Analisi Matematica 1

Prova scritta 13/09/11	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 ,** **Bianca = 0 ,** **Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Si ponga $a_n = e^{-\pi/n^2} - 1$, $b_n = \sin 1/n$ e $c_n = \tanh n^3$ per $n > 0$. Allora la successione $\{|a_n|/(b_n^2 c_n)\}$ $\boxed{\text{a}}$ diverge; $\boxed{\text{b}}$ converge a π ; $\boxed{\text{c}}$ è infinitesima; $\boxed{\text{d}}$ converge a 2 .

2. Sia $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\lim_{x\to(0,0,0)} g(x) = (7,4,5)$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\boxed{\text{a}}$ $g_3(x) > 2$ se $1 < |x/\delta| < 7$; $\boxed{\text{b}}$ $g_3(x) \le 6$ se $0 < |x_3| < \delta$; $\boxed{\text{c}}$ $g_3(x) \le 6$ se $|x| < \delta$; $\boxed{\text{d}}$ $g_3(x) \le 5$ se $0 < |x| < \delta$.

3. Siano $(A, \mathcal{E}, m)$ uno spazio elementare di misura e $f : A \to \mathbb{R}$ integrabile tale che $\int_A f^2\,dm = 1$. Allora esiste $s : A \to [0,+\infty)$ a scala tale che $\boxed{\text{a}}$ $s \ge |f|$ e $\int_A s^2\,dm \le 1$; $\boxed{\text{b}}$ $s \le -f$ e $\int_A s^2\,dm \le 1$; $\boxed{\text{c}}$ $s \ge |f|$ e $\int_A s^2\,dm \le 2$; $\boxed{\text{d}}$ $|s| \le |f|$ e $\int_A s^2\,dm \ge 2$.

4. Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = 3x + x^3$ e sia $g = h^{-1}$. Allora $g'(4)$ vale $\boxed{\text{a}}$ $1/7$; $\boxed{\text{b}}$ $1/8$; $\boxed{\text{c}}$ $1/6$; $\boxed{\text{d}}$ $1/5$.

5. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} 4^{-\alpha n}$ $\boxed{\text{a}}$ converge se e solo se $\alpha \ge 0$; $\boxed{\text{b}}$ converge se e solo se $\alpha > 0$; $\boxed{\text{c}}$ diverge se $\alpha \in (0,1)$; $\boxed{\text{d}}$ oscilla se $\alpha < 0$.

6. Per $\sigma \in \mathbb{R}$ sia $f_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f_\sigma(x) = x^{-1/2}\sin(x^\sigma)$ se $x > 0$ e $f_\sigma(x) = x$ se $x \le 0$. Allora nell'origine f_σ è $\boxed{\text{a}}$ continua per uno e un solo σ ; $\boxed{\text{b}}$ continua per ogni $\sigma > 0$; $\boxed{\text{c}}$ differenziabile per ogni $\sigma > 1$; $\boxed{\text{d}}$ differenziabile per uno e un solo σ .

7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \cos x^2$ se $x > 0$ e $f(x) = 0$ se $x \le 0$ e sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $F(x) = \int_{x^2-1}^{x^2+1} f(y)\,dy$. Allora F è $\boxed{\text{a}}$ differenziabile ovunque; $\boxed{\text{b}}$ discontinua in almeno un punto; $\boxed{\text{c}}$ non differenziabile esattamente in due punti; $\boxed{\text{d}}$ non differenziabile esattamente in un punto.

8. Per ogni rettangolo $E = E' \times E'' \subset \mathbb{R}^2$ si ponga $m(E) = \int_{E'} (xe^x)^+\,dx$ se $E'' \ni 0$ e $m(E) = 0$ se $E'' \not\ni 0$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 3$ se $x \in (-3,3) \times (-2,2)$, $f(x) = 5$ se $x \in [-4,-3] \times (-2,2)$, $f(x) = 6$ se $x \in (-3,3) \times [2,7)$ e $f(x) = 0$ altrimenti. Allora la differenza $\int_{\mathbb{R}^2} f\,dm - 3$ vale $\boxed{\text{a}}$ $2e^2$; $\boxed{\text{b}}$ $2e^3$; $\boxed{\text{c}}$ $6e^3$; $\boxed{\text{d}}$ $6e^2$.

9. Siano $\bar{x} = (1,2,0)$ e $g : \mathbb{R}^3 \to (0,+\infty)$ differenziabile tale che $\nabla g(\bar{x}) = (0,6,2)$ e $g(\bar{x}) = 3$. Allora $D_3(\ln g)(\bar{x})$ vale $\boxed{\text{a}}$ 2 ; $\boxed{\text{b}}$ 3 ; $\boxed{\text{c}}$ $2/3$; $\boxed{\text{d}}$ $3/2$.

10. Sia $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ data da $\varphi(z) = ze^z$ e siano $\beta = \operatorname{Re}\varphi(1+i\pi)$ e $\alpha = \operatorname{Im}\varphi(1+i\pi)$. Allora $\boxed{\text{a}}$ $\beta > \alpha$; $\boxed{\text{b}}$ $\beta = \alpha$; $\boxed{\text{c}}$ $\beta < \alpha$; $\boxed{\text{d}}$ $\beta\alpha < 0$.

---

spazio riservato alla commissione