Analisi B

Appello del giorno 12/02/07	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (M/F)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Nell'esercizio • i matematici/fisici ignorino la parte **SoloF** [...] /**SoloM** [...] del testo.
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3, Bianca = 0, Errata = −1.**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Considerata la funzione $f : x \mapsto x^3 \sin x^2$, $x \in \mathbb{R}$, si ha che [a] 0 è un punto di minimo locale per f; [b] 0 è un punto di massimo locale per f; [c] esiste un intorno di 0 in cui f cresce; [d] 0 non è un punto stazionario per f.

2. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ tali che $\pm 1 \in A$ e $\pm f(\pm 1) > 0$. Allora perché esista $x \in A$ tale che $f(x) = 0$ è sufficiente che [a] $A = [-1, 1]$; [b] f sia continua; [c] A sia una semiretta e f sia C^1; [d] $A = (-2, 2)$ e f sia monotona.

3. Perché $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia non decrescente è [a] necessario che esista $x \mapsto \int_0^x f(y)\,dy$ e sia convessa; [b] necessario che f sia C^1 con $f'(x) \geq 0$ $\forall x$; [c] necessario che f sia continua; [d] sufficiente che, per ogni $x \neq 0$, f sia differenziabile in x con $f'(x) > 0$.

4. Sia $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $u''(t) + u(t) = -3\cos 2t$ $\forall t$ e $u(0) = u'(0) = 1$. Allora $u(\pi/2)$ vale [a] -1; [b] 3; [c] 1; [d] 0.

5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia P_n il suo polinomio di Taylor di centro 0 e ordine n. Allora [a] $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ se $|x|$ è abbastanza piccolo; [b] $f(x) = P_n(x) + o(x^{n+1})$ per $x \to 0$ $\forall n$; [c] $|P_n(x)| \leq |f(x)|$ $\forall x$ $\forall n$; [d] esiste una successione reale $\{M_n\}$ tale che $|f(x) - P_n(x)| \leq M_n x^{n+1}$ $\forall n$ $\forall x \in (0, 1)$.

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sqrt{|\sin x|}/(x^2 + 1)$. Allora [a] f è lipschitziana; [b] f è concava; [c] $f(x) = o(x^{-2})$ per $x \to +\infty$; [d] f è uniformemente continua.

• **7.** Sia **SoloM** [$u(x) = \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} \cos n^2 x$ per $x \in \mathbb{R}$] **SoloF** [$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy $u'(t) = -2t(1 - 2t^4 + 2u(t))$, $u(0) = 0$]. Allora [a] u non è di classe C^∞; [b] 0 è un punto di massimo locale per u; [c] 0 è un punto di minimo locale per u; [d] 0 non è un punto di estremo locale per u.

8. Siano $C = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq x \leq 1,\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq x\right\}$ e $I = \int_C \frac{y^2}{y^2+z^2} e^{\sqrt{y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$. Allora I vale [a] $\pi(e - 2)$; [b] $(e - 2)/2$; [c] $\pi(3 - e)$; [d] $(3 - e)/2$.

9. Per $n = 1, 2, \ldots$ sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = x^2$ se $x \leq 0$ e $f_n(x) = x^n$ se $x > 0$. Allora [a] $\exists n :$ f_n è C^2 e non C^3; [b] f_n non è C^2 per alcun n; [c] f_n è strettamente convessa $\forall n$; [d] $\exists n :$ f_n è C^1 e non C^2.

10. Sia $f(x, y, z) = x^2 - (y + z)^4$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Allora $(0, 0, 0)$ è per f un punto [a] non stazionario; [b] di minimo locale; [c] non di estremo locale; [d] di massimo locale.

---

spazio riservato alla commissione