Concetti di Analisi Matematica di Base

Appello del giorno 17/06/02	Cognome e nome (stampatello)	C.L. (M/F)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita dalle formule $\mathbf{f}(x) = (e^x, \cos x + \sin x, 1/x)$ se $x \neq 0$ e $f(0) = (1, 1, 0)$. Allora $\boxed{\text{a}}$ $\mathbf{f}$ è continua in 0 ; $\boxed{\text{b}}$ $\mathbf{f}$ ha un salto in 0 ; $\boxed{\text{c}}$ $\mathbf{f}$ ha in 0 una discontinuità eliminabile; $\boxed{\text{d}}$ $\mathbf{f}$ non è limitata in alcun intorno di 0 .

2. Sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data dalla formula $\mathbf{f}(x, y) = e^x(x, y)$ e sia L il suo differenziale in $(0, 1)$. Allora, per ogni $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}$, $L\mathbf{h}$ vale $\boxed{\text{a}}$ $2h_1 + h_2$; $\boxed{\text{b}}$ $(h_1, h_1 + h_2)$; $\boxed{\text{c}}$ $(h_1 e^{h_1}, h_2 e^{h_1})$; $\boxed{\text{d}}$ $(h_1 + h_2, h_2)$.

3. Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data dalla formula $f(x) = x^{-1} \sin \pi x$. Allora $f'(1)$ vale $\boxed{\text{a}}$ π ; $\boxed{\text{b}}$ 0 ; $\boxed{\text{c}}$ $-\pi$; $\boxed{\text{d}}$ -1 .

4. Sia $\delta > 0$ e, posto $I = (-\delta, \delta)$, sia $u : I \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $u(0) = 0$ e $u^2(x) + \sin u(x) = e^{2x}$ $\forall\, x \in I$. Allora $u'(0)$ vale $\boxed{\text{a}}$ 0 ; $\boxed{\text{b}}$ 1 ; $\boxed{\text{c}}$ 2 ; $\boxed{\text{d}}$ $1/2$.

5. Sia $\{a_n\}$ una successione reale strettamente positiva tale che $a_{n+1} = a_n/(n+3)$ $\forall\, n \geq 0$. Allora $\boxed{\text{a}}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge; $\boxed{\text{b}}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n$ diverge; $\boxed{\text{c}}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n$ diverge; $\boxed{\text{d}}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 a_n$ converge.

6. L'integrale $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \, dx$ vale $\boxed{\text{a}}$ $1/2$; $\boxed{\text{b}}$ $-1/2$; $\boxed{\text{c}}$ 2 ; $\boxed{\text{d}}$ 1 .

7. Sia $\{a_n\}$ una successione reale tale che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5$. Allora $\boxed{\text{a}}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge; $\boxed{\text{b}}$ $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$; $\boxed{\text{c}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$; $\boxed{\text{d}}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

8. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Perché f sia integrabile in $[0, 1]$ è sufficiente che $\boxed{\text{a}}$ f sia differenziabile in $(0, 1)$; $\boxed{\text{b}}$ f sia limitata in $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{c}}$ il limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ esista finito; $\boxed{\text{d}}$ esista $\varepsilon > 0$ tale che f sia continua nell'intervallo $[0, 1 + \varepsilon]$.

9. Sia C la circonferenza del piano xy di centro $(0, 0)$ e raggio 1 e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = 2$ se x e y sono entrambi positivi e $f(x, y) = 0$ altrimenti. Allora l'integrale $\int_C (y + f(x, y))\, ds$ vale $\boxed{\text{a}}$ 0 ; $\boxed{\text{b}}$ π ; $\boxed{\text{c}}$ 2π ; $\boxed{\text{d}}$ 4π .

10. Si supponga $f(x) = o(x)$ per $x \to 0$. Allora il limite $\lim_{x\to 0} \big(\sin x + f(x)\big)/(x + x^3)$ $\boxed{\text{a}}$ vale 1 ; $\boxed{\text{b}}$ vale 0 ; $\boxed{\text{c}}$ vale $+\infty$; $\boxed{\text{d}}$ non esiste per una f opportuna.

---

spazio riservato alla commissione