

Analisi B

Appello del giorno 17/09/07	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (M/F)
--	--	-------------------

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così:

Nell'esercizio • i matematici/fisici ignorino la parte **SoloF** [...] / **SoloM** [...] del testo.

Punti per ogni risposta: **Esatta = 3**, **Bianca = 0**, **Errata = -1**.

Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti**.

- 1. Posto **SoloM** [$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+4}/(n+1)!$] **SoloF** [$f(x) = x^3 \sinh(|x|^{1/2})$] per $x \in \mathbb{R}$, si ha che f **SoloM** è convessa; non è di classe C^1 ; è limitata; **SoloF** è monotona.
- 2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = (1 + y^2)(1 + x^2)^{-1}(1 + y^4)^{-1}$. Allora f ha un punto di minimo assoluto; ha 3 punti stazionari non di estremo locale; ha esattamente un punto di massimo assoluto; ha due punti di massimo assoluto.
- 3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 . Allora f è convessa se $\det Hf \geq 0$ in \mathbb{R}^2 ; f è convessa se $D_i^2 f \geq 0$ in \mathbb{R}^2 per $i = 1, 2$; se f è convessa, allora $D_i^2 f \geq 0$ in \mathbb{R}^2 per $i = 1, 2$; se f è convessa, allora $D_i D_j f \geq 0$ in \mathbb{R}^2 per $i, j = 1, 2$.
- 4. Posto $\Gamma = \{e^{-\vartheta}(\cos \vartheta, \sin \vartheta) : \vartheta \in \mathbb{R}\}$, sia $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = |x|^2 + |x|^{-2}$. Allora f non ha minimo assoluto; ha minimo assoluto e $\min f = 1$; è limitata; ha uno e un solo punto di minimo assoluto.
- 5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Perché il problema di Cauchy in avanti $u'(t) = f(u(t))$ e $u(0) = 1$ non ammetta alcuna soluzione globale è sufficiente che $f(y) \geq y^2 \forall y \in \mathbb{R}$; necessario che esistano $\alpha, c > 0$ tali che $f(y) \geq \alpha y^2 - c \forall y \in \mathbb{R}$; sufficiente che f non sia lipschitziana; necessario che f non sia di classe C^1 .
- 6. Dato il problema di Cauchy $u''(t) + 2u'(t) + u(t) = e^{3t}$, $u(0) = 17/16$, $u'(0) = 3/16$, sia $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la sua soluzione globale. Allora $u(1) - 2^{-4}e^3$ vale $1/e$; $-1/e$; $2/e$; 0 .
- 7. Sia Γ il grafico di $x \mapsto e^x$, $x \in [-1, 1]$. Allora l'integrale $\int_{\Gamma} e^x(1+y^2)^{-1/2} ds(x, y)$ vale $\sinh 1$; $\cosh 1$; $2 \sinh 1$; $2 \cosh 1$.
- 8. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Allora f è lipschitziana; $x \mapsto x^{-1/2}f(x)$ è limitata in $[1, +\infty)$; $|f|^{1/2}$ è uniformemente continua; f^2 è uniformemente continua.
- 9. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2/2$ se $x \leq 0$ e $f(x) = 1 - \cos x$ se $x > 0$. Allora f è di classe C^4 ma non C^5 ; di classe C^3 ma non C^4 ; di classe C^2 ma non C^3 ; di classe C^1 ma non C^2 .
- 10. L'area dell'insieme $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + |y|^{(1/2)(3+\text{sign } x \text{ sign } y)} \leq 1\}$, con la convenzione $\text{sign } 0 = 0$, vale $\pi/2 + 2/3$; $\pi/4 + 4/3$; $\pi + 2/3$; $\pi/2 + 4/3$.

spazio riservato alla commissione