Analisi Matematica 1

Prova scritta **19/06/13**	**Cognome e nome (stampatello chiaro)**	**C.L. (Mat/Fis)**

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Per $\sigma \in \mathbb{R}$ si consideri $\lim_{x\to 0^+} \frac{u(x)}{v(x)}$ ove $u(x) = (e^{2x} - 1)\sinh^3 x$ e $v(x) = \sin(5x^\sigma)$. Allora il limite esiste finito e non nullo se σ vale $\boxed{a}$ 3 ; ■ 4 ; $\boxed{c}$ 2 ; $\boxed{d}$ 5 .

2. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x) = o(x^7)$ per $x \to 0^+$. Allora esistono $\delta, M > 0$ tali che per $x \in (0, \delta)$ risulti ■ $|\varphi(x)| \le Mx^4 \sin^3 x$; $\boxed{b}$ $|\varphi(x)| \le Mx^5 \tanh^3 x$; $\boxed{c}$ $|\varphi(x)| \le Mx^8/\sqrt{\sinh x}$; $\boxed{d}$ $|\varphi(x)| \le Mx^8$.

3. Perché una funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sia integrabile è $\boxed{a}$ necessario che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists s_\pm : [0,1] \to \mathbb{R}$ a scala tali che $s_- \le f \le s_+$ e $s_+ - s_- \le \varepsilon$; $\boxed{b}$ sufficiente che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists s_\pm : [0,1] \to \mathbb{R}$ a scala tali che $s_- \le f \le s_+$; ■ sufficiente che $|f| \le 5$ in $[0,1]$ e $\forall \varepsilon \in (0,1)$ $\exists s_\pm : [0,1] \to \mathbb{R}$ a scala tali che in $(\varepsilon, 1)$ risulti $s_- \le f \le s_+$ e $|f - s_\pm| \le \varepsilon$; $\boxed{d}$ sufficiente che $|f| \le 7$ in $[0,1]$ e f sia continua in $[1/5, 1]$.

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione biiettiva data da $f(x,y) = (5x^5 + 4y^3, 3x^5 - 2y^3)$. Allora f^{-1} è differenziabile in $\boxed{a}$ $(5,3)$; $\boxed{b}$ $(4,-2)$; ■ $(9,1)$; $\boxed{d}$ $(0,0)$.

5. Sia $\alpha > 0$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} [(1+n^4)^\alpha - n^{4\alpha}] \ln(1 + n^{-3})$ converge se e solo se $\boxed{a}$ $\alpha > 1$; ■ $\alpha < 3/2$; $\boxed{c}$ $\alpha < 1$; $\boxed{d}$ $\alpha < 4/3$.

6. Sia $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che i limiti $\lambda = v(0^+)$ e $\mu = v'(0^+)$ esistano e siano $v_p, v_d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i prolungamenti rispettivamente pari e dispari di v nulli in 0. Allora $\boxed{a}$ v_p è di classe C^1 e $v_p'(0) = 0$; $\boxed{b}$ v_d è continua in 0 ; $\boxed{c}$ v_p è di classe C^1 se μ è finito; ■ v_d è di classe C^1 se $\lambda = 0$ e μ è finito.

7. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $F(x) = \int_7^{2x^7} \ln(4 + y^2)\, dy$. Allora $F'(1)$ vale $\boxed{a}$ $\ln 8$; $\boxed{b}$ $7 \ln 8$; ■ $14 \ln 8$; $\boxed{d}$ $4 \ln 8$.

8. Sia $\mathcal{R}$ l'insieme dei rettangoli di $\mathbb{R}^2$ e si ponga $m(R) = \int_I (x)^+ e^{-2x}\, dx \cdot \delta(J)$ per ogni $R = I \times J \in \mathcal{R}$, ove $\delta(J)$ vale 12 se $J \ni 0$ e 0 altrimenti. Allora $\sup_{R \in \mathcal{R}} m(R)$ vale $\boxed{a}$ $1/3$; $\boxed{b}$ 6 ; ■ 3 ; $\boxed{d}$ $1/6$.

9. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile e $r_\pm$ i versori dei vettori $(\pm 1, 1)$. Se $D_{r_+} f(0,0) = D_{r_-} f(0,0) > 0$, detto v il versore di $\nabla f(0,0)$, si ha $\boxed{a}$ $v = (1,0)$ e $D_1 f(0,0) = 0$; $\boxed{b}$ $v = (0,1)$ e $D_2 f(0,0) = 0$; ■ $v = (0,1)$ e $D_1 f(0,0) = 0$; $\boxed{d}$ $v = (1,0)$ e $D_2 f(0,0) = 0$.

10. Sia $Z = \{z \in \mathbb{C} : z(z^4 - 3)(z^6 + 4) = 0,\ \operatorname{Re} z > 0\}$. Allora il numero di punti di Z vale ■ 3 ; $\boxed{b}$ 4 ; $\boxed{c}$ 5 ; $\boxed{d}$ 2 .

---

spazio riservato alla commissione