Concetti di Analisi Matematica di Base

Appello del giorno 05/07/05	Cognome e nome (stampatello)	C.L. (M/F)

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Per $r > 0$ sia $C_r = (-r, r)^3$ e sia $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che $\lim_{x\to(0,0,0)} \mathbf{f}(x) = (3, 0)$. Allora esiste $\delta > 0$ tale che $\boxed{\text{a}}$ $|\mathbf{f}(x)| \le 4$ per $x \in C_\delta$; $\boxed{\text{b}}$ $\mathbf{f}$ è limitata in $\mathbb{R}^3 \setminus C_\delta$; $\boxed{\text{c}}$ $\mathbf{f}$ è continua in $(0, 0, 0)$; $\boxed{\text{d}}$ $|\mathbf{f}(x)| > 2$ se $x/\delta \in C_4 \setminus C_2$.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e, per ogni versore $\mathbf{r}$, sia f_r la derivata di f in $(1, 3)$ nella direzione $\mathbf{r}$. Si sa che $|f_r| \le 5$ per ogni versore $\mathbf{r}$ e che $f_r = 5$ se $\mathbf{r} = (1, -1)/\sqrt{2}$. Allora $\sqrt{2} f_r$ con $\mathbf{r} = (1, 0)$ vale $\boxed{\text{a}}$ 5 ; $\boxed{\text{b}}$ -4 ; $\boxed{\text{c}}$ 4 ; $\boxed{\text{d}}$ -5 .

3. Siano $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di classe C^1 e L il suo differenziale in $(2, 1, -5)$. Si sa che $L\mathbf{e}_1 = (3, 4, -1)$, $L\mathbf{e}_2 = (-1, 2, 0)$, $L\mathbf{e}_3 = (0, 2, 1)$. Allora $\operatorname{div} \mathbf{f}(2, 1, -5)$ vale $\boxed{\text{a}}$ 6 ; $\boxed{\text{b}}$ 5 ; $\boxed{\text{c}}$ 7 ; $\boxed{\text{d}}$ 4 .

4. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2 + (-1)^n n^3}{n^4 + \sin 5n}$ $\boxed{\text{a}}$ converge assolutamente; $\boxed{\text{b}}$ diverge; $\boxed{\text{c}}$ converge semplicemente; $\boxed{\text{d}}$ oscilla.

5. Siano $A = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ e $f : A \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1+6x$ se $x < 0$ e $f(x) = x^2+\arctan 6x$ se $x > 0$. Allora f è $\boxed{\text{a}}$ differenziabile; $\boxed{\text{b}}$ discontinua in almeno un punto; $\boxed{\text{c}}$ continua ma non ovunque differenziabile; $\boxed{\text{d}}$ limitata.

6. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie reale convergente. Allora (o essendo inteso per $n \to \infty$) $\boxed{\text{a}}$ esiste il limite $\lim_{n\to\infty} \sin^2 a_n$; $\boxed{\text{b}}$ $a_n = o(1/n)$; $\boxed{\text{c}}$ $|a_n| = o(1/n)$; $\boxed{\text{d}}$ $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

7. Il limite $\lim_{x\to0^+} x^{-3} \ln(1 + 4x^2)$ vale $\boxed{\text{a}}$ $+\infty$; $\boxed{\text{b}}$ 4 ; $\boxed{\text{c}}$ 0 ; $\boxed{\text{d}}$ non esiste.

8. Il limite $\lim_{n\to\infty} n \int_{2/n}^{4/n} \cos(x^2)\, dx$ vale $\boxed{\text{a}}$ 4 ; $\boxed{\text{b}}$ 2 ; $\boxed{\text{c}}$ 0 ; $\boxed{\text{d}}$ $+\infty$.

9. Sia $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $5u^3(x) - (x + 1)^4 u(x) = 4(x + 1)^6$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $u(0) = 1$. Allora $2u'(0)$ vale $\boxed{\text{a}}$ 8 ; $\boxed{\text{b}}$ 0 ; $\boxed{\text{c}}$ 4 ; $\boxed{\text{d}}$ $+\infty$.

10. Sia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $\rho(x) = 2$ se $x \le 0$ e $\rho(x) = 6$ se $x > 0$ e sia m la misura definita da $m(I) = \int_I \rho(x)\, dx$ se I è un intervallo limitato. Allora $\int_{(-1,1)} \operatorname{sign} x\, dm$ $\boxed{\text{a}}$ vale 0 ; $\boxed{\text{b}}$ vale 1 ; $\boxed{\text{c}}$ non esiste; $\boxed{\text{d}}$ vale 4 .

---

spazio riservato alla commissione