

Analisi B

Appello del giorno 12/02/07	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (M/F)
--	--	-------------------

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: \blacksquare

Nell'esercizio \bullet i matematici/fisici ignorino la parte SoloF [...] / SoloM [...] del testo.

Punti per ogni risposta: **Esatta = 3**, **Bianca = 0**, **Errata = -1**.

Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti**.

1. Considerata la funzione $f : x \mapsto x^3 \sin x^2$, $x \in \mathbb{R}$, si ha che a 0 è un punto di minimo locale per f ; b 0 è un punto di massimo locale per f ; c esiste un intorno di 0 in cui f cresce; d 0 non è un punto stazionario per f .
2. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $\pm 1 \in A$ e $\pm f(\pm 1) > 0$. Allora perché esista $x \in A$ tale che $f(x) = 0$ è sufficiente che a $A = [-1, 1]$; b f sia continua; c A sia una semiretta e f sia C^1 ; d $A = (-2, 2)$ e f sia monotona.
3. Perché $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia non decrescente è a necessario che esista $x \mapsto \int_0^x f(y) dy$ e sia convessa; b necessario che f sia C^1 con $f'(x) \geq 0 \ \forall x$; c necessario che f sia continua; d sufficiente che, per ogni $x \neq 0$, f sia differenziabile in x con $f'(x) > 0$.
4. Sia $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $u''(t) + u(t) = -3 \cos 2t \ \forall t$ e $u(0) = u'(0) = 1$. Allora $u(\pi/2)$ vale a -1 ; b 3 ; c 1 ; d 0 .
5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia P_n il suo polinomio di Taylor di centro 0 e ordine n . Allora a $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$ se $|x|$ è abbastanza piccolo; b $f(x) = P_n(x) + o(x^{n+1})$ per $x \rightarrow 0 \ \forall n$; c $|P_n(x)| \leq |f(x)| \ \forall x \ \forall n$; d esiste una successione reale $\{M_n\}$ tale che $|f(x) - P_n(x)| \leq M_n x^{n+1} \ \forall n \ \forall x \in (0, 1)$.
6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{|\sin x|} / (x^2 + 1)$. Allora a f è lipschitziana; b f è concava; c $f(x) = o(x^{-2})$ per $x \rightarrow +\infty$; d f è uniformemente continua.
- \bullet 7. Sia SoloM $[u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos n^2 x \text{ per } x \in \mathbb{R}]$ SoloF $[u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ la soluzione del problema di Cauchy } u'(t) = -2t(1 - 2t^4 + 2u(t)), u(0) = 0]$. Allora a u non è di classe C^∞ ; b 0 è un punto di massimo locale per u ; c 0 è un punto di minimo locale per u ; d 0 non è un punto di estremo locale per u .
8. Siano $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{y^2 + z^2} \leq x\}$ e $I = \int_C \frac{y^2}{y^2 + z^2} e^{\sqrt{y^2 + z^2}} dx dy dz$. Allora I vale a $\pi(e - 2)$; b $(e - 2)/2$; c $\pi(3 - e)$; d $(3 - e)/2$.
9. Per $n = 1, 2, \dots$ sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = x^2$ se $x \leq 0$ e $f_n(x) = x^n$ se $x > 0$. Allora a $\exists n : f_n$ è C^2 e non C^3 ; b f_n non è C^2 per alcun n ; c f_n è strettamente convessa $\forall n$; d $\exists n : f_n$ è C^1 e non C^2 .
10. Sia $f(x, y, z) = x^2 - (y + z)^4$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Allora $(0, 0, 0)$ è per f un punto a non stazionario; b di minimo locale; c non di estremo locale; d di massimo locale.

spazio riservato alla commissione