Analisi Matematica 1

Prova scritta **03/09/13**	**Cognome e nome (stampatello chiaro)**	**C.L. (Mat/Fis)**

Una e una sola è la risposta esatta. Annerire la casella scelta così: ■
Punti per ogni risposta: **Esatta = 3 , Bianca = 0 , Errata = −1 .**
Tempo a disposizione: **1 ora e 45 minuti.**

---

1. Sia $\alpha > 0$. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{1-2\alpha} + \sin n^{-\alpha/3}\right)$ converge $\boxed{a}$ se e solo se $\alpha > 1/2$; ■ se e solo se $\alpha > 3$; $\boxed{c}$ se e solo se $\alpha > 1/3$; $\boxed{d}$ per nessun α .

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $f(x,y) = (y^2-4)(y^2-1)$ se $x < 0$ e $f(x,y) = (x^2-x)^+ \tanh x$ se $x \geq 0$. Allora il numero dei $c \in \mathbb{R}$ tali che f è continua in $(0,c)$ è ■ 4 ; $\boxed{b}$ 2 ; $\boxed{c}$ infinito; $\boxed{d}$ 0 .

3. Sia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitata e non negativa. Perché f sia integrabile è ■ suff. che f^4 sia integrabile; $\boxed{b}$ nec. che $\forall\, \varepsilon > 0$ esista $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ a scala tale che $0 \leq s - f \leq 4\varepsilon$; $\boxed{c}$ suff. che l'insieme degli x tali che $f(x) > 0$ sia misurabile; $\boxed{d}$ nec. che $\forall\, \varepsilon > 0$ esista $s : [0,1] \to \mathbb{R}$ a scala tale che $s \geq f$ e $\int_0^1 s(x)\, dx < 4\varepsilon$.

4. Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f(7,6) = (2,-3)$ e $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ data da $\varphi(x,y) = f(7xy^5, 6x^5y) + 8x^3$. Allora $(\partial\varphi/\partial y)(1,1)$ vale $\boxed{a}$ 53 ; $\boxed{b}$ −38 ; ■ 52 ; $\boxed{d}$ −39 .

5. Siano $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $\{z_n\}$ complessa convergente a i . Allora $\lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = 1$ ■ se $\operatorname{Re}\varphi$ e $\operatorname{Im}\varphi$ sono continue in i e $\varphi(i) = 1$; $\boxed{b}$ se $\operatorname{Re}\varphi$ e $\operatorname{Im}\varphi$ sono lipschitziane e $\varphi(1) = i$; $\boxed{c}$ se $\varphi(z) = 1 \;\; \forall\, z \neq i$; $\boxed{d}$ se $\lim_{z\to i} \varphi(z) = 1$.

6. Siano $I = (-1,1)$ e $u : I \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che $7(1+x)^4 e^{u(x)} - 4e^{3u(x)} = 3(1+x)^6$ per ogni $x \in I$ e $u(0) = 0$. Allora $u'(0)$ vale $\boxed{a}$ 3 ; $\boxed{b}$ 6 ; ■ 2 ; $\boxed{d}$ 7 .

7. Sia $F : [5,+\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $F(5) = 4$. Perché 5 sia punto di massimo locale per F è $\boxed{a}$ nec. che esista $\delta \in (0,1)$ tale che F decresca in $(5, 5+\delta)$; $\boxed{b}$ nec. che $F'_+(5) = 0$; ■ suff. che $F'_+(5)$ esista e valga −2 ; $\boxed{d}$ suff. che $F'_+(5)$ esista e valga 3 .

8. Siano $A = \{3,5,7\}$ ed $\mathcal{E} = \{\emptyset, \{3\}, \{5\}, \{7\}\}$ e per $E \in \mathcal{E}$ si ponga $m(E) = 0$ se $E = \emptyset$ e $m(E) = 4x$ se $E = \{x\}$, $x \in A$. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è data da $f(x) = 1/(6x)$, allora $\boxed{a}$ f non è integrabile; $\boxed{b}$ f non è a scala; ■ $\int_A f\, dm = 2$; $\boxed{d}$ $\int_A f\, dm = 9/4$.

9. L'integrale $\int_0^3 \sqrt{1+5x}\, dx$ vale $\boxed{a}$ 5/42 ; $\boxed{b}$ 1/14 ; ■ 42/5 ; $\boxed{d}$ 14 .

10. Se $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ e $w = e^{z^3}$, allora $\operatorname{Im} \frac{w}{|w|}$ vale $\boxed{a}$ $\cos(x^3 - 3xy^2)$; $\boxed{b}$ $\cos(3x^2y - y^3)$; $\boxed{c}$ $\sin(x^3 - 3xy^2)$; ■ $\sin(3x^2y - y^3)$.

---

spazio riservato alla commissione