Analisi A

Appello del giorno 11/02/09	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (M/F)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 ,** **Bianca = 0 ,** **Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Siano $f, F : [0,1] \to \mathbb{R}$ date da $f(x) = 3\exp(-x^2)$ se $x \in [0,1] \setminus \{1/2\}$ e $f(1/2) = -3$ e $F(x) = \int_1^x f(y)\,dy$ per $x \in [0,1]$. Allora F è $\boxed{a}$ non monotona e continua; ■ differenziabile e monotona; $\boxed{c}$ discontinua in $1/2$; $\boxed{d}$ non differenziabile in $1/2$.

2. La funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 e verifica $\varphi(0) = 1$ e $5\varphi^6(x) - 2e^{2x}\varphi^4(x) = 3e^{6x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $5\varphi'(0) - 2$ vale ■ 3 ; $\boxed{b}$ 5 ; $\boxed{c}$ 2 ; $\boxed{d}$ 6 .

3. Per ogni rettangolo $R \subset \mathbb{R}^2$ si ponga $m(R) = \#(R \cap (\mathbb{Z} \times \{0\})) + (1/\pi)\,\mathrm{area}\,R$ ove $\#$ significa "numero dei punti di". Allora, posto $Q = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : 4 < |x| \leq 6\big\}$, la misura di Q vale $\boxed{a}$ 26 ; $\boxed{b}$ 20 ; ■ 24 ; $\boxed{d}$ 0 .

4. Il limite $\lim_{n\to\infty} n^8(1 - \exp(-8/n)) \cdot \big((1 + n^{-5})^{1/4} - 1\big) \cdot \ln(1 + 2n^{-2})$ vale $\boxed{a}$ 0 ; $\boxed{b}$ 2 ; $\boxed{c}$ 8 ; ■ 4 .

5. Sia $f : (0,+\infty)^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = (y^2)^{x^2}$. Allora il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ■ non esiste; $\boxed{b}$ vale 0 ; $\boxed{c}$ vale 1 ; $\boxed{d}$ vale 2 .

6. Siano $D = \big\{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 3\big\}$ e $f : D \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 125\tanh x_2$ se $x_1 \geq 0$ e $f(x) = 3 + 125\tanh x_2$ se $x_1 < 0$. Allora l'integrale $\int_D f(x)\,dx$ vale $\boxed{a}$ $125\pi/2$; $\boxed{b}$ 125π ; $\boxed{c}$ 27π ; ■ $27\pi/2$.

7. Sia $I = \int_{-3}^{-2}(2x+6)\arctan(x+3)\,dx$. Allora $11\pi - 22I$ vale $\boxed{a}$ 3 ; $\boxed{b}$ 6 ; ■ 22 ; $\boxed{d}$ 0 .

8. Siano $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$ e $z_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, \ldots, n$, tali che $(iz)^3(z^8+1) = a\prod_{k=1}^n (z - z_k)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora $\boxed{a}$ $\exists\, k : \mathrm{Re}\, z_k = -1$; $\boxed{b}$ $z_1 = 0$; ■ $\sum_{k=1}^n \mathrm{Im}\, z_k = 0$; $\boxed{d}$ $\exists\, k : |z_k| > 1$.

9. Sia $\gamma \in (0,+\infty)$. Allora la serie $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n n^{-(\gamma + 3/n)}$ $\boxed{a}$ converge semplicemente se e solo se $\gamma \geq 1$; $\boxed{b}$ diverge se $\gamma = 1$; ■ converge assolutamente per ogni $\gamma > 1$; $\boxed{d}$ converge assolutamente se e solo se $\gamma > 3$.

10. Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\varphi(x)\,\mathrm{sign}(|x| - 1) > 0$ se $|x| \neq 1$. Allora $\boxed{a}$ $\nabla\varphi(0,1) = \mathbf{0}$; $\boxed{b}$ $D_1\varphi(1,0) > 0$; ■ $D_2\varphi(-1,0) = 0$; $\boxed{d}$ $D_1\varphi(-1,0) \geq 0$.

---

spazio riservato alla commissione