Analisi A

Appello del giorno 15/09/08	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (M/F)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. La funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 e verifica $2u^5(x) + x^4u^3(x) - 3x^6u^2(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $u(-1) = 1$. Allora $u'(-1)$ vale ■ -2; b 2; c 1; d -1.

2. Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora l'equazione $\sinh^4 z = 0$ ■ ha infinite soluzioni; b ha solo soluzioni reali; c ha una e una sola soluzione; d ha esattamente 4 soluzioni distinte.

3. Per ogni rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$ si ponga $S_R = \{x \in R : x_1 = x_2\}$ e si denoti con $m(R)$ la lunghezza di S_R. Sia poi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data dalle formule $f(x) = 5$ se $x \in (0,1) \times (-1,0)$, $f(x) = 2\sqrt{2}$ se $x \in (1,2) \times (0,4)$, $f(x) = 0$ altrimenti. Allora $\int_{\mathbb{R}^2} f\, dm$ vale a 6; b $4 + 5\sqrt{2}$; ■ 4; d $6 + 5\sqrt{2}$.

4. Sia $\alpha \in (0, +\infty)$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \big((1 + n^{-\alpha/5})^{1/6} - 1\big)$ a converge assolutamente se e solo se $\alpha \geq 5$; b converge assolutamente se e solo se $\alpha > 6$; c converge semplicemente se e solo se $\alpha \leq 1$; ■ converge semplicemente se $\alpha = 3$.

5. Sia $I = \int_C y^2\, ds(x,y)$ ove $C \subset \mathbb{R}^2$ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 2. Allora I vale a 4π; b π; ■ 8π; d 16π.

6. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continua tale che $f(x) \cdot x = |x|^2$ per ogni x. Allora a $\operatorname{div} f(0) = 1$ se f è differenziabile; ■ $\operatorname{div} f(0) = 3$ se f è di classe C^1; c $\operatorname{div} f(0) = 1$ se f è di classe C^1; d $\operatorname{div} f(0) = 0$ se f è differenziabile.

7. Siano $r_\pm \in \mathbb{R}^2$ i versori dei vettori $(1, \pm 1)$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $(\partial f / \partial r_\pm)(0) = \pm\sqrt{2}$. Allora $\nabla f(0)$ vale a $(0, \sqrt{2})$; b $(2, 0)$; ■ $(0, 2)$; d $(\sqrt{2}, 0)$.

8. La funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ data dalle formule $F(x) = x_1x_2x_3/|x|^2$ se $x \neq 0$ e $F(0) = 0$ è a discontinua e non limitata; b discontinua e limitata; ■ continua e non limitata; d continua e limitata.

9. Per $\sigma \in \mathbb{R}$ sia $f_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f_\sigma(x) = \sigma e^{\sigma x}$ se $x \leq 1$ e $f_\sigma(x) = x$ se $x > 1$. Allora f_σ è a differenziabile per ogni σ; ■ non differenziabile per alcun σ; c discontinua per ogni σ; d differenziabile per uno e un solo valore di σ.

10. Siano $\alpha, \beta > 0$ e $x_n = n^\alpha \big(\ln(1 + n^\beta) - \beta \ln n\big)$ per n intero positivo. Allora la successione $\{x_n\}$ converge se e solo se a $\alpha < \beta$; b $\alpha \geq \beta$; c $\alpha = \beta$; ■ $\alpha \leq \beta$.

---

spazio riservato alla commissione