6. Spazi vettoriali, normati e con prodotto interno

Definizione. - Si dice spazio vettoriale o lineare su un campo K una terna (X, s, p) dove X è un insieme non vuoto, s un'applicazione su $X \times X$ a valori in X e p un'applicazione su $K \times X$ a valori in X tali che, ponendo per ogni $\varphi_1,\ \varphi_2 \in X$ $\varphi_1 + \varphi_2 := s(\varphi_1, \varphi_2)$ e per ogni $\alpha \in K$ e $\varphi \in X$ $\alpha\varphi := p(\alpha, \varphi)$, valgono le seguenti proprietà:

s1) $\forall \varphi, \psi \in X \quad \varphi + \psi = \psi + \varphi$ (proprietà commutativa della somma);
s2) $\forall \varphi, \psi, \chi \in X \quad (\varphi + \psi) + \chi = \varphi + (\psi + \chi)$ (proprietà associativa della somma);
s3) $\exists 0_X \in X$ t.c. $\forall \varphi \in X$ $\varphi + 0_X = \varphi$ (esistenza dell'elemento neutro);
s4) $\forall \varphi \in X$ $\exists (-\varphi) \in X$ t.c. $\varphi + (-\varphi) = 0_X$ (esistenza dell'elemento opposto);
p1) $\forall \alpha,\ \beta \in K,\ \forall \varphi \in X \quad \alpha(\beta\varphi) = (\alpha\beta)\varphi$ (proprietà associative del prodotto);
p2) $\forall \alpha,\ \beta \in K,\ \forall \varphi \in X \quad (\alpha+\beta)\varphi = \alpha\varphi+\beta\varphi$ (proprietà distributiva rispetto alla somma in K);
p3) $\forall \alpha \in K,\ \forall \varphi,\ \psi \in X \quad \alpha(\varphi+\psi) = \alpha\varphi+\alpha\psi$ (proprietà distributiva rispetto alla somma in X);
p4) $\forall \varphi \in X \quad 1_K\varphi = \varphi$ (elemento neutro rispetto al prodotto) $\blacksquare$.

Secondo l'usuale terminologia, gli elementi di X si chiamano vettori e quelli di K scalari. Nel seguito noi ci occuperemo esclusivamente del caso in cui $K = \mathbf{R}$ oppure $K = \mathbf{C}$.

In uno spazio lineare X valgono le seguenti proprietà:

1) $0_K\varphi = 0_X, \quad \forall \varphi \in X$;
2) $\alpha 0_X = 0_X, \quad \forall \alpha \in K$;
3) $[\alpha\varphi = 0_K, \text{ e } \alpha \neq 0_K] \ \Rightarrow\ [\varphi = 0_X]$;
4) $(-1_K)\varphi = -\varphi, \quad \forall \varphi \in X$.

Esempi di spazi vettoriali sono $\mathbf{R}^N$, $\mathbf{C}^N \equiv \mathbf{R}^{2N}$, nonchè

$$l^2(\mathbf{C}) = \{\{\xi_n\};\ \xi \in \mathbf{C},\ \forall n \in \mathbf{N}^+ :\ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi|^2 < +\infty\}$$

$$C^0([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbf{R} :\ f \text{ continua in } [a,b]\}$$

$$L^1(a,b) = \{f : [a,b] \to \mathbf{R} :\ \int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty\}$$

$$L^\infty(a,b) = \{f : [a,b] \to \mathbf{R} :\ f \text{ limitata in } [a,b]\}$$

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}) = \{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} :\ \forall k,\ l \in \mathbf{N}\ \lim_{|x| \to +\infty} |x^k f^{(l)}(x)| = 0\}$$

con le ovvie definizioni di somma di due elementi dello spazio e di moltiplicazione di un vettore dello spazio per uno scalare. Tralasciamo la verifica che si tratta effettivamente di spazi vettoriali. Ci limitiamo ad osservarre che nel caso di l^2 tale verifica richiede l'uso della disuguaglianza di Minkowsky.

Definizione. - Dato uno spazio lineare (X, s, p) su un campo K, si chiama varieà lineare in X un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{M}$ t.c.

$$\forall \varphi,\ \psi \in \mathcal{M},\ \forall \alpha,\ \beta \in K \qquad \alpha\varphi + \beta\psi \in \mathcal{M} \quad \blacksquare.$$

Un esempio non banale di varietà lineare in $C^0([a,b])$ è dato da $C^0_0([a,b])$, ossia le funzioni di $C^0([a,b])$ che verificano la condizione $f(a) = f(b) = 0$.

