

Analisi Matematica 1

Prova scritta 19/06/13	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)
---	--	-----------------------

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■

Punti per ogni risposta: **Esatta = 3**, **Bianca = 0**, **Errata = -1**.

Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti**.

1. Per $\sigma \in \mathbb{R}$ si consideri $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u(x)}{v(x)}$ ove $u(x) = (e^{2x} - 1) \sinh^3 x$ e $v(x) = \sin(5x^\sigma)$. Allora il limite esiste finito e non nullo se σ vale a 3; b 4; c 2; d 5.
2. Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\varphi(x) = o(x^7)$ per $x \rightarrow 0^+$. Allora esistono $\delta, M > 0$ tali che per $x \in (0, \delta)$ risulti a $|\varphi(x)| \leq Mx^4 \sin^3 x$; b $|\varphi(x)| \leq Mx^5 \tanh^3 x$; c $|\varphi(x)| \leq Mx^8 / \sqrt{\sinh x}$; d $|\varphi(x)| \leq Mx^8$.
3. Perché una funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sia integrabile è a necessario che $\forall \varepsilon > 0 \exists s_\pm : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a scala tali che $s_- \leq f \leq s_+$ e $s_+ - s_- \leq \varepsilon$; b sufficiente che $\forall \varepsilon > 0 \exists s_\pm : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a scala tali che $s_- \leq f \leq s_+$; c sufficiente che $|f| \leq 5$ in $[0, 1]$ e $\forall \varepsilon \in (0, 1) \exists s_\pm : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a scala tali che in $(\varepsilon, 1)$ risulti $s_- \leq f \leq s_+$ e $|f - s_\pm| \leq \varepsilon$; d sufficiente che $|f| \leq 7$ in $[0, 1]$ e f sia continua in $[1/5, 1]$.
4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la funzione biiettiva data da $f(x, y) = (5x^5 + 4y^3, 3x^5 - 2y^3)$. Allora f^{-1} è differenziabile in a $(5, 3)$; b $(4, -2)$; c $(9, 1)$; d $(0, 0)$.
5. Sia $\alpha > 0$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} [(1 + n^4)^\alpha - n^{4\alpha}] \ln(1 + n^{-3})$ converge se e solo se a $\alpha > 1$; b $\alpha < 3/2$; c $\alpha < 1$; d $\alpha < 4/3$.
6. Sia $v : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che i limiti $\lambda = v(0^+)$ e $\mu = v'(0^+)$ esistano e siano $v_p, v_d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i prolungamenti rispettivamente pari e dispari di v nulli in 0. Allora a v_p è di classe C^1 e $v'_p(0) = 0$; b v_d è continua in 0; c v_p è di classe C^1 se μ è finito; d v_d è di classe C^1 se $\lambda = 0$ e μ è finito.
7. Sia $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $F(x) = \int_7^{2x^7} \ln(4 + y^2) dy$. Allora $F'(1)$ vale a $\ln 8$; b $7 \ln 8$; c $14 \ln 8$; d $4 \ln 8$.
8. Sia \mathcal{R} l'insieme dei rettangoli di \mathbb{R}^2 e si ponga $m(R) = \int_I(x)^+ e^{-2x} dx \cdot \delta(J)$ per ogni $R = I \times J \in \mathcal{R}$, ove $\delta(J)$ vale 12 se $J \ni 0$ e 0 altrimenti. Allora $\sup_{R \in \mathcal{R}} m(R)$ vale a $1/3$; b 6; c 3; d $1/6$.
9. Siano $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile e r_\pm i versori dei vettori $(\pm 1, 1)$. Se $D_{r_+} f(0, 0) = D_{r_-} f(0, 0) > 0$, detto v il versore di $\nabla f(0, 0)$, si ha a $v = (1, 0)$ e $D_1 f(0, 0) = 0$; b $v = (0, 1)$ e $D_2 f(0, 0) = 0$; c $v = (0, 1)$ e $D_1 f(0, 0) = 0$; d $v = (1, 0)$ e $D_2 f(0, 0) = 0$.
10. Sia $Z = \{z \in \mathbb{C} : z(z^4 - 3)(z^6 + 4) = 0, \operatorname{Re} z > 0\}$. Allora il numero di punti di Z vale a 3; b 4; c 5; d 2.

spazio riservato alla commissione