Concetti di Analisi Matematica di Base

Appello del giorno 09/02/05	Cognome e nome (stampatello)	C.L. (M/F)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 ,** **Bianca = 0 ,** **Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Per $r > 0$ sia $D_r = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \le r\}$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to(0,0)} f(x) = 3$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\boxed{\text{a}}$ $f(x) \le 4$ per $x \in D_\delta$; $\boxed{\text{b}}$ f è limitata in $D_{2\delta} \setminus D_\delta$; $\boxed{\text{c}}$ f è continua in $(0,0)$; $\boxed{\text{d}}$ $f(x) \le 3$ per $0 < |x| < \delta$.

2. Sia f una funzione integrabile in un insieme misurabile B di uno spazio di misura. Si sa che $\int_B f(x)\, dm \le 8$ e che $f(x) \ge 2$ per ogni $x \in B$. Allora $m(B)$ è $\boxed{\text{a}}$ ≤ 4 ; $\boxed{\text{b}}$ ≥ 4 ; $\boxed{\text{c}}$ ≤ 2 ; $\boxed{\text{d}}$ ≥ 2 .

3. Sia L il differenziale in $(3,1)$ della funzione $f(x,y) = x^3 y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora, per $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, il valore di $L\mathbf{h}$ è $\boxed{\text{a}}$ $27h_1 + 27h_2$; $\boxed{\text{b}}$ $(27h_1, 27h_2)$; $\boxed{\text{c}}$ $(40h_1, 16h_2)$; $\boxed{\text{d}}$ $40h_1 + 16h_2$.

4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 + (-1)^n n}{n^4 + n^2 + 1}$ $\boxed{\text{a}}$ converge assolutamente; $\boxed{\text{b}}$ diverge; $\boxed{\text{c}}$ converge semplicemente; $\boxed{\text{d}}$ oscilla.

5. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 6x$ se $x \le 0$ e $f(x) = 2\arctan 3x$ se $x > 0$ risulta $\boxed{\text{a}}$ differenziabile in 0 ; $\boxed{\text{b}}$ discontinua in 0 ; $\boxed{\text{c}}$ continua in 0 ma non differenziabile in 0 ; $\boxed{\text{d}}$ limitata in $\mathbb{R}$.

6. Siano $\{a_n\}$ e $\{q_n\}$ due successioni reali positive tali che: $q_n = a_n / a_{n+1}$ $\forall\, n$; $\lambda = \lim q_n$ esiste finito. Allora perché la serie $\sum a_n$ converga è sufficiente che $\boxed{\text{a}}$ $\lambda > 1$; $\boxed{\text{b}}$ $q_n < 1$ $\forall\, n$; $\boxed{\text{c}}$ $\lambda < 1$; $\boxed{\text{d}}$ $q_n > 1$ $\forall\, n$.

7. Il limite $\lim_{n\to\infty} (-1)^{(n!)} (n!)^3 \sin(2/(n!)^4)$ $\boxed{\text{a}}$ vale 0 ; $\boxed{\text{b}}$ vale 2 ; $\boxed{\text{c}}$ è infinito; $\boxed{\text{d}}$ non esiste.

8. Il limite $\lim_{n\to\infty} (1/n) \sum_{k=1}^{n} \exp(k/n)$ vale $\boxed{\text{a}}$ e ; $\boxed{\text{b}}$ $e - 1$; $\boxed{\text{c}}$ 0 ; $\boxed{\text{d}}$ $+\infty$.

9. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $u^3(x) + 2x^4 u(x) - 3x^6 = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $u(1) = 1$. Allora $u'(1)$ vale $\boxed{\text{a}}$ 3 ; $\boxed{\text{b}}$ 0 ; $\boxed{\text{c}}$ 2 ; $\boxed{\text{d}}$ 4 .

10. Sia m una misura in $\mathbb{R}^2$ tale che, per ogni coppia di intervalli limitati I, J di $\mathbb{R}$, $m(I \times J)$ valga la lunghezza di I se $0 \in J$ e 0 altrimenti e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = 3$ se $(x,y) \in [2,6] \times (-2,5)$, $f(x,y) = 7$ se $(x,y) \in [8,9] \times (4,3)$ e $f(x,y) = 0$ altrimenti. Allora $\int_{\mathbb{R}^2} f\, dm$ vale $\boxed{\text{a}}$ 0 ; $\boxed{\text{b}}$ 16 ; $\boxed{\text{c}}$ 1 ; $\boxed{\text{d}}$ 12 .

---

spazio riservato alla commissione