Analisi B

Appello del giorno 11/02/09	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (M/F)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
L'esercizio contrassegnato con • è diverso per i matematici e i fisici.
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Si ponga $u(x) = \sinh x^2$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora $u^{(18)}(0)$ vale [a] $18!$; [b] $37!$; [■] $18!/9!$; [d] $18!/37!$.

• **2.** **Matematici:** Considerata la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \pi^{2n} x^n/(2n)!$, siano r il suo raggio di convergenza e $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ la sua somma. Allora [a] $r = 1$ e $f'(1^-) = +\infty$; [b] $r = 1$ e $f'(1^-)$ esiste finito; [c] $r > 1$ e $f(1) > 0$; [■] $r > 1$ e $f(1) \le 0$.

• **3.** **Matematici:** Siano $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $\Omega' \subseteq \Omega$ un aperto. Per $(x, y) \in \Omega$ si ponga $\omega(x, y) = \bigl(\ln r + x^2/r^2\bigr)\, dx + (xy/r^2)\, dy$ con l'abbreviazione $r = |(x, y)|$. Allora ω è [a] chiusa in Ω' se e solo se Ω' è semplicemente connesso; [b] esatta in Ω' se e solo se Ω' è semplicemente connesso; [■] esatta in Ω ; [d] chiusa ma non esatta in Ω .

4. Siano $B = \bigl\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\bigr\}$ e $f : B \to \mathbb{R}$ data da $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. Allora il numero dei punti di estremo relativo per f è [a] 1 ; [b] 2 ; [c] 0 ; [■] ∞ .

5. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e si ponga $a_{ij} = D_i D_j f(0)$ per $i, j = 1, \dots, n$. Allora, perché f abbia minimo locale in 0 , è [a] nec. che $a_{ij} \ge 0$ $\forall\, i, j$; [b] suff. che $a_{ij} > 0$ $\forall\, i, j$; [■] nec. che $a_{ii} \ge 0$ per ogni i ; [d] suff. che $a_{ii} > 0$ per ogni i .

6. Se $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è C^∞ e tale che $u'' + 2u' + 2u = 0$, allora u è [a] non convessa; [b] non monotona; [c] infinitesima a $-\infty$; [■] monotona se e solo se $u(0) = u'(0) = 0$.

7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Perché f sia di classe C^1 in $\mathbb{R}$ è [a] suff. che i limiti unilateri $f'(0^\pm)$ esistano finiti e uguali; [b] suff. che f sia differenziabile in 0 ; [c] nec. che f' sia limitata; [■] suff. che f sia continua in 0 e che il limite $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x)$ esista finito per ogni $n > 0$.

8. La soluzione massimale del problema di Cauchy <u>in avanti</u> $u'(t) = t^{1/2} \tanh u(t)$, $u(0) = 1$, è [a] globale e limitata; [b] non globale ma limitata; [■] globale ma non limitata; [d] non globale e non limitata.

9. Sia $B = \bigl\{(x, y) \in (0, +\infty)^2 : |(x, y)| \le 2\bigr\}$. Allora $\int_B x^2\, dx\, dy$ vale [■] π ; [b] $\pi/3$; [c] $2\pi/3$; [d] $\pi/2$.

10. Sia $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ con $h(x)$ definito di volta in volta. Quella non uniformemente continua è [a] $\tanh x \sin(1/x)$; [b] $|x|^{1/3}$; [c] $(\sin x^2)/(1 + x^2)$; [■] $\cos x \operatorname{sign} x$.

---

spazio riservato alla commissione