Definizione. - Dato uno spazio vettoriale X ed un suo sottoinsieme S, si chiama varietà lineare generata da S e si indica con il simbolo $V'S$ l'intersezione di tutte le varietà lineari contenenti S, ossia

$$V'S = \bigcap_{\mathcal{M} \text{ varietà lineare: } S \subset \mathcal{M}} \mathcal{M}.$$

È facile verificare che la definizione è ben posta, in quanto l'operazione precedente definisce effettivamente una varietà lineare ed essa contiene S $\blacksquare$.

Concludiamo questi brevi richiami sugli spazi vettoriali con questa

Definizione. - Una spazio vettoriale X ha dimensione N e scriviamo $\dim X = N$ se esiste una N-pla $\{u_1, \ldots, u_N\}$ tale che per ogni $x \in X$ esiste ed è unica la rappresentazione

$$x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \, u_i \qquad \alpha_i \in K \quad \blacksquare.$$

Se $\dim X = N$ per qualche N finito, X è uno spazio finito - dimensionale; altrimenti diciamo che ha infinite dimensioni.

Definizione. - Si dice spazio normato una quaterna $(X, s, p, \| \cdot \|)$ dove (X, s, p) è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ o su $\mathbf{C}$ e $\| \cdot \|$ è un'applicazione da X a $\mathbf{R}$ per la quale valgono le seguenti proprietà:

N1) $\forall\, x \in X$ $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \iff x = 0_X$;
N2) $\forall\, x \in X,\ \forall\, \alpha \in \mathbf{R} (\in \mathbf{C})$ $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
N3) $\forall\, x,\ y \in X$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (disuguaglianza triangolare) $\blacksquare$.

La funzione $\| \cdot \|$ è detta norma ed estende al contesto astratto l'usuale nozione di norma di un vettore in $\mathbf{R}^N$. Se per una funzione $||| \cdot ||| :\ X \to \mathbf{R}$ valgono le proprietà N2) e N3), ma non la proprietà N1) (ossia esistono vettori a 'norma' nulla che non sono nulli), parliamo non di norma ma di seminorma.

È immediato verificare che $\forall\, x,\ y \in X$ risulta

$$|\, \|x\| - \|y\| \,| \leq \|x - y\|.$$

Infatti possiamo riscrivere la disuguaglianza triangolare $\|x + y\| - \|y\| \leq \|x\|$. Se poniamo $x + y = z$, la relazione precedente si riscrive $\|z\| - \|y\| \leq \|z - y\|$. In modo analogo otteniamo $\|y\| - \|z\| \leq \|y - z\| = \|z - y\|$, che implica $\|z\| - \|y\| \geq -\|z - y\|$ e con ciò abbiamo finito.

Esempi di spazi normati sono

1) $(\mathbf{R}^N, \| \cdot \|_e)$ dove $\|\alpha\|_e := \left(\sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$;

2) $(\mathbf{R}^N, \|\cdot\|_{max})$ dove $\|\alpha\|_{max} := \max_{i=1\ldots,N}\{|\alpha_i|\}$;

3) $(\mathbf{R}^N, \|\cdot\|_s)$ dove $\|\alpha\|_s := \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i|$;

4) $(l^2(\mathbf{R}), \|\cdot\|)$ dove $\|\{\xi_n\}\| := \left(\sum_{i=0}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

5) $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_{sup})$ dove $\|f\|_{sup} := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$;

6) $(C^0([a,b]), \|\cdot\|_1)$ dove $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx$.

7) $(L^\infty(a,b), \|\cdot\|_{sup})$ dove $\|f\|_{sup} := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$;

8) $(L^1(a,b), \|\cdot\|_1)$ dove $\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx$.

Come si vede dagli esempi precedenti, su spazi vettoriali diversi si può definire la medesima norma, ma anche sullo stesso spazio vettoriale possono essere introdotte norme fra loro differenti. Si pongono dunque, in maniera del tutto naturale, due distinti problemi:

a) Norme diverse sullo stesso spazio vettoriale producono caratteristiche fra loro in qualche modo distinguibili?

b) Spazi vettoriali diversi su cui è definita la medesima norma mostrano comportamenti diversi?

