Strumenti di Analisi Matematica di Base — 17/06/02

♠ Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $u''(t) + t^2 u'(t) + tu(t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $u(0) = 0$ e $u'(0) = 1$. Allora esiste un intorno dell'origine in cui u è

♢ crescente e concava

♠ Sia K l'insieme dei valori $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che esista $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ verificante $u''(t) = 4k^2 u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 2$ e $u(1/2) = 1$. Allora:

♢ $K = \emptyset$

♠ Sia K l'insieme dei valori $k \in \mathbb{R}$ tali che la soluzione globale u del problema di Cauchy in avanti $u'(t) - u(t) = e^{-3t}$, $u(0) = k$ sia limitata in $[0, +\infty)$. Allora

♢ K ha 1 elemento

♠ Sia A l'insieme dei valori $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to 0^+} x^{-1} (\sin x)^{2-\alpha^2} = 0$. Allora $\sup A$ vale

♢ 1

♠ Il limite $\lim_{x \to 0} x^{-2} \int_0^x \sin s \, ds$ vale

♢ $1/2$

♠ Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data dalla formula $f(x, y) = 2x^2 + 5y^2 + 2xy + 57$. Allora, per la funzione f, l'origine è

♢ un punto di minimo assoluto

♠ Siano $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $f(x, y) = x^2 + y^2$ e $I = \int_E f(x, y) \, dx \, dy$. Allora

♢ $I = 15\pi/4$

♠ L'integrale $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$ vale

♢ $e - 2$

♠ Posto $E = (0, 1) \times (0, 1)$, sia $f : E \to \mathbb{R}$ definita dalla formula $f(x, y) = xy$. Allora

♢ f è uniformemente continua

♠ Sia $u : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ tale che $u(x) + \sin u(x) = 2x$ per ogni $x \in (-1, 1)$ e $u(0) = 0$ e sia P il suo polinomio di Taylor di centro 0 e ordine 2. Allora $P(1)$ vale

♢ 1