/\pi$ .
6. Posto  $C = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ , per ogni rettangolo  $R \subset \mathbb{R}^2$  sia  $m(R)$  la lunghezza complessiva di  $R \cap C$ . Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x) = 9$  se  $x \in (-2, 2) \times (0, 1/2)$ ,  $f(x) = 6$  se  $x \in (2, 4) \times (-1, 1)$  e  $f(x) = 0$  altrimenti. Allora  $\int_{\mathbb{R}^2} f dm$  vale  a  $2\pi$ ;  b  $3\pi$ ;  c  $\pi$ ;  d  $2\pi/2$ .
7. Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$  tale che  $D_1 f(0, 0) = 3$  e  $D_r f(0, 0) = 7/\sqrt{2}$  ove  $\mathbf{r}$  è il versore di  $(1, 1)$ . Allora  $D_2 f(0, 0)$  vale  a 5;  b 6;  c 4;  d 3.
8. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x) = x$  se  $x \leq 0$  e  $f(x) = a \arctan(bx)$  se  $x > 0$ , ove  $a, b$  sono parametri reali. Allora  $f$  è differenziabile  a se e solo se  $a = b = 1$ ;  b se  $b = 1$ ;  c se  $(a, b) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}/2)$ ;  d per nessuna scelta di  $a$  e  $b$ .
9. Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x) = 0$  se  $x < 2$  e  $f(x) = \exp(x^4)$  se  $x \geq 2$  e si definisca  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mediante  $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$  per  $x \in \mathbb{R}$ . Allora  $F$  è  a monotona;  b differenziabile in 2;  c discontinua in 2;  d di classe  $C^1$ .
10. Sia  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $\lim_{x \rightarrow (0,0,0)} f(x) = 4$ . Allora, posto  $C_r = (-r, r)^3$  per  $r > 0$ , esiste  $\delta \in (0, 1)$  tale che  a  $f(x) > 3 \ \forall x \in C_\delta$ ;  b  $f(x) > 0 \ \forall x \in C_{4\delta}$ ;  c  $f(x) \geq 3 \ \forall x \in C_1 \setminus C_\delta$ ;  d  $f(x) \geq 0 \ \forall x \in C_{4\delta} \setminus C_\delta$ .

**spazio riservato alla commissione**