Concetti di Analisi Matematica di Base — 09/09/02

♠ Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione e si ponga $a_n = f(1/n)$ per $n > 0$ intero. Allora
♢ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$

♠ La successione $\{(n + 2\sqrt{n})/(2n + 1)\}$
♢ converge a $1/2$

♠ La serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-3/2}$
♢ converge assolutamente

♠ Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita dalle formule $f(x) = x + \sin \pi x$ se $x \notin \{0, 1\}$ e $f(0) = f(1) = 0$. Allora
♢ f è differenziabile in 0

♠ L'integrale $\int_0^1 \sin \pi x \, dx$ vale
♢ $2/\pi$

♠ Il limite $\lim_{x\to 0^+} \big(x + \sin 2x)\big)/(x + x^2)$ vale
♢ 3

♠ Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Perché f sia integrabile in $[1, 2]$ è sufficiente che
♢ f sia continua in $(0, +\infty)$

♠ Sia S la superficie sferica di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 2 e sia $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definita da $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)/2$ se x, y e z sono tutti e tre positivi e $f(x, y, z) = 0$ altrimenti. Allora l'integrale $\int_S (x + y + z + f(x, y, z))\, dS$ vale
♢ 4π

♠ Sia $\mathbf{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ data dalla formula $\mathbf{f}(x, y) = e^x(x, y, 0)$ e sia L il suo differenziale in $(0, 1)$. Allora, per ogni $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, $L\mathbf{h}$ vale
♢ $(h_1, h_1 + h_2, 0)$

♠ Sia $f:(0, +\infty)\to\mathbb{R}$ data dalla formula $f(x) = 2x \ln^2 x$. Allora $f'(1)$ vale
♢ 0