Nel seguito cercheremo di dare una risposta a questi due quesiti. Osserviamo, innanzi tutto, che la norma introduce naturalmente sullo spazio vettoriale X su cui è definita una metrica, in base alla quale è possibile dare la nozione di convergenza di una successione o di una serie. Data, infatti una successione $\{x_n\} \subset X$ ed un elemento $x \in X$,

$$[x_n \overset{X}{\longrightarrow} x \quad \text{quando} \quad n \to +\infty] \qquad \Leftrightarrow \qquad [\|x_n - x\|_X \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0].$$

In maniera del tutto analoga a quanto si fa in $\mathbf{R}$, data una successione $\{x_n\} \subset X$, la convergenza in X della serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ è ricondotta alla convergenza in X della successione delle somme parziali.

Dato un insieme $X_0 \subset X$, tale insieme si dice *limitato* se esiste una costante positivo M tale che per ogni $x \in X_0$ risulta $\|x\|_X \le M$. Dato $x_0 \in X$, definiamo *intorno di x_0 di ampiezza r* l'insieme $B_r(x_0) = \{y \in X : \ \|x_0 - y\| < r\}$. Considerati, quindi, un insieme $A \subset X$ e un vettore $x_0 \in X$, diciamo che x_0 è *di accumulazione per A*, se per ogni $r < \bar{r}$ l'intorno $B_r(x_0)$ contiene almeno un punto di A diverso da x_0. Un insieme $A \subset X$ si dice *chiuso in X* se contiene tutti i suoi punti di accumulazione; un insieme $B \subset X$ si dice *aperto in X* se per ogni $x_0 \in A$ è possibile determinare un intorno $B_r(x_0)$ tutto contenuto in A. Infine, dato un insieme $C \subset X$, definiamo la *chiusura di C* e la indichiamo con $\bar{C}$, l'insieme ottenuto dall'unione di C con tutti i suoi punti di accumulazione.

Definizione. - Dato un insieme V chiuso, l'insieme $V_0 \subset V$ si dice denso in V se $\overline{V_0} = V$ ■.

Osservazione. - Come si fa usualmente in $\mathbf{R}^N$, è facile vedere che un insieme $C \subset X$ è chiuso in X se e solo se ogni suo elemento x è il limite di una successione $\{x_n\} \subset C$ convergente in X a x. Possiamo dunque concludere che V_0 è denso in V se e solo se ogni elemento $v \in V$ è il limite in V di una successione $\{v_n\} \subset V_0$ ▪.

In base alla precedente nozione di convergenza, è facile mostrare che la somma, il prodotto per uno scalare e la norma stessa sono continue. Ci limitiamo a verificarlo per la norma. Si tratta di mostrare che se $x_n \to x$ in X allora $\|x_n\| \to \|x\|$ in $\mathbf{R}$. Basta applicare la disuguaglianza triangolare ed osservare che

$$| \, \|x_n\| - \|x\| \, | \leq \|x_n - x\|.$$

Poichè il termine di destra tende a zero per definizione ed il termine di sinistra è non negativo, per il teorema dei carabinieri concludiamo immediatamente che anche il termine di sinistra tende a zero.

Abbiamo ora tutti gli strumenti per rispondere all'interrogativo sollevato in a) in precedenza. Iniziamo con la seguente

Definizione. - Dato uno spazio vettoriale X, due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su X si dicono equivalenti se esistono due costanti positive C_1 e C_2 tali che per ogni $x \in X$ risulta

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad ▪.$$

Dalla definizione è immediato verificare che se due norme sono equivalenti, allora tutte e sole le successioni che sono convergenti rispetto a $\|\cdot\|_1$ sono convergenti rispetto a $\|\cdot\|_2$ allo stesso elemento limite.

Se vale una sola delle due disuguaglianze considerate sopra, ad esempio

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2,$$

diciamo che $\|\cdot\|_2$ è più forte di $\|\cdot\|_1$, nel senso che tutte le successioni convergenti per la norma due lo sono anche per la norma uno, ma non vale il viceversa.

Esercizio 1. - Verificare che le tre norme $\|\cdot\|_e$, $\|\cdot\|_{max}$, $\|\cdot\|_s$ introdotte sopra su $\mathbf{R}^N$ sono tutte equivalenti ▪.

