Analisi B

Prova scritta 14/09/09	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
L'esercizio contrassegnato con • è diverso per i matematici e i fisici.
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 ,** **Bianca = 0 ,** **Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Sia $g(x,y,z,t) = y\cos x + z^2$ per $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Allora $\boxed{\text{a}}$ g ha almeno un punto di minimo relativo; $\boxed{\text{b}}$ g non ha punti di massimo locale; $\boxed{\text{c}}$ g ha un numero finito di punti stazionari; $\boxed{\text{d}}$ $g|_{[0,1]^4}$ non ha minimo assoluto.

2. Siano $g, f \to \mathbb{R}$ tali che $|g(x) - g(y)| \le f(|x-y|)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Allora $\boxed{\text{a}}$ g è lipschitziana se f è limitata; $\boxed{\text{b}}$ g è uniformemente continua se f è continua; $\boxed{\text{c}}$ g è limitata se f è continua; $\boxed{\text{d}}$ g è lipschitziana se f è continua.

3. Sia $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e si ponga per brevità $\psi_{ij} = D_i D_j \psi$ per $i, j = 1, 2$. Allora perché ψ sia convessa è $\boxed{\text{a}}$ necessario che $\psi_{11}(x) > 0$ per ogni x ; $\boxed{\text{b}}$ necessario che $\psi_{12}^2(x) \le \psi_{11}(x)\psi_{22}(x)$ per $x = (0,0)$; $\boxed{\text{c}}$ sufficiente che $\psi_{12}^2(x) \le \psi_{11}(x)\psi_{22}(x)$ per ogni x ; $\boxed{\text{d}}$ sufficiente che $\psi_{11}(x) > 0$ e $\psi_{22}(x) > 0$ per ogni x .

• **4. Matematici:** Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n/(2n)!$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{\text{a}}$ la serie converge a f uniformemente in $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{b}}$ $f(-1) < 1$; $\boxed{\text{c}}$ $f(1) > 1$; $\boxed{\text{d}}$ f è limitata in $(0, +\infty)$ ma non in $\mathbb{R}$.

5. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ verificante $u''(t) + u(t) = -2\sin t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, $u(0) = 0$ e $u'(0) = 1$. Allora $u(\pi)$ vale $\boxed{\text{a}}$ 1 ; $\boxed{\text{b}}$ -1 ; $\boxed{\text{c}}$ $-\pi$; $\boxed{\text{d}}$ π .

6. Sia $J = \int_S y^2 \, ds(x,y)$ ove S è il segmento di estremi $(0,0)$ e $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Allora J vale $\boxed{\text{a}}$ $4/3$; $\boxed{\text{b}}$ $9\sqrt{2}$; $\boxed{\text{c}}$ $2\sqrt{2}/3$; $\boxed{\text{d}}$ 9 .

• **7. Matematici:** Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^2$ e $\omega : \Omega \to (\mathbb{R}^2)^*$ data dalle formule $\omega(x,y) = y^2\,dx + (2xy + 3y^2)\,dy$ se $y > 0$ e $\omega(x,y) = 0$ altrimenti. Allora ω è $\boxed{\text{a}}$ chiusa ma non esatta se $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $\boxed{\text{b}}$ esatta se e solo se Ω non contiene l'origine; $\boxed{\text{c}}$ esatta se $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $\boxed{\text{d}}$ esatta se e solo se Ω è semplicemente connesso.

8. Siano $\Sigma = \{(x,y) \in [0,+\infty)^2 : x + y = 2\}$ e $v : \Sigma \to \mathbb{R}$ data da $v(x,y) = x^2 + y^2$. Allora $\boxed{\text{a}}$ $\min v = 3$ e v non ha massimo; $\boxed{\text{b}}$ $\min v = 3$ e $\max v = 5$; $\boxed{\text{c}}$ $\min v = 2$ e $\max v = 4$; $\boxed{\text{d}}$ $\min v = 2$ e $\max v = 5$.

9. Per $x \in \mathbb{R}$ sia $f(x) = x^2 - x/2 + \int_0^1 \sin(xy)\,dy$. Allora esiste un intorno di 0 in cui f $\boxed{\text{a}}$ cresce; $\boxed{\text{b}}$ è convessa; $\boxed{\text{c}}$ è concava; $\boxed{\text{d}}$ decresce.

10. Per $\alpha \in \mathbb{R}$ sia u la soluzione massimale del problema di Cauchy $u' = u^+$ e $u(0) = \alpha$. Allora, per ogni α , si ha che $\boxed{\text{a}}$ u non è limitata; $\boxed{\text{b}}$ u è convessa; $\boxed{\text{c}}$ u è limitata; $\boxed{\text{d}}$ u è strettamente monotona.

---

spazio riservato alla commissione