Strumenti di Analisi Matematica di Base

Appello del giorno 20/09/04	Cognome e nome (stampatello)	C.L. (M/F)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Sia $u : [0, t_*) \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale del problema di Cauchy in avanti $u'(t) = \tanh(tu(t))$ e $u(0) = e$. Allora $\boxed{\text{a}}$ $t_* = +\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0$; $\boxed{\text{b}}$ $t_* = +\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} u'(t) = +\infty$; $\boxed{\text{c}}$ $t_* = +\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} u(t) = +\infty$; $\boxed{\text{d}}$ $t_* < +\infty$ e $\lim_{t\to t_*^-} u(t) = +\infty$.

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Allora f è $\boxed{\text{a}}$ continua se è limitata; $\boxed{\text{b}}$ limitata se è continua; $\boxed{\text{c}}$ continua se è differenziabile; $\boxed{\text{d}}$ differenziabile se è continua.

3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Allora $\boxed{\text{a}}$ f è lipschitziana; $\boxed{\text{b}}$ $|f|^3$ è limitata; $\boxed{\text{c}}$ la funzione $x \mapsto f(|x|)$ è uniformemente continua; $\boxed{\text{d}}$ la funzione $x \mapsto f(x^3)$ è uniformemente continua.

4. Sia $B = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x^2 + y^2 > 1\}$. Allora l'integrale $\int_B x\,dx\,dy$ vale $\boxed{\text{a}}$ 0; $\boxed{\text{b}}$ $1/6$; $\boxed{\text{c}}$ $1/2$; $\boxed{\text{d}}$ $1/3$.

5. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2 tale che $\nabla f(0) = 0$ e si ponga $f_{ij} = D_i D_j f(0)$ per $i, j = 1, \ldots, n$. Allora, perché 0 sia un punto di minimo relativo per f è sufficiente che $\boxed{\text{a}}$ $f_{ii} > 0$ per ogni i e $f_{ij} = 0$ per $j \neq i$; $\boxed{\text{b}}$ $f_{ii} < 0$ per ogni i e $f_{ij} = 0$ per $j \neq i$; $\boxed{\text{c}}$ $f_{ij} > 0$ per ogni i, j; $\boxed{\text{d}}$ $f_{ij} = 0$ per ogni i, j.

6. Si ponga $g(x) = \int_0^1 \cosh^4(xy)\,dy$ per $x \in (0, +\infty)$. Allora g è $\boxed{\text{a}}$ non limitata inferiormente; $\boxed{\text{b}}$ lipschitziana; $\boxed{\text{c}}$ limitata; $\boxed{\text{d}}$ monotona.

7. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = ax + b$ se $x \leq 0$ e $f(x) = 2\tanh(3x)$ se $x > 0$ sia di classe C^1. Allora a vale $\boxed{\text{a}}$ 2; $\boxed{\text{b}}$ 6; $\boxed{\text{c}}$ 8; $\boxed{\text{d}}$ 3.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data dalle formule $f(x) = \tan^2(\pi x/2)$ se $-1 < x < 1/6$ e $f(x) = 0$ altrimenti. Allora f è $\boxed{\text{a}}$ integrabile in $[-1, 1]$; $\boxed{\text{b}}$ pari; $\boxed{\text{c}}$ differenziabile in $1/8$; $\boxed{\text{d}}$ continua in -1.

9. Siano $\delta > 0$ e $u : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ una soluzione locale di classe C^∞ del problema di Cauchy completo $u''(t) = t^2 - \sin u(t)$, $u(0) = u'(0) = 0$. Allora, per u, il punto 0 è di $\boxed{\text{a}}$ infinito; $\boxed{\text{b}}$ flesso; $\boxed{\text{c}}$ minimo locale; $\boxed{\text{d}}$ massimo locale.

10. La funzione $f(x) = \int_3^x \cos^5 y\,dy$, $x \in \mathbb{R}$, risulta $\boxed{\text{a}}$ convessa; $\boxed{\text{b}}$ concava; $\boxed{\text{c}}$ continua ma non di classe C^1; $\boxed{\text{d}}$ lipschitziana.

---

spazio riservato alla commissione