Analisi Matematica 1

Prova scritta 08/02/10	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 ,** **Bianca = 0 ,** **Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Siano $f, F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da $f(x) = 3\cosh(2x)$ se $x \neq 3$ e $f(3) = -2$ e $F(x) = \int_1^x f(y)\,dy$ per $x \in \mathbb{R}$. Allora il quadrato F^2 di F è [a] differenziabile e monotona; [■] differenziabile e non monotona; [c] discontinua in 3; [d] non differenziabile in 3.

2. La funzione di classe C^1 $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ verifica $\varphi(t) + e^{t-5}\sqrt{\varphi(t)} = 2e^{10-2t}\varphi^2(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $\varphi(5) = 1$. Allora $\varphi'(5)$ vale [■] 2; [b] 5; [c] 10; [d] $1/5$.

3. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\lim_{x\to(0,0,0)} f(x) = (1, 2)$. Allora, dette f_1 e f_2 le componenti di f e posto $B_r = B_r(0, 0, 0)$ per $r > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che [a] $|f(x)| \leq 3$ per ogni $x \in B_\delta$; [b] $|f(x)| \geq 2$ per ogni $x \in B_\delta$; [■] $f_1(x) > 0$ per ogni $x \in B_{2\delta} \setminus B_\delta$; [d] $f_1(x)f_2(x) > 0$ per ogni $x \in B_{2\delta}$.

4. Il limite $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n$, ove $a_n = 3n^{1.2} - 2 + 8n^2$ e $b_n = 5n^2 \tanh n^4 - \cos n^3$, vale [a] $5/8$; [b] $3/5$; [c] $8/3$; [■] $8/5$.

5. Sia $f : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $f(x, y) = (e^y \sin 2x, y^2, x^3)$ se $y \geq 0$ e $f(x, y) = (ye^x, y^2, x^3)$ se $y < 0$. Allora il punto $(x_0, 0)$ è una discontinuità di f se x_0 vale [■] 12; [b] 2π; [c] 0; [d] 22π.

6. Siano D il disco ottenuto intersecando la palla $\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 3\}$ con il piano $x_1 = x_2$ e $f : D \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 3$ se $x_3 \geq 0$ e $f(x) = 9$ se $x_3 < 0$. Allora la media $⨍_D f(x)\,dS$ vale [a] 3; [b] 9; [c] 4; [■] 6.

7. Per ogni intervallo limitato $I \subset \mathbb{R}$ si ponga $m(I) = 6\,\text{lungh}(I \cap (3, 5)) + 10\#(I \cap \{3, 4, 5\})$ ove $\#$ significa "numero dei punti di". Allora $\int_{[1,4)} (x/(x^2 + 1))\,dm$ vale [a] $12 + 2\ln 2$; [b] $8 + 9\ln 2$; [■] $3 + 3\ln 1.7$; [d] $12 + 5\ln 1.7$.

8. Il numero delle soluzioni complesse z dell'equazione $(iz)^3(z^4+1)(z^6-1) = 0$ che verificano $\operatorname{Im} z < -1/3$ è [a] 0; [b] 10; [■] 4; [d] 3.

9. Sia $\gamma \in (0, +\infty)$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{-(\gamma - 3\tanh n)}$ [a] converge semplicemente se $\gamma = 5$; [b] converge assolutamente se e solo se $\gamma \geq 5$; [■] converge assolutamente se $\gamma = 5$; [d] converge assolutamente se e solo se $\gamma > 3$.

10. Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $\varphi(x) = 0$ se $|x| = 1$ oppure $x_1 = 0$ e $\varphi(x) \neq 0$ altrimenti. Allora quale delle affermazioni seguenti è incompatibile con le ipotesi? [■] $\nabla\varphi(0, 1) = (0, 1)$; [b] $\nabla\varphi(1, 0) = (0, 0)$; [c] $\nabla\varphi(0, 0) = (-1, 0)$; [d] $\nabla\varphi(-1, 0) = (0, 0)$.

---

spazio riservato alla commissione