Analisi Matematica 1

Prova scritta 07/09/12	Cognome e nome (stampatello chiaro)	C.L. (Mat/Fis)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 ,** **Bianca = 0 ,** **Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Sia $\alpha > 0$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1+n^{-3})^{\alpha}(1+n^2)^{-\alpha}(\sin n^{-4})^{\alpha}$ converge se e solo se [a] $\alpha > 1/2$; [■] $\alpha > 1/6$; [c] $\alpha > 1/4$; [d] $\alpha > 1/3$.

2. Siano $\lambda, \mu : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ date da $\lambda(x) = \sqrt[4]{1+3x} - 1$ e $\mu(x) = \sin^2(\sqrt{3x})$. Allora il limite $\lim_{x\to 0^+} \lambda(x)/\mu(x)$ vale [■] $1/4$; [b] $2/3$; [c] $4/3$; [d] $3/4$.

3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ non negativa. Perché f sia integrabile e $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$ è [■] nec. che $\forall n$ esista $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ a scala tale che $s \geq f$ e $\int_0^1 s(x)\,dx < 1/n$; [b] suff. che $\forall n$ esista $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ a scala tale che $s \leq f$ e $s(x) \geq f(x) - (1/n)$ $\forall x$; [c] nec. che $\forall n$ esista $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ a scala tale che $s \geq f$ e $s(x) \leq 1/n$ $\forall x$; [d] nec. e suff. che $\forall n$ esista $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ a scala tale che $s \geq f$ e $s(x) \leq 1/n$ $\forall x$.

4. Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(4,1,6) = (1/4, 7, -1/6)$ e $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(x,y) = f(4xy^4, x, 6x^6y^4)$. Allora $(\partial\varphi/\partial y)(1,1)$ vale [a] -4 ; [b] 7 ; [■] 0 ; [d] $(1/4) - (1/6)$.

5. Siano $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\{x_n\}$ reale convergente a 2 . Allora $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 3$ [■] se φ è continua in 2 e $\varphi(2) = 3$; [b] se φ è continua in 3 e $\varphi(3) = 2$; [c] se $\varphi(x) = 3$ $\forall x \neq 2$; [d] se $\lim_{x\to 2} \varphi(x) = 3$.

6. Siano $x \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tali che $f(x) = 0$. Allora perché f^7 sia differenziabile in x è [a] nec. che f sia differenziabile in x ; [b] nec. che $f'(x)$ esista finita; [■] suff. che $f(x+h) = o(|h|^{1/3})$ per $h \to 0$; [d] nec. che $f(x+h) = o(|h|)$ per $h \to 0$.

7. Sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $F(7) = 4$. Perché il punto 7 sia di massimo assoluto per F è [a] suff. che F cresca in $(-\infty, 7)$ e decresca in $(7, +\infty)$; [b] nec. che $F'(7) = 0$; [■] nec. che F sia limitata superiormente; [d] nec. che F sia continua in 7 .

8. Per ogni rettangolo E di $\mathbb{R}^2$ si ponga $m(E) = 0$ se $\operatorname{area} E = 0$ e $m(E) = \operatorname{lungh} S$ se $E = I \times J$ non è degenere, ove S è uno degli insiemi elencati. Indicare la scelta di S che rende m misura additiva [a] $S = I$; [b] $S = J \cap (0,1)$; [■] $S = \{x \in E : 2x_1 + x_2 = 0\}$; [d] $S =$ diagonale di E .

9. L'integrale $\int_0^1 x \cosh x\,dx$ vale [a] e ; [b] $e - 1$; [■] $1 - e^{-1}$; [d] e^{-1} .

10. Si ha $\forall z \in \mathbb{C}$ [a] $|e^z| = e^{|z|}$; [b] $|\cos^2 z| \leq 1$; [c] $\cos z = i\cosh(iz)$; [■] $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

---

spazio riservato alla commissione