Strumenti di Analisi Matematica di Base — 20/09/04

♠ Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = ax + b$ se $x \leq 0$ e $f(x) = 2\tanh(3x)$ se $x > 0$ sia di classe C^1 . Allora a vale

♢ 6

♠ Sia $B = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x^2 + y^2 > 1\}$. Allora l'integrale $\int_B x\, dx\, dy$ vale

♢ 1/6

♠ Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $\nabla f(0) = 0$ e si ponga $f_{ij} = D_i D_j f(0)$ per $i, j = 1, \ldots, n$. Allora, perché 0 sia un punto di minimo relativo per f è sufficiente che

♢ $f_{ii} > 0$ per ogni i e $f_{ij} = 0$ per $j \neq i$

♠ Sia $u : [0, t_*) \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy in avanti $u'(t) = \tanh(tu(t))$ e $u(0) = e$. Allora

♢ $t_* = +\infty$ e $\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$

♠ Si ponga $g(x) = \int_0^1 \cosh^4(xy)\, dy$ per $x \in (0, +\infty)$. Allora g è

♢ monotona

♠ La funzione $f(x) = \int_3^x \cos^5 y\, dy$, $x \in \mathbb{R}$, risulta

♢ lipschitziana

♠ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data dalle formule $f(x) = \tan^2(\pi x/2)$ se $-1 < x < 1/6$ e $f(x) = 0$ altrimenti. Allora f è

♢ differenziabile in $1/8$

♠ Siano $\delta > 0$ e $u : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ una soluzione locale di classe C^∞ del problema di Cauchy completo $u''(t) = t^2 - \sin u(t)$, $u(0) = u'(0) = 0$. Allora, per u , il punto 0 è di

♢ minimo locale

♠ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora f è

♢ continua se è differenziabile

♠ Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Allora

♢ la funzione $x \mapsto f(|x|)$ è uniformemente continua