

Analisi A

Prova scritta 14/09/09	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)
---	--	-----------------------

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■

Punti per ogni risposta: **Esatta = 3, Bianca = 0, Errata = -1.**

Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

1. La funzione $v : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ è di classe C^1 e verifica $2v^2(x) = x^4 + xv^{3/2}(x)$ per ogni $x > 0$ e $v(1) = 1$. Allora $v'(1)$ vale 2; 4; 1; 3/2.
2. Quale delle formule elencate di seguito è vera per ogni $z \in \mathbb{C}$? $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$; $|\sin z| \leq 1$; $|\cosh z| \geq 1$; $|z| < |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.
3. Siano $I = [0, 2]$ e $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann tale che $\int_I \varphi(x) dx = 3$. Allora esiste una funzione a scala $\sigma \geq \varphi$ tale che $\int_I \sigma(x) dx \leq 4$; esiste $c \in I$ tale che $\varphi(c) = 3$; esiste una funzione a scala $\sigma \leq \varphi$ tale che $\int_I \sigma(x) dx \geq 4$; $\varphi(x) \leq 3$ per ogni $x \in I$.
4. Sia $\sigma \in (0, +\infty)$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(1 + n^{-\sigma}) - n^{-\sigma})$ converge se e solo se $\sigma \geq 1$; se e solo se $\sigma \leq 1$; se $\sigma < 1$; se $\sigma = 4$.
5. Siano $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2 e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data dalle formule $g(x) = |x|^2$ se $x_1 x_2 > 0$ e $g(x) = 0$ altrimenti. Allora l'integrale $\int_{\Gamma} g ds$ vale 4π ; π ; 8π ; 2π .
6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data dalle formule $f(x) = \cos x$ se $x \in (0, 3)$ e $f(x) = 2$ altrimenti. Allora la derivata destra $f'_+(0)$ (limite destro del rapporto incrementale) non esiste; vale $-\infty$; vale 0; vale $+\infty$.
7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $f(z, 0) = f(0, z/2) = z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Allora $\nabla f(0, 0)$ vale $(0, 2)$; $(1, 1/2)$; $(1, 2)$; $(0, 1/2)$.
8. Per $\sigma \in (0, +\infty)$ sia $f_{\sigma} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ data dalle formule $f_{\sigma}(x) = (x_1 x_2)^{\sigma} / |x|^2$ se $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ e $f_{\sigma}(x) = 0$ altrimenti. Allora f_{σ} è continua in $(0, 0)$ se e solo se $\sigma \geq 1$; se $\sigma = 1$; se $\sigma > 3$; se $\sigma \in (0, 1)$.
9. Sia $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $h(x) = x^3 \sin(1/x^2)$ se $x > 0$ e $h(x) = 0$ altrimenti. Allora h è differenziabile in \mathbb{R} ; non differenziabile in 0; discontinua in 0; di classe C^1 .
10. Siano $\{x_n\}$ una successione reale, infinitesima e non costante. Allora esiste $n > 100$ tale che $x_n \neq 0$; $x_n \neq 0$ per ogni n ; $x_n < 10$ per ogni $n > 100$; esiste n tale che $x_n > -10$.

spazio riservato alla commissione