Esercizio 2. - Verificare che in $C^0([a,b])$ la $\|\cdot\|_{sup}$ è più forte della $\|\cdot\|_1$ ▪.

Il risultato dell'Esercizio 1 è solo un caso particolare di un enunciato molto più generale. Infatti

Proposizione. - *Se la dimensione vettoriale di uno spazio normato X è finita, allora tutte le norme definite su di esso sono fra loro equivalenti ▪.*

Oltre a questa, gli spazi normati di dimensione vettoriale finita godono di un'altra proprietà particolare. Abbiamo il seguente

Teorema 1 (Teorema di Weierstrass). - *Uno spazio normato X ha dimensione vettoriale finita se e solo se da ogni successione $\{x_n\} \subset X$ limitata è possibile estrarre una sottosuccessione convergente in X* $\blacksquare$.

Gli spazi normati di dimensione infinita non godono di questa proprietà ed anzi non è difficile fare l'esempio di successioni limitate che non convergono. Ovviamente l'inverso è banale, ossia tutte le successioni convergenti sono limitate.

Esempio 1. - Nello spazio $(C^0([-1,1]), \|\cdot\|_{sup})$ consideriamo la successione $\{g_n\}$ definita da

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ nx & 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ 1 & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

È immediato verificare che $\|g_n\|_{sup} = 1$, dunque la successione costituisce un insieme limitato. D'altro canto il limite puntuale della successione è la funzione g definita da

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Questo è l'unico candidato possibile ad essere il limite della successione $\{g_n\}$ e, d'altro canto, non può essere il limite in C^0, perchè non si tratta di una funzione continua. Quindi, pur avendo una successione limitata, essa non è convergente e facilmente si verifica che non può esserlo alcuna sua estratta $\blacksquare$.

Esempio 2. - Potrebbe sembrare che la mancata convergenza della successione $\{g_n\}$ studiata nell'esempio precedente dipenda unicamente dall'aver considerato lo spazio C^0; nasce spontanea l'idea che limitandosi a L^∞ (spazio delle funzioni limitate, senza alcun requisito di continuità), le cose possano migliorare. Purtroppo non è così ; se infatti prendiamo la funzione g che resta l'unico candidato limite ammissibile, dovremmo avere $\|g_n - g\|_{sup} \to 0$ quando $n \to +\infty$. Tuttavia

$$(g - g_n)(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 - nx & 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo che $\|g - g_n\|_{sup} = \sup\limits_{x \in [-1,1]} |(g - g_n)(x)| = 1$ e questa quantità non tende affatto a zero per $n \to +\infty$ $\blacksquare$.

Esempio 3. - Consideriamo la stessa successione nello spazio $(L^1(-1,1), \|\cdot\|_1)$. È immediato verificare che $\|g_n\|_1 = 1 - \frac{1}{2n}$, dunque la successione costituisce un insieme limitato. Se calcoliamo $\|g_n - g\|_1$, facilmente si ottiene $\|g_n - g\| = \frac{1}{2n} \to 0$ quando $n \to +\infty$. In questo caso, dunque, la successione converge in L^1 al suo limite. ∎.

Esempio 4. - Nello spazio $(L^1(-1,1), \|\cdot\|_1)$ consideriamo la successione $\{f_n\}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ n^2 x & 0 \leq x < \dfrac{1}{2n} \\ n - n^2 x & \dfrac{1}{2n} \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \dfrac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

È immediato verificare che $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$, dunque la successione costituisce un insieme limitato. D'altro canto il limite puntuale della successione è la funzione f nulla in tutto l'intervallo. Questo è l'unico candidato possibile ad essere il limite della successione $\{f_n\}$; d'altro canto, se calcoliamo $\|f_n - f\|_1$, esso si riduce a $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$ e non tende a zero quando $n \to +\infty$. Quindi, come negli esempi 1 e 2, pur avendo una successione limitata, essa non è convergente e facilmente si verifica che non può esserlo alcuna sua estratta ∎.

Il confronto fra gli Esempi 1, 2 e 3 mostra che una stessa successione può essere convergente o meno a seconda dello spazio che si consideri. Questo induce a pensare che ci possa essere una sorta di legame ottimale fra lo spazio in esame e la norma che si pone su di esso; sullo spazio delle funzioni assolutamente integrabili (e quindi non necessariamente regolari) lavora bene (nel senso che garantisce la convergenza) una norma che sfrutta proprio questa proprietà. Tutto ciò è legato alla domanda b) che ci siamo posti in precedenza e alla quale vogliamo ora rispondere.

