Analisi A

Prova scritta 14/09/09	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. La funzione $v : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ è di classe C^1 e verifica $2v^2(x) = x^4 + xv^{3/2}(x)$ per ogni $x > 0$ e $v(1) = 1$. Allora $v'(1)$ vale $\boxed{\text{a}}$ 2 ; $\boxed{\text{b}}$ 4 ; $\boxed{\text{c}}$ 1 ; $\boxed{\text{d}}$ $3/2$.

2. Quale delle formule elencate di seguito è vera per ogni $z \in \mathbb{C}$? $\boxed{\text{a}}$ $|\exp z| = \exp(\operatorname{Re} z)$; $\boxed{\text{b}}$ $|\sin z| \le 1$; $\boxed{\text{c}}$ $|\cosh z| \ge 1$; $\boxed{\text{d}}$ $|z| < |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

3. Siano $I = [0, 2]$ e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann tale che $⨍_I \varphi(x)\,dx = 3$. Allora $\boxed{\text{a}}$ esiste una funzione a scala $\sigma \ge \varphi$ tale che $\int_I \sigma(x)\,dx \le 4$; $\boxed{\text{b}}$ esiste $c \in I$ tale che $\varphi(c) = 3$; $\boxed{\text{c}}$ esiste una funzione a scala $\sigma \le \varphi$ tale che $\int_I \sigma(x)\,dx \ge 4$; $\boxed{\text{d}}$ $\varphi(x) \le 3$ per ogni $x \in I$.

4. Sia $\sigma \in (0, +\infty)$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \big(\ln(1 + n^{-\sigma}) - n^{-\sigma}\big)$ converge $\boxed{\text{a}}$ se e solo se $\sigma \ge 1$; $\boxed{\text{b}}$ se e solo se $\sigma \le 1$; $\boxed{\text{c}}$ se $\sigma < 1$; $\boxed{\text{d}}$ se $\sigma = 4$.

5. Siano $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2 e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data dalle formule $g(x) = |x|^2$ se $x_1x_2 > 0$ e $g(x) = 0$ altrimenti. Allora l'integrale $⨍_\Gamma g\,ds$ vale $\boxed{\text{a}}$ 4π ; $\boxed{\text{b}}$ π ; $\boxed{\text{c}}$ 8π ; $\boxed{\text{d}}$ 2π .

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data dalle formule $f(x) = \cos x$ se $x \in (0, 3)$ e $f(x) = 2$ altrimenti. Allora la derivata destra $f'_+(0)$ (limite destro del rapporto incrementale) $\boxed{\text{a}}$ non esiste; $\boxed{\text{b}}$ vale $-\infty$; $\boxed{\text{c}}$ vale 0 ; $\boxed{\text{d}}$ vale $+\infty$.

7. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $f(z, 0) = f(0, z/2) = z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$. Allora $\nabla f(0, 0)$ vale $\boxed{\text{a}}$ $(0, 2)$; $\boxed{\text{b}}$ $(1, 1/2)$; $\boxed{\text{c}}$ $(1, 2)$; $\boxed{\text{d}}$ $(0, 1/2)$.

8. Per $\sigma \in (0, +\infty)$ sia $f_\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data dalle formule $f_\sigma(x) = (x_1x_2)^\sigma/|x|^2$ se $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$ e $f_\sigma(x) = 0$ altrimenti. Allora f_σ è continua in $(0, 0)$ $\boxed{\text{a}}$ se e solo se $\sigma \ge 1$; $\boxed{\text{b}}$ se $\sigma = 1$; $\boxed{\text{c}}$ se $\sigma > 3$; $\boxed{\text{d}}$ se $\sigma \in (0, 1)$.

9. Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = x^3 \sin(1/x^2)$ se $x > 0$ e $h(x) = 0$ altrimenti. Allora h è $\boxed{\text{a}}$ differenziabile in $\mathbb{R}$; $\boxed{\text{b}}$ non differenziabile in 0 ; $\boxed{\text{c}}$ discontinua in 0 ; $\boxed{\text{d}}$ di classe C^1 .

10. Siano $\{x_n\}$ una successione reale, infinitesima e non costante. Allora $\boxed{\text{a}}$ esiste $n > 100$ tale che $x_n \ne 0$; $\boxed{\text{b}}$ $x_n \ne 0$ per ogni n ; $\boxed{\text{c}}$ $x_n < 10$ per ogni $n > 100$; $\boxed{\text{d}}$ esiste n tale che $x_n > -10$.

---

spazio riservato alla commissione