Concetti di Analisi Matematica di Base — 21/06/04

♠ Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\lim_{x\to(0,0)} = (2,-1)$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che
♢ $|\mathbf{f}(x)|^2 < 2004 \ \ \forall\, x \in (0, 2\delta)^2$

♠ Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $f(x) = x_1 + 2x_3 + o(|x|^5)$ per $x \to (0,0,0)$ e sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data dalla formula $g(x) = \sinh(3f(x))$. Allora $|\nabla g(0,0,0)|^2$ risulta
♢ > 40

♠ Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\int_{S(r)} \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\, dS = 4\pi r^3$ per ogni $r > 0$, ove $S(r)$ è la sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio r e $\mathbf{n}(x) = x/r$ per $x \in S(r)$. Allora $\operatorname{div}\mathbf{f}(0,0,0)$ vale
♢ 3

♠ Sia S la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)(3n+1)^{-1} x^n$ ove x è un parametro reale. Allora S converge assolutamente se e solo se
♢ $|x| < 1$

♠ Il limite $\lim_{n\to\infty} n^4 \sin^2(2/n^2)$ appartiene a
♢ $(2, 10]$

♠ La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \max\left\{x^2, x^3\right\}$ risulta
♢ differenziabile in 0

♠ Sia s la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} 4(-n)^{-3}$. Allora s appartiene a
♢ $(-\infty, -1)$

♠ Sia $\{a_n\}$ una successione reale monotona. Allora
♢ essa converge o diverge

♠ Sia Γ l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^2$ tali che $|x| = 4$, $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ e sia $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ data dalle formule $f(x) = 1$ se $x_2\sqrt{2} > 4$ e $f(x) = 5$ altrimenti. Allora l'integrale $\int_\Gamma f(x)\, ds$ vale
♢ 6π

♠ Una misura m in $[0, +\infty)$ verifica la proprietà: $m(I) = b^2 - a^2$ se I è uno degli intervalli di estremi a e b $(0 \le a \le b < +\infty)$. Allora l'integrale $\int_{[0,3]} [x]\, dm$, ove $[x]$ denota il massimo intero $\le x$, vale
♢ 13