Come prima cosa introduciamo il concetto di successione di Cauchy

Definizione. - Dato uno spazio normato X ed una successione $\{x_n\} \subset X$, diciamo che la successione è di Cauchy se $\|x_n - x_m\| \to 0$ quando $n,\ m \to +\infty$ ∎.

In altri termini, in una successione di Cauchy, al crescere dell'indice, gli elementi si fanno sempre più vicini fra di loro. Mentre è pressochè ovvio che una successione convergente sia anche una successione di Cauchy (se gli elementi si fanno tutti vicini al limte, si fanno anche vicini fra di loro), non è in generale vero il contrario.

Esempio 5. - Se consideriamo la successione $\{g_n\}$ già vista negli Esempi 1, 2 e 3 e la ambientiamo in $C^0([-1,1]), \|\cdot\|_1)$, sappiamo già che la successione non può essere convergente in uno spazio di funzioni continue, perchè l'unico candidato limite è una funzione discontinua. D'altro canto è facile vedere che si tratta di una successione di Cauchy rispetto a $\|\cdot\|_1$. Infatti, assumendo direttamente per semplicità $n > m$, abbiamo

$$\|g_n - g_m\|_1 = \int_0^{\frac{1}{n}} (nx - mx)\,dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} (1 - mx)\,dx$$

$$= \frac{n-m}{2n^2} + (\frac{1}{m} - \frac{1}{n}) - \frac{m}{2}(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}) \overset{n,m \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad ∎.$$

Si giustifica, dunque, la

Definizione. - Dato uno spazio normato X, esso si dice *completo* o *di Banach* se tutte le successioni di Cauchy a valori in X sono convergenti in X $\blacksquare$.

Vale la seguente caratterizzazione degli spazi di Banach

Teorema 2. - *Sia X uno spazio normato. X è di Banach se e solo se per ogni successione $\{x_n\} \in X$ tale che è convergente la serie delle norme $\sum \|x_n\|$ risulta convergente in X la serie $\sum x_n$.*

Quanto all'effettiva esistenza di spazi di Banach, sono naturalmente di Banach $\mathbf{R}^N$, $\mathbf{C}^N$ ed in genere tutti gli spazi di dimensione finita. Venendo, invece, alla dimensione infinita, sono di Banach $C^0([a,b])$ con la norma dell'estremo superiore e $L^1(a,b)$ con la norma integrale. Inoltre per C^0 è fondamentale che l'intervallo sia chiuso e limitato, mentre per L^1 sono ammissibili anche insiemi non limitati.
Concludiamo questa sommaria trattazione sugli spazi normati, introducendo il concetto di sottospazio, che ci tornerà utile nella sezione successiva.

Definizione. - Chiamiamo sottospazio di X normato una varietà lineare $\mathcal{R} \subset X$ chiusa in X $\blacksquare$.

Se consideriamo $C^0([a,b])$ dotato della norma dell'estremo superiore, non è difficile mostrare che $C^0_0([a,b])$ (spazio delle funzioni continue che si annullano agli estremi dell'intervallo) è un suo sottospazio.

Definizione. - Dato X normato ed un suo sottoinsieme S generico, diciamo sottospazio generato da S l'insieme

$$VS = \bigcap_{S\subset\mathcal{R},\ \mathcal{R} \text{ sottospazio di } X} \mathcal{R} \quad \blacksquare.$$

Si potrebbe verificare che tutte le operazioni indicate hanno senso e che l'oggetto costruito è effettivamente un sottospazio, ma tralasciamo questo controllo.

