Analisi B

Appello del giorno 15/09/08	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (M/F)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
L'esercizio contrassegnato con • è diverso per i matematici e i fisici.
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 ,** **Bianca = 0 ,** **Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Sia $g(x,y,z) = y(z^2 - x^2)$ per $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Allora g $\boxed{\text{a}}$ ha almeno un punto di minimo relativo; ■ non ha punti di massimo locale; $\boxed{\text{c}}$ ha un numero finito di punti stazionari; $\boxed{\text{d}}$ è limitata ma non ha minimo assoluto.

2. Sia $h : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definita dalla formula data di volta in volta. Allora quella *non* uniformemente continua è $\boxed{\text{a}}$ $\sin(\ln(x+1))$; $\boxed{\text{b}}$ $\sin(\sin x)$; $\boxed{\text{c}}$ $\sin(e^{-x})$; ■ $\sin(x\sqrt{x})$.

3. Sia $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua. Per $\lambda \in \mathbb{R}$ sia $S_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma(x) \le \lambda\}$. Allora $\boxed{\text{a}}$ ogni S_λ è non vuoto; ■ se almeno un S_λ è limitato e non vuoto, σ ha minimo; $\boxed{\text{c}}$ se σ è anche convessa, almeno un S_λ è vuoto; $\boxed{\text{d}}$ se σ è anche convessa, ogni S_λ è limitato.

• **4.** **Matematici:** Siano $\lambda \in (0,+\infty)$, $n \in \mathbb{N}$ e $f_n(x) = n^\lambda x e^{-nx}$ per $x \in [0,+\infty)$. Allora $\{f_n\}$ $\boxed{\text{a}}$ converge uniformemente in $[0,+\infty)$ per ogni $\lambda < 3$; $\boxed{\text{b}}$ converge uniformemente in $[3,+\infty)$ se e solo se $\lambda < 1$; $\boxed{\text{c}}$ non converge puntualmente in $[0,+\infty)$; ■ converge uniformemente in $[3,+\infty)$ se $\lambda = 1$.

5. Ogni soluzione u dell'equazione differenziale $u'' - u' + u = 4$ è $\boxed{\text{a}}$ periodica; $\boxed{\text{b}}$ infinitesima a $-\infty$; ■ limitata in $(-\infty,0)$; $\boxed{\text{d}}$ limitata in $(0,+\infty)$.

6. Siano $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1\}$, $\varphi : D \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(x) = 1 - |x|^2$, $\alpha = \operatorname{area} \operatorname{graf} \varphi$ e $J = \int_0^1 \sqrt{1+4t^2}\, dt$. Allora ■ $\alpha < 2\pi J$; $\boxed{\text{b}}$ $\alpha = 2\pi J$; $\boxed{\text{c}}$ $\alpha > 2\pi J$; $\boxed{\text{d}}$ $\alpha = 4\pi J$.

• **7.** **Matematici:** Siano $\sigma \in \mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^2)^*$ data da $\omega(x,y) = \sigma y^2\, dy$ se $y > 0$ e $\omega(x,y) = 0$ altrimenti. Allora $\boxed{\text{a}}$ per ogni σ, ω è chiusa ma non esatta; $\boxed{\text{b}}$ ω è chiusa se e solo se $\sigma = 0$; ■ ω è esatta per ogni σ; $\boxed{\text{d}}$ ω è esatta se e solo se $\sigma = 0$.

8. Siano $\Sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 = 1\}$ e $\varphi : \Sigma \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(x,y) = y$. Allora $\min \varphi$ vale $\boxed{\text{a}}$ $1/3$; $\boxed{\text{b}}$ $-1/2$; ■ $-1/3$; $\boxed{\text{d}}$ $1/2$.

9. Per $x \in \mathbb{R}$ sia $f(x) = \int_0^2 e^{-xt^2}\, dt$. Allora la funzione f è $\boxed{\text{a}}$ crescente e convessa; ■ decrescente e convessa; $\boxed{\text{c}}$ crescente e concava; $\boxed{\text{d}}$ decrescente e concava.

10. Per $\beta \in \mathbb{R}$ si consideri il problema di Cauchy in avanti $u' = \left((u-1)^+\right)^4$ e $u(0) = \beta$. Detta $u_\beta : [0, T_\beta) \to \mathbb{R}$ la soluzione massimale, si ha $\boxed{\text{a}}$ $\forall \beta$ $T_\beta < +\infty$; ■ $T_\beta < +\infty$ oppure u_β è costante; $\boxed{\text{c}}$ $\forall \beta$ $T_\beta = +\infty$; $\boxed{\text{d}}$ $\forall \beta$ u_β è strettamente monotona.

---

spazio riservato alla commissione