Definizione. - Si dice spazio con prodotto interno od anche prehilbertiano una quaterna (X,s,p,B) dove (X,s,p) è uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ o su $\mathbf{C}$ e B è un'applicazione su $X \times X$ a valori in $\mathbf{C}$ per la quale valgono le seguenti proprietà:

pi1) $\forall\, \varphi_1,\ \varphi_2,\ \psi \in X \quad B(\varphi_1 + \varphi_2, \psi) = B(\varphi_1,\psi) + B(\varphi_2,\psi)$;
pi2) $\forall\, \varphi,\ \psi \in X,\ \forall\, \alpha \in \mathbf{C} \quad B(\varphi, \alpha\psi) = \overline{\alpha} B(\varphi,\psi)$;
pi3) $\forall\, \varphi,\ \psi \in X \quad B(\varphi,\psi) = \overline{B(\psi,\varphi)}$;
pi4) $\forall\, \varphi \in X \quad B(\varphi,\varphi) \geq 0$;
pi5) $\forall\, \varphi \in X \quad B(\varphi,\varphi) = 0_{\mathbf{C}} \ \Rightarrow\ \varphi = 0_X$ $\blacksquare$.

Osservazione. - Si dice che B è una forma sesquilineare hermitiana. Inoltre $B : X \times X \to \mathbf{C}$ se X è vettoriale su $\mathbf{C}$ e $B : X \times X \to \mathbf{R}$ se X è vettoriale su $\mathbf{R}$. In questo secondo caso tutte le segnature relative ai complessi coniugati spariscono $\blacksquare$.

Osservazione. - Da qui in poi, per semplicità, utilizzeremo la notazione (φ, ψ) anzichè $B(\varphi, \psi)$. Inoltre useremo indifferentemente il termine prodotto interno e prodotto scalare come sinonimi $\blacksquare$.

Osservazione. - Da pi3) abbiamo che $(\varphi, \varphi) = \overline{(\varphi, \varphi)}$, quindi tale quantità è reale. La proprietà pi4) afferma in più che essa è non negativa. Inoltre

$$(\alpha\varphi, \psi) = \overline{(\psi, \alpha\varphi)} = \overline{\overline{\alpha}(\psi, \varphi)} = \alpha\overline{(\psi, \varphi)} = \alpha(\varphi, \psi) \quad \blacksquare.$$

Vediamo alcuni esempi di spazi prehilbertiani, per i quali si lascia per esercizio la verifica delle proprietà pi1) - pi5).

1) $\mathbf{C}^N$ dove $(\alpha, \beta) := \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \overline{\beta_i}$;

2) $l^2(\mathbf{C})$ dove $(\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) := \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n}$;

   Perchè l'oggetto costruito si possa effettivamente definire un prodotto interno, occorre come prima cosa verificare che la definizione sia ben posta. In altri termini occorre controllare che
$$\forall \{\xi_n\},\ \{\eta_n\} \in l^2(\mathbf{C}) \qquad \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n} \right| < +\infty.$$
   Questo è vero, dal momento che
$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \overline{\eta_n} \right| \leq \sum_{n=1} |\xi_n \overline{\eta_n}| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$
   dove per la seconda maggiorazione occorre usare la disuguaglianza di Hölder per le serie.

3) $C^0([a, b])$ dove $(f, g) = \int_a^b f\overline{g}\, dx$

4) $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dove $(f, g) = \int_{\mathbf{R}} f\overline{g}\, dx$.

   Anche in quest'ultimo caso, le proprietà di decrescenza rapida delle funzioni di $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ garantiscono la convergenza dell'integrale che definisce il prodotto interno.

Definizione. - Dato uno spazio con prodotto interno X, due suoi vettori φ e ψ si dicono ortogonali se $(\varphi, \psi) = 0$ $\blacksquare$.

Teorema 3 (Disuguaglianza di Schwarz). - *Dati due vettori φ e ψ di uno spazio prehilbertiano, risulta*
$$|(\varphi, \psi)| \leq \sqrt{(\varphi, \varphi)}\sqrt{(\psi, \psi)}$$
e l'uguaglianza vale se e solo se $\exists \alpha,\ \beta \in \mathbf{C}$ con $|\alpha| + |\beta| > 0$ t.c. $\alpha\varphi + \beta\psi = 0_X$.

Definizione. - Dato uno spazio prehilbertiano X, esso risulta naturalmente uno spazio normato con la norma $\|\varphi\| := \sqrt{(\varphi, \varphi)}$ $\blacksquare$.

Per verificare che la definizione è ben posta, occorre mostrare che valgono N1) - N3). Per quanto riguarda N1), abbiamo

$$\|\varphi\| = 0 \;\Rightarrow\; (\varphi, \varphi) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = 0_X$$

ed abbiamo finito. Passando a N2), risulta

$$\|\alpha\varphi\| = \sqrt{(\alpha\varphi, \alpha\varphi)} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}(\varphi, \varphi)} = |\alpha|\sqrt{(\varphi, \varphi)} = |\alpha|\|\varphi\|$$

Venendo, infine, a N3) risulta

$$\|\varphi + \psi\| = \sqrt{(\varphi + \psi, \varphi + \psi)} = \sqrt{(\varphi, \varphi) + 2\mathrm{Re}(\varphi, \psi) + (\psi, \psi)}$$

$$\leq \sqrt{(\varphi, \varphi) + 2|(\varphi, \psi)| + (\psi, \psi)} \leq \sqrt{(\varphi, \varphi) + 2\sqrt{(\varphi, \varphi)}\sqrt{(\psi, \psi)} + (\psi, \psi)} =$$

$$= \sqrt{(\sqrt{(\varphi, \varphi)} + \sqrt{(\psi, \psi)})^2} = \sqrt{(\varphi, \varphi)} + \sqrt{(\psi, \psi)} = \|\varphi\| + \|\psi\| \quad \blacksquare.$$

Dal momento che lo spazio prehilbertiano è dotato di una norma in modo naturale come appena visto, è naturale chiedersi se tutte le norme sono deducibili da un prodotto interno. La risposta negativa è fornita dal seguente

Teorema 4. - *La norma dedotta dal prodotto interno soddisfa la seguente uguaglianza, detta legge del parallelogramma*

$$\|\varphi + \psi\|^2 + \|\varphi - \psi\|^2 = 2\|\varphi\|^2 + 2\|\psi\|^2.$$

Inoltre se per ogni φ e ψ appartenenti ad X normato vale la legge del parallelogramma, allora esiste unico un prodotto interno che induce tale norma come indicato sopra.

Dimostrazione. - Ci limitiamo a dimostrare la prima parte di questo teorema. Abbiamo

$$\|\varphi + \psi\|^2 = (\varphi + \psi, \varphi + \psi) = (\varphi, \varphi) + (\psi, \psi) + 2\mathrm{Re}(\varphi, \psi);$$

$$\|\varphi - \psi\|^2 = (\varphi - \psi, \varphi - \psi) = (\varphi, \varphi) + (\psi, \psi) - 2\mathrm{Re}(\varphi, \psi)$$

e sommando le due uguaglianze abbiamo finito $\blacksquare$.

Un esempio di spazio normato (addirittura di Banach, per quanto detto prima) la cui norma non è dedotta da un prodotto interno è $C^0([a, b])$ con la norma dell'estremo superiore. Puramente a titolo esemplificativo, consideriamo $[a, b] = [0, 2\pi]$ e $f = \sin x$. Poniamo, poi,

$$f^+ = \max_{[0,2\pi]}\{\sin x, 0\}, \qquad f^- = -\min_{[0,2\pi]}\{\sin x, 0\}.$$

Abbiamo
$$\|f^+ + f^-\| + \|f^+ - f^-\| = 1 + 1 = 2 \neq 4 = 2\|f^+\| + 2\|f^-\|.$$

Osservazione. - Come già osservato con somma, prodotto e norma, anche il prodotto interno è continuo. La dimostrazione non è difficile: si tratta di far vedere che se $x_n \to x$ e $y_n \to y$ quando $n \to +\infty$, allora $(x_n, y_n) \to (x, y)$. Infatti

$$(x_n, y_n) = (x_n - x + x, y_n) = (x_n - x, y) + (x, y_n) = (x_n - x, y_n) + (x, y_n - y) + (x, y)$$

da cui deduciamo

$$|(x_n, y_n) - (x, y)| \leq |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)|$$
$$\leq \|x_n - x\| \, \|y_n\| + \|x\| \, \|y_n - y\|$$

e quando $n \to +\infty$ il membro di destra tende a zero per la convergenza di x_n e di y_n e perchè $\|y_n\|$ è limitato, sempre per la convergenza.

Definizione. - Uno spazio con prodotto interno X si dice di Hilbert se il corrispondente spazio normato con la norma dedotta dal prodotto interno è completo $\blacksquare$.

Sono esempi di spazi di Hilbert (finito - dimensionali) $\mathbf{R}^N$ e $\mathbf{C}^N$, mentre il prototipo degli spazi di Hilbert infinito - dimensionali è $l^2(\mathbf